This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

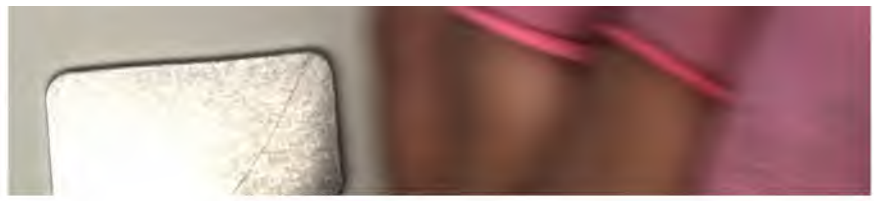
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 027 416 754



ABHANDLUNGEN

EINUNDFÜNFZIGSTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

NEUNUNDZWANZIGSTER BAND.

MIT 1 KARTE, 1 FAKSIMILE, 1 DOPPELTAFEL, 4 TAFELN UND 13 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1906.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

EINUNDFÜNFZIGSTER BAND.

MIT 1 KARTE, 1 FAKSIMILE, 1 DOPPELTAFEL, 4 TAFELN UND 13 TEXTFIGUREN.

STANFORD LIBRARY

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1906.

168742

STANFORD LIBRARY

INHALT.

Seite

F. Hayn, Selenographische Koordinaten. II. Abhandlung. Mit 4 Tafeln . 1

H. Held, Zur weiteren Kenntnis der Nervenendfüße und zur Struktur der Sehzellen. Mit 1 Doppeltafel 143

C. Correns, Gregor Mendels Briefe an Carl Nägeli. 1866—1873. Mit 1 Faksimile 187

O. Fischer, Über die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme. Mit 6 Textfiguren 267

A. Nathansohn, Über die Bedeutung vertikaler Wasserbewegungen für die Produktion des Planktons im Meere. Mit 1 Karte 355

E. Marx, Die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen. Mit 6 Figuren im Text 443

B. Peter, Beobachtungen am sechszölligen Repsoldschen Heliometer der Leipziger Sternwarte. IV. Abhandlung: Triangulation von 28 Sternen in den Hyaden. Mit 1 Figur 493

H. Bruns, Das Gruppenschema für zufällige Ereignisse 577

SELENOGRAPHISCHE KOORDINATEN

VON

FRIEDRICH HAYN.

II. ABHANDLUNG.

DES XXIX. BANDES
DER ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

N° I.

MIT 4 TAFELN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1904.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 2. Mai 1904.
Das Manuskript eingeliefert am 5. Mai 1904.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 26. Juli 1904

SELENOGRAPHISCHE KOORDINATEN

VON

FRIEDRICH HAYN.

II. ABHANDLUNG.

Einleitung.

Die vorliegende Bearbeitung von Beobachtungen, welche in den Jahren 1898 bis 1901 mit dem 30 cm-Refraktor der Leipziger Sternwerte angestellt worden sind, bildet die Fortsetzung der Untersuchung, die im XXVII. Bande dieser Abhandlungen erschienen ist und die Theorie der Rotation des Mondes behandelt. Auf diesen I. Teil der „Selenographischen Koordinaten" muß hier verwiesen werden, da es zu weit führen würde dort Gesagtes zu wiederholen. Die genannte Abhandlung wird kurz als I. Abh. zitiert werden.

Der vorliegende II. Teil behandelt nun die Ableitung der selenographischen Koordinaten der 5 Punkte I. Ordnung und der Rotationselemente des Mondes. Da die hier angewendete Methode wesentlich von der bisher üblichen abweicht, mußten auch die hierzu nötigen Entwickelungen ausführlich mit aufgenommen werden. Es sind daher im folgenden alle Formeln gegeben, deren man bei selenographischen Arbeiten bedarf, jedoch sind allgemein bekannte Formeln der sphärischen Astronomie, wie z. B. die Vorschriften zur Berechnung der Parallaxe des Mondes, nicht aufgeführt worden.

Da die hier veröffentliche Beobachtungsreihe die erste größere Arbeit des Leipziger Refraktors ist, welche der Öffentlichkeit übergeben wird, so erscheint es notwendig, einiges über das Instrument, seine Konstanten und die Reduktion der Beobachtungen zu sagen.

Im folgenden sei zunächst kurz der Inhalt der einzelnen Kapitel angeführt:

I. Kap. Das Instrument und seine Konstanten; Beobachtungs- und Reduktionsmethoden.

II. Kap. Die der Abhandlung zugrunde liegende Beobachtungsreihe und ihre Reduktion.

III. Kap. Koordinatentransformationen.

IV. Kap. Differentialformeln der Transformationen.

V. Kap. Abhängigkeit der scheinbaren Örter der Oberflächenpunkte des Mondes von der Größe *f*.

VI. Kap. Zusammenstellung der Rechnungsvorschriften.

VII. Kap. Die beobachteten Größen, ihre Darstellung durch die Rechnung unter Annahme genäherter Werte der einzelnen Elemente und die numerisch berechneten Differentialformeln.

VIII. Kap. Die Beobachtungsgleichungen, die Normalgleichungen und deren Lösungen.

IX. Kap. Bestimmung der selenographischen Länge und Breite von Mösting A durch eine im Jahre 1903 ausgeführte Zusatzreihe. Das Profil des Mondes.

X. Kap. Ableitung der definitiven Resultate und Besprechung der Wege und Ziele fernerer selenographischer Arbeiten.

Als Anhang sind vier Tafeln beigefügt, welche Ansichten des Mondprofils und der 5 Punkte I. Ordnung geben.

Bei den Rechnungen, namentlich bei den langwierigen Koordinatentransformationen, bin ich bereitwilligst unterstützt worden durch die Herren Dr. VON FLOTOW, Dr. WERNER und Kand. MOSCHICK, denen ich an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank für ihre Hilfe ausspreche.

I. Kapitel.

Im Mai 1889 wurde das zwölffüßige Äquatorial von Pistor und Martins abgenommen, um einem neuen Instrumente Platz zu machen. Die Montierung war veraltet, das Uhrwerk hatte schon seit langen Jahren den Dienst versagt, das Fadenmikrometer genügte den jetzigen Ansprüchen nicht mehr, die Beleuchtung war zwar ausgiebig, verlangte aber die Lichtmasse eines hellen Argandbrenners. Objektiv, Mikrometer, Rohr, sowie die nie benutzten, fein geteilten Kreise bezw. die groben Kreise, desgl. die Mikroskope wurden für gelegentliche weitere Verwendung zurückgelegt; die Okulare wurden dem neuen Instrumente angepaßt.

Im Sommer 1890 wurde die alte Trommelkuppel abgebrochen. Ihr Spalt war viel zu schmal, die Bewegung äußerst beschwerlich, namentlich wegen der Auflagerung auf Kugeln und der unsoliden Befestigung der Transmission. An ihre Stelle trat ein eiserner Dom, entworfen von G. Heyde in Dresden, ausgeführt von Schlossermeister Patzig daselbst. Noch im selben Jahre wurde die Montierung des neuen Instrumentes von Repsold & Söhne aufgestellt. Das Objektiv, aus Jenaer Glas von der Werkstatt von Reinfelder & Hertel hergestellt, kam erst im Juli 1891 an, die Brennweite stellte sich um etwa 5 cm kleiner heraus, als vereinbart worden war. Da der Okularauszug hierfür nicht ausreichte, wurde die untere Rohrhälfte von Repsold & Söhne um den erforderlichen Betrag gekürzt.

Das Objektiv besitzt 30 cm freie Öffnung und eine Brennweite von 3,596 m, das Öffnungsverhältnis ist demnach 1 : 12. Das Bild eines Sternes besteht aus einem scharfen kreisrunden Kernscheibchen, umgeben von mehreren Beugungsringen und weiter von einer stark gefärbten Aureole, welche bei hellen Objekten durch Abblendung auf 20 cm verschwindet. Die Kernscheibchen sind sehr klein und die trennende Kraft des Objektives sehr zufriedenstellend. Auffallend aber ist, daß trotz der großen Öffnung

schon Sterne 12. Größe schwer zu beobachten sind; so war z. B. Eros während seiner ersten Erscheinung zwar gut zu sehen, aber nicht leicht zu beobachten. Die oben erwähnte Aureole bringt es mit sich, daß man vom Mond und den Planeten bei voller Öffnung nur verwaschene Bilder erhält, nach Abblendung auf das Öffnungsverhältnis 1 : 18 lassen die Bilder nichts zu wünschen übrig. Photographische Aufnahmen heller Sterne zeigen 3 ziemlich lange Schwänze, die um 120° auseinander liegen. Die Vermutung, daß daran die Auflage der Linsen schuld sein könne, bestätigte sich nicht, denn bei Drehung der Linsen in ihrer Fassung drehten sich die Bildfehler mit.

Die Montierung besitzt die bekannte Form der Repsoldschen Instrumente, jedoch mit einigen Modifikationen.

Die beiden Kreise lassen sich mit je zwei Mikroskopen mikrometrisch ablesen. Diese für das bloße Aufsuchen unnötig scharfe Ablesungsart wurde gewählt, weil es für sichere Identifizierung mitunter wünschenswert ist, eine innerhalb weniger Bogensekunden verbürgte Position rasch aus den Ablesungen der Kreise herleiten zu können.

Die Beleuchtung erfolgt ausschließlich durch kleine Glühlampen, für welche fünf Akkumulatoren den Strom liefern. Die letzteren werden durch den Starkstrom der städtischen Zentrale geladen. Zwei Lampen sind für den Stundenkreis, vier für die Indices und die Mikrometertrommeln des Deklinationskreises, eine für helles Feld, eine für helle Fäden und Positionskreis des Fadenmikrometers, eine für den Okularteil des sogleich zu erwähnenden Kontrollfernrohrs bestimmt. Die Schaltung ist so eingerichtet, daß Lampen, die gleichzeitig gebraucht werden, auch gleichzeitig leuchten, während die anderen dunkel bleiben. Jede Lampe ist mit einem Kohlenblattregulator versehen, wie er zuerst bei dem Leipziger Heliometer Verwendung gefunden hat. Die ganze elektrische Beleuchtungseinrichtung wurde nach den Angaben von Herrn Prof. BRUNS vom Mechaniker der Sternwarte neu ausgeführt, da die von der Firma Repsold ursprünglich gelieferte nicht die erforderliche Betriebssicherheit besaß.

Um das Instrument, nötigenfalls unter Einschaltung einer Korrektionslinse, auch für photographische Arbeiten benutzen zu können, sind Sucher und Leitfernrohr in ein einziges Stück zusammengezogen. Mit der Fassung des Hauptobjektivs ist nämlich die

Fassung eines Objektivs von 100 mm Öffnung und 3,6 m Brennweite fest verbunden. Das Okular dazu besitzt eine Schiebung und Drehung mit dazu gehörigen groben Teilungen und bildet ein vollständiges Positionsmikrometer, nur in grober Ausführung und ohne Meßschraube. Da das Okular ein Feld von etwa 100′ überstreichen kann, so erkennt man leicht, daß das Nebenfernrohr ebensowohl als Sucher wie als Leitfernrohr bei photographischen Aufnahmen dienen kann. Außerdem gestaltet sich die Bildschärfe und, bei hinreichend schwachem Okular, auch die Lichtstärke erheblich besser, als bei den kleinen Suchern, die sonst den Refraktoren von der Größe des Leipziger mitgegeben zu werden pflegen.

Dicht am Objektiv sind in dem Rohr des Refraktors zwei verschließbare Ventilationsöffnungen angebracht, durch die auch die Rückseite des Objektivs ohne weiteres zugänglich ist. Man kann daher die Rückseite reinigen, ohne das Objektiv abnehmen zu müssen.

Den Gebrauchsokularen ist eine Form gegeben, die ein rasches und bequemes Fokusieren gestattet, ohne dabei fortwährend den Auszug des Mikrometers bewegen zu müssen. Eine große Zahl von Fokusierungen, welche gut untereinander stimmten und bei sehr verschiedenen Temperaturen angestellt wurden, gab das überraschende Resultat, daß die Fokusablesungen keine merkliche Abhängigkeit von der Temperatur erkennen lassen, daß also die Brennweitenänderung des Objektivs durch die Ausdehnung des Rohres vollkommen kompensiert wird. Dieser Umstand ist sehr angenehm, da man den Okularauszug ein für allemal festklemmen kann, was zur Folge hat, daß der Nullpunkt des Positionskreises nahezu konstant ist. In der Zeit von 1892 bis 1897 war der Auszug auf die Ablesung der Okularskala 19,90 eingestellt. Vor Beginn der Mondbeobachtungen wurde das Objektiv abgenommen, gereinigt und neu zentriert. Da die Objektivfassung keinerlei Zentriervorrichtung besitzt, wurde zwischen Objektivfassung und Rohrende Staniol in passender Stärke eingelegt und dadurch das Objektiv durchschnittlich um 0.25 mm vom Okular entfernt. Seit dieser Zeit ist der Okularauszug auf 20.00 eingestellt, sodaß nunmehr die Fadenebene um 0.35 mm weiter vom Objektiv absteht als in der Beobachtungsperiode 1892 bis 1897.

Bei den ersten Versuchen zu den beabsichtigten Mondbeobachtungen stellte es sich heraus, daß die Brennweite für deut-

liches Erkennen von Detail auf der Mondoberfläche etwa um 2 mm größer war als die für Trennung enger Doppelsterne. Bei Abblendung des Objektives auf 15 cm, die beim Monde schon wegen der sonst störenden Helligkeit geboten war, wurde diese Fokusdifferenz wesentlich geringer, und es wurde deshalb die oben genannte Einstellung des Okularauszuges gewählt, bei welcher auch bei voller Öffnung die Bildbeschaffenheit der Sterne nichts an Güte und Schärfe einbüßt, andererseits aber bei einer Öffnung von 15 cm auch die Bilder von Mond und Planeten deutlich und scharf sind. Bei der Tiefenausdehnung des Focus eines Objektives von 3.6 m Brennweite tritt trotzdem keinerlei Parallaxe zwischen Bild und Faden auf.

Obwohl die Feldbeleuchtung an sich sehr ausgiebig ist, reichte sie doch nicht hin, um die Mikrometerfäden außerhalb der Mondscheibe in unmittelbarer Nähe des Randes erkennen zu lassen. Um diesem Übelstande abzuhelfen, wurde bei den Mondbeobachtungen auf das Objektiv ein drehbares Mullgitter aufgesetzt, das der Beobachter nach Belieben von seinem Platze am Okular aus vor- und zurückschlagen kann. Die Beuchungsbilder des Gitters bewirken eine starke diffuse Aufhellung des Gesichtsfeldes, die gleichwohl die schärfer markierten Punkte der Mondoberfläche deutlich zu erkennen gestattet.

Im Laufe der Zeit hatte sich das Bedürfnis herausgestellt, gewisse Untersuchungen des Fadenmikrometers auch ohne Beobachtung von Sternen zu jeder Zeit anstellen zu können. Da ein Kollimator, dessen Brennweite merklich kürzer als die des Beobachtungsfernrohres ist, niemals saubere Bilder gibt, und da ferner die Aufstellung eines längeren Kollimators durch die Örtlichkeit ausgeschlossen war, so wurde folgender Weg eingeschlagen. Auf das Objektiv des Refraktors wird eine einfache Hilfslinse von etwa 46 m Brennweite und 100 mm Öffnung gesetzt, und dann auf eine Mire eingestellt, deren Abstand von der Hilfslinse gleich deren Brennweite ist. Als Mire dient eine Platte von 30 cm Durchmesser, die, mit feinen Bohrungen versehen und von rückwärts beleuchtet, verschiedene Gruppen von künstlichen Sternen enthält. Da der Ort der Mire in der Mauer des meteorologischen Turmes bis auf einen Spielraum von wenigen Zentimetern vorgeschrieben war, so mußte auch die Brennweite der Mirenlinse den angegebenen Spielraum innehalten, wenn man nicht bei den

Mirenbeobachtungen jedesmal den Okularauszug des Refraktors ändern wollte. Diese Forderung ist von der Firma Reinfelder und Hertel, die auch die Hilfslinse geliefert hat, in gewünschter Weise erfüllt worden.

Gehen wir nun zu den Konstanten des Instrumentes über, so ist zunächst zu erwähnen, daß die Aufstellung des Refraktors sehr beständig ist, wie man aus der folgenden Zusammenstellung sieht. Nennt man nämlich die Abweichung des Instrumentenpoles vom wahren Pol im Meridian ξ, wobei ξ positiv sein soll, wenn der Instrumentenpol oberhalb des wahren Poles liegt, die Abweichung im 6^h-Stundenkreis η, wo η positiv ist, wenn der Instrumentenpol westlich liegt, und bezeichnet man die auf den Äquator des Instrumentes bezogene Deklination des freien Endes der Deklinationsachse mit i, dann ergeben die Aufstellungsbeobachtungen folgende Werte für ξ, η, i:

		ξ	η	i
1892	Mai 13	$-20''$	$+7''$	$-15''$
1893	April 29	-27	$+23$	-27
1893	Juli 4	-30	$+13$	-22
1894	Febr. 23	-17	$+28$	-5
1895	Juni 27	-34	$+25$	-14
1897	Nov. 13	-12	$+10$	-24
1898	Nov. 19	-16	$+8$	-12

Die Indexfehler der Kreise sind merklich gleich Null; ebenso wurde der Kollimationsfehler wegkorrigiert. Die Biegung des Rohres wurde in horizontaler Lage mit Hilfe eines auf das Objektiv gesetzten Zentrierfernrohres zu 2 mm gefunden, was etwa $2'$ entspricht, und zwar biegt sich jede Rohrhälfte um 1 mm, da die Beobachtungen von Sternen keine Biegung erkennen lassen. Diese Biegung hat also nur zur Folge, daß die Zentrierung des Objektivs veränderlich ist. Diejenigen Verbiegungen, welche den Nullpunkt des Positionskreises beeinflussen, sind nicht erheblich; der Nullpunkt des Kreises differiert in den beiden Lagen des Rohres nur um etwa $3'$. Der Einfluß dieser Verbiegungen beträgt also nur $1'.5$.

Es ist nun noch nötig über das Positionsmikrometer und seine Konstanten nähere Mitteilungen zu machen. Das Leipziger Mikrometer ist im 2. Bande des Handbuches der Astronomischen Instrumentenkunde von Dr. L. AMBRONN, Seite 529 u. ff. genau

beschrieben und durch 2 Illustrationen veranschaulicht. Die mechanische Ausführung ist im allgemeinen die von Repsold bei den meisten neuen Mikrometern zur Ausführung gebrachte, es wird deshalb nicht nötig sein an dieser Stelle eine detaillierte Beschreibung zu geben, zumal in dem oben genannten Handbuche, das wohl den meisten Lesern zur Hand sein wird, dies in der anschaulichsten Weise geschehen ist. Es möge mir aus diesem Grunde auch gestattet sein, nötigenfalls mich auf die daselbst befindlichen 2 Illustrationen Fig. 540 und 541 zu beziehen.

Das Mikrometer ist mit Registriervorrichtung versehen, welche bisher nicht benutzt wurde. Die Drucktrommeln wurden vor Beginn unserer Beobachtungsreihe abgenommen und durch solche mit Silberteilung ersetzt, da letztere sich besser und schärfer ablesen lassen. Die Trommel ist in 100 Teile geteilt, man kann im günstigsten Falle 0.0005 Rev. ablesen. Der Positionskreis ist in Zehntelgrade geteilt und wird durch 2 einfache Mikroskope, welche im Fokus einen Indexfaden haben, bequem auf 0.005 Grad abgelesen.

Die bewegliche Fadenplatte trug anfangs ein System paralleler Fäden, welche vom Faden 1, welcher dem Schraubenkopf am nächsten liegt, nachstehende Abstände hatten

Faden	1	2	3	4	5	
	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	mm
Faden	6	7	8	9		
	5.0	6.0	14.0	21.0	mm	

Aus diesen Zahlen ist ersichtlich, daß man infolge der gewählten Anordnung der Abstände alle Distanzen bis 22 mm messen kann, ohne die Fadenplatte mehr als 1 mm bewegen zu müssen. Die feste Fadenplatte trägt parallel zur Schraube 3 Fäden, die voneinander je 1 mm abstehen; senkrecht dazu und also parallel zu den Fäden der beweglichen Platte war ein Faden *A* und 2 Doppelfäden *B* und *C* so angebracht, daß wenn die Fäden 8 und 9 in den Mitten von *B* und *C* standen, *A* von 1 um 10.5 mm entfernt war. Diese eben beschriebenen Systeme von Fäden wurden teilweise schlaff, sobald feuchtes Wetter eintrat. Deshalb mußte Faden 4 bald entfernt werden. Die Bewegung der Fadenplatte reichte aber nicht aus, alle Fäden 1 bis 9 mit *A* zu Koinzidenzen bringen zu können, es war dies nur möglich mit den Fäden 2 bis 8,

deshalb wurde später eine andere Anordnung der Fäden gewählt, die für den Gebrauch vorteilhafter ist. Da, wie schon gesagt, die meisten Fäden schlecht aufgespannt waren, habe ich sie im Mai 1893 sämtlich herausgerissen und dafür ein neues Netz eingezogen. Dabei wurde Faden 4 weggelassen, weil die so entstehende Lücke vor Verwechselung der Fäden beim Beobachten schützt. Der Faden *A* wurde um 0.5 mm weiter nach *B* zu verlegt, sodaß nunmehr die Fäden 2 bis 9 mit *A* zur Koinzidenz gebracht werden konnten. Mit diesem Netze wurde gearbeitet bis zum Sommer 1897. Da im Laufe der Zeit 2 Fäden gerissen waren, wurde im Sept. 1897 ein neues Netz mit großer Sorgfalt eingezogen, das sich bis heute sehr gut bewährt hat. Faden 1 wurde ganz weggelassen, ebenso wie schon früher Faden 4, dafür wurde aber ein Faden zwischen 7 und 8 eingeschaltet, und zwar 4.5 mm von 7 entfernt. Die Bezeichnung der Fäden mußte nunmehr geändert werden, sodaß jetzt die Abstände vom ersten Faden, der früher die Nummer 2 führte, sind

Faden	1	2	3	4	5	6	7	8	
	0.0	1.0	3.0	4.0	5.0	9.5	13.0	20.0	mm.

Im Jahre 1892 wurde mit Hilfe einer Längenteilmaschine von Hildebrand in Freiberg i. Sa. eine systematische Untersuchung des Fadenmikrometers vorgenommen, wobei zunächst sämtliche Fadenabstände mit der Schraube der Teilmaschine, und sodann die Distanzen der beweglichen Fäden mit der Mikrometerschraube ausgemessen wurden. Aus diesen Messungen folgte die Ganghöhe der Schraube zu 0.58368 mm. Ferner wurden die periodischen und fortschreitenden Fehler der Schraube ermittelt und als sehr klein befunden. Zahlen füge ich hier nicht an, weil später diese Arten von Fehlern viel genauer und umfassender bestimmt worden sind. Schließlich wurden sämtliche Winkel gemessen, welche die verschiedenen Fäden miteinander bilden.

Da die genauen Abstände der Meßfäden jederzeit bekannt sein müssen, wurden anfangs monatlich einmal durch Koinzidenzen mit *A* die Fadendistanzen bei Schraube oben und Schraube unten ermittelt. Späterhin geschah dies nur etwa vierteljährlich. Das Meßverfahren war dabei folgendes. Es wurden der Reihe nach sämtliche Fäden an beide Seiten von *A* gebracht mit Rechtsdrehung der Schraube, sodann wurde dasselbe rückwärts mit Linksdrehung

wiederholt. Dann wurde die Koinzidenz um 0.5 R verstellt und die ganze Messung wiederholt. Die periodischen Fehler der Schraube wurden somit eliminiert, wegen der fortschreitenden Fehler waren noch Korrektionen anzubringen.

Was nun die Ermittelung der genannten Fehler betrifft, so sollen im folgenden nur die Untersuchungen und Zahlen angeführt werden, die sich auf die Zeit von 1897 bis 1903 beziehen.

Bei diesen Untersuchungen wurde an Stelle des Okulars ein kleines Mikroskop gesetzt, in dessen Fokalebene drei Doppelfäden aufgespannt sind, welche um je 0.25 R voneinander abstehen, sodaß man in bekannter Weise Strecken von 0.5 Rev. und 0.25 Rev. ausmessen kann. Ehe das Mikrometer im Oktober 1897 wieder angesetzt wurde, wurde im Zimmer eine Bestimmung der periodischen Fehler vorgenommen, und zwar an drei Stellen der Schraube. Die Zahl der Einstellungen war nicht groß genug, um eine Abhängigkeit dieser Fehler von der Stelle der Schraube nachweisen zu können. Das Resultat dieser Untersuchung war, daß an die Ablesungen der Mikrometertrommel folgende Korrektionen anzubringen sind, wobei P den Bruchteil einer Umdrehung oder die Phase, R und L die Rechts- oder Linksdrehung bedeuten.

P	R	L
.0	− 0.0005	+ 0.0006
.1	− 5	+ 3
.2	− 3	− 1
.3	− 2	− 3
.4	− 1	− 4
.5	+ 2	− 4
.6	+ 5	− 3
.7	+ 7	− 1
.8	+ 4	+ 2
.9	− 2	+ 6

Die periodischen Fehler erreichen also nirgends die Größe von 0.5 Mikron, da 1 μ gleich 0.0017 Rev. ist. Die Fehlerbestimmung wurde im Jahre 1898 in derselben Position wiederholt, in welcher sich das Mikrometer beim Beobachten befindet, und zwar Schraube oben. Aus diesen Untersuchungen folgten die Korrektionen bei Rechtsdrehung der Schraube

P	Rev. 0	Rev. 17	Rev. 34
.0	— 0.0003	— 0.0006	— 0.0009
.1	— 4	— 6	— 9
.2	— 3	— 4	— 5
.3	— 1	+ 1	0
.4	+ 2	+ 4	+ 4
.5	+ 3	+ 6	+ 7
.6	+ 3	+ 5	+ 8
.7	+ 2	+ 3	+ 6
.8	+ 1	0	+ 2
.9	— 1	— 3	— 4

und für Linksdrehung der Schraube

P	Rev. 0	Rev. 17	Rev. 34
.0	+ 0.0008	+ 0.0008	+ 0.0008
.1	+ 7	+ 6	+ 8
.2	+ 3	+ 2	+ 3
.3	— 2	— 2	— 2
.4	— 6	— 6	— 7
.5	— 8	— 8	— 8
.6	— 7	— 6	— 8
.7	— 3	— 2	— 3
.8	+ 2	+ 2	+ 2
.9	+ 6	+ 6	+ 7

Diese Resultate stimmen ziemlich gut mit denen von 1897; die beiden Schraubengänge 0 und 34 sind die beiden äußersten, mit denen man noch messen kann. Bei Rechtsdrehung scheinen die periodischen Fehler von 0 nach 34 hin etwas zu wachsen. Über die Genauigkeit dieser Korrektionen ist zu sagen, daß sie die Beobachtungen so gut darstellen, daß die übrigbleibenden Widersprüche nie 0.0005 Rev. oder 0.3 μ überschreiten, meist aber weit darunter bleiben.

Im November 1902 mußte das Mikrometer abgenommen werden, da die Schraube sich merkbar schwer drehte. Es wurde in allen Teilen auf das sorgfältigste gereinigt und frisch geölt, aber darauf Bedacht genommen, daß keine der Justierschrauben angerührt wurde. Die Fehlerbestimmungen vom Sept. 1903 zeigen trotzdem, daß die Sachlage bei Rechtsdrehung verändert ist, während bei Linksdrehung sich der Charakter erhalten hat. Die Korrektionen sind nämlich für Rechtsdrehung

P	Rev. 0	Rev. 17	Rev. 34
.0	+ 0.0003	+ 0.0001	— 0.0002
.1	+ 3	+ 1	— 2
.2	+ 1	+ 1	— 1
.3	— 1	0	0
.4	— 2	0	+ 1
.5	— 3	— 1	+ 2
.6	— 3	— 1	+ 2
.7	— 1	— 1	+ 1
.8	+ 1	0	0
.9	+ 3	0	— 1

bei Linksdrehung dagegen

P	Rev. 0	Rev. 17	Rev. 34
.0	+ 0.0004	+ 0.0005	+ 0.0007
.1	+ 4	+ 5	+ 8
.2	+ 2	+ 4	+ 6
.3	0	+ 1	+ 2
.4	— 3	— 2	— 3
.5	— 4	— 5	— 7
.6	— 4	— 5	— 8
.7	— 2	— 4	— 6
.8	0	— 1	— 2
.9	+ 3	+ 2	+ 3

Bei Rechtsdrehung verschiebt sich die Phase unter gleichzeitiger Änderung der Amplitude längs der Schraube, bei Linksdrehung zeigt sich ein kleiner Gang in der Amplitude. Diese letzten Untersuchungen wurden in 4 verschiedenen Lagen des Mikrometers ausgeführt, nämlich Schraube oben, unten, rechts und links. Eine Abhängigkeit von der Lage ließ sich nicht konstatieren. Es ist nachträglich nicht zu entscheiden, ob an dieser Änderung die Reinigung des Mikrometers schuld ist oder die häufige Benutzung in den letzten Jahren. Letzerer Grund ist nicht ganz von der Hand zu weisen, wenn man bedenkt, daß die Änderungen noch nicht ein Mikron betragen.

Das Mikrometer ist in der Weise konstruiert, daß die bewegliche Fadenplatte auf der einen Seite durch einen Zylinder, auf der anderen Seite mit Hilfe von justierbaren Anschlagstiften zwischen 2 ebenen Flächen geführt wird. Die Mikrometerschraube wird an ihrem Trommelende zylindrisch geführt, am Schraubenende legt sich ihr abgerundetes Ende gegen eine ebene Stahlfläche.

Die Schraube liegt dicht neben dem Führungszylinder der Platte. Soll nun das Mikrometer fehlerfrei arbeiten, so müßte die Schraube stets genau parallel zu dem Führungszylinder liegen. Vorausgesetzt, die Konstruktion wäre so genau ausgeführt, dann würde dieser Parallelismus doch nur bei einer ganz bestimmten Stellung der Führungsstifte stattfinden. Sowie an diesen Stiften gestellt wird, erfährt die Schraube einen Zwang, der um so größer sein wird, je weiter man sie in die Mutter hineindreht. Das Gesagte wird an der Hand der oben zitierten Illustrationen und zugehörigen Beschreibung verständlich sein. Auf diese Weise müßten dann vorhandene periodische Fehler einen Gang zeigen. Es ist aber klar, daß ein solcher Zwang auch bei fehlerfreier Schraube und Mutter fortschreitende Fehler erzeugen muß. An sich ist nicht recht erfindlich, wie bei diesem Mikrometer, wo die Schraube durch eine Spiralfeder gegen die Mutter gedrückt wird und also stets dieselbe Seite der Schraubengänge gegen dieselbe Seite des Muttergewindes anliegt, Rechts- und Linksdrehung verschiedene periodische Fehler erzeugen kann. Zur Erklärung bleibt nur die Annahme, daß die Schraube in der Mutter Luft hat, und daß sie bei Rechtsdrehung, wo sie gegen die Feder ankämpfen muß, sich anders in der Mutter lagert als bei Linksdrehung, wo die Schraube dem Federdrucke nachgibt.

Während der ersten Beobachtungsperiode von 1892 bis 1897 wirkte bei manchen Untersuchungen der Umstand störend, daß die Ebenen der beweglichen und festen Fäden nicht parallel waren, sondern daß auf der Seite der Schraube die beweglichen Fäden sehr dicht über die festen wegstrichen, während auf der anderen Seite der Abstand so groß war, daß man mit starken Vergrößerungen nicht gleichzeitig die beiden Arten von Fäden scharf sehen konnte. Diesen Übelstand habe ich dadurch beseitigt, daß ich vor dem Aufziehen der Fäden den Sockel, der das feste System trägt (Fig. 451), um 0.02 bis 0.03 mm durch Wegschleifen an seiner Auflagefläche erniedrigt habe. Nunmehr konnte man durch Neigen der beweglichen Platte nahezu den gewünschten Parallelismus der beiden Ebenen herbeiführen. Die Güte des Mikrometers hat dadurch entschieden nicht gelitten, denn die Schraubenfehler sind seit dieser Zeit noch so klein, daß sie für alle Beobachtungen zu vernachlässigen sind. Die Präzision dieses vorzüglichen Repsoldschen Mikrometers ist so groß — wie sich auch noch aus weiter

unten folgenden Untersuchungen zeigen wird —, daß nicht der mechanische Teil, sondern die Beobachtung der Genauigkeit eine Schranke setzt. Es ist fast unmöglich, mit der Hand eine Mikrometerschraube von den üblichen Dimensionen genauer als auf 0.0005 Rev. einzustellen, die Hand empfindet solche Größen nicht mehr, auch läßt die Vergrößerung unseres Okularmikroskopes solche Größen nicht mehr sicher erkennen; wenn also trotzdem die Untersuchung der Schraubenfehler bei großer Zahl der Einstellungen noch Größen von 0.0002 Rev. mit Sicherheit nachweist, so muß man sagen, daß die Schraube an sich zweifelsohne noch viel genauer mißt.

Obwohl die periodischen Fehler immer sehr klein waren, sind sie bei allen Untersuchungen und Beobachtungen, wo es auf die größte Genauigkeit ankam, durch Koinzidenzverstellung eliminiert worden; in Rechnung wurden sie nie gezogen.

Wir kommen nun zur Besprechung der fortschreitenden Fehler. Dieselben wurden in der bekannten Weise dadurch ermittelt, daß die Fadenintervalle

3—5 = 3.45 Rev.
2—5 = 6.89
5—7 = 13.75
4—8 = 27.53

an verschiedenen Stellen der Schraube ausgemessen wurden. Die betreffenden Stellen der Schraube waren

(1) = 0.3 Rev. (7) = 21.0 Rev.
(2) = 3.8 (8) = 24.5
(3) = 7.2 (9) = 27.9
(4) = 10.7 (10) = 31.3
(5) = 14.1 (11) = 34.7
(6) = 17.6

Um einen mittleren Schraubenwert festzusetzen, wurde angenommen, daß die Korrektionen von (1) und (10) null sein sollten. Die Korrektion für (11) wurde deshalb nicht Null gesetzt, weil, wie sich auch später zeigen wird, (11) nicht mit der Sicherheit resultiert wie die anderen Korrektionen, da der beschränkte Spielraum des Okularschlittens nur gestattete (11) mit (3) und (7) zu kombinieren.

1899 Juli wurden die fortschreitenden Fehler nur bei Rechtsdrehung der Schraube aber in den 4 Lagen Schraube oben, unten,

rechts und links ermittelt. Die Korrektionen der Trommelablesungen sind

Rev.	*SO*	*SR*	*SU*	*SL*	Mittel
0.3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.8	− 6	0	− 12	− 9	− 7
7.2	− 6	− 2	− 7	− 12	− 7
10.7	− 11	− 10	− 11	− 12	− 11
14.1	− 15	− 10	− 8	− 15	− 12
17.6	− 18	− 14	− 13	− 15	− 15
21.0	− 16	− 15	− 10	− 21	− 15
24.5	− 15	− 19	− 11	− 20	− 16
27.9	− 12	− 11	− 6	− 15	− 11
31.3	0	0	0	0	0
34.7	+ 8	+ 5	+ 11	0	+ 6

Eine Wiederholung der Messungen 1903 September gab folgende Korrektionen für

Rechtsdrehung

Rev.	*SO*	*SR*	*SU*	*SL*	Mittel
0.3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.8	− 2	− 4	− 11	− 6	− 6
7.2	− 11	− 4	− 11	− 7	− 8
10.7	− 12	− 3	− 10	− 7	− 8
14.1	− 22	− 6	− 11	− 7	− 11
17.6	− 15	− 11	− 16	− 11	− 13
21.0	− 17	− 12	− 14	− 11	− 13
24.5	− 16	− 11	− 13	− 7	− 12
27.9	− 13	− 8	− 8	− 7	− 9
31.3	0	0	0	0	0
34.7	+ 5	+ 10	+ 22	+ 12	+ 12

Linksdrehung

Rev.	*SO*	*SR*	*SU*	*SL*	Mittel
0.3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.8	+ 3	− 2	− 5	− 7	− 3
7.2	− 2	− 7	− 6	− 10	− 6
10.7	− 4	− 7	− 8	− 14	− 8
14.1	− 10	− 12	− 9	− 13	− 11
17.6	− 6	− 12	− 9	− 16	− 11
21.0	− 12	− 15	− 14	− 16	− 14
24.5	− 11	− 12	− 12	− 19	− 13
27.9	− 11	− 9	− 6	− 9	− 9
31.3	0	0	0	0	0
34.7	+ 5	+ 4	+ 20	+ 9	+ 9

Eine Abhängigkeit dieser Zahlen von der Lage der Schraube und dem Sinne der Drehung läßt sich nicht nachweisen. Die wenig gute Übereinstimmung der einzelnen Werte für die an letzter Stelle stehende Korrektion erklärt sich daraus, daß die Konstruktion des Mikrometers diese Größe nicht mit derselben Schärfe bestimmen läßt, wie die anderen Korrektionen.

Bei der Bestimmung der Fadenabstände wurde das Mittel der Korrektionen angewendet. Die Untersuchung der fortschreitenden Fehler gibt eine sehr sichere Bestimmung der Fadenabstände 3—5, 2—5, 5—7, 4—8. Verbindet man also noch die Fäden 1, 4 und 6 mit 5, so erhält man sämtliche Fadendistanzen.

Die weiter oben erwähnten Kontrollmessungen der Fadendistanzen hatten für die Zeit 1897 Dez. — 1898 Juli die weiterhin aufgeführten Resultate gegeben. Hierbei bedeutet z. B. *OR*: Schraube oben, Rechtsdrehung der Schraube etc. Die Abstände der einzelnen Fäden, sind auf einen idealen Faden bezogen, der dadurch definiert ist, daß die Summe der Abstände Null ist, der also die Schwerpunktslinie des Systemes darstellt. Darunter sind die Summen der positiven und negativen Abstände gegeben.

I. 1897 Dez. — 1898 Juli

Faden	*OR*	*OL*	*UR*	*UL*	*RR*	*RL*	*LR*	*LL*
1	+ 11.9309	.9309	.9300	.9303	.9311	.9307	.9310	.9307
2	+ 10.2085	.2088	.2076	.2083	.2086	.2086	.2081	.2090
3	+ 6.7736	.7741	.7734	.7734	.7737	.7735	.7731	.7741
4	+ 5.0549	.0550	.0543	.0546	.0553	.0545	.0549	.0551
5	+ 3.3230	.3230	.3230	.3230	.3230	.3232	.3227	.3233
6	— 4.3947	.3951	.3949	.3947	.3949	.3949	.3951	.3944
7	— 10.4280	.4280	.4274	.4276	.4282	.4281	.4275	.4286
8	— 22.4682	.4683	.4661	.4676	.4685	.4678	.4675	.4692
Σ_+	+ 37.2909	.2918	.2883	.2896	.2917	.2905	.2898	2922
Σ_-	— 37.2909	.2914	.2884	.2899	.2916	.2908	.2901	2922

Alle Fadenabstände sind auf 0° reduziert. Aus einer großen Zahl von Messungen ergab sich der Ausdehnungskoeffizient der Fadenplatte aus Rotguß gegen die Stahlschraube pro 1° C. zu 0.000 0074, was mit der durchschnittlichen Ausdehnung von Stahl und Messing gut stimmt.

In der nächsten Zusammenstellung befinden sich die Resultate der Kontrollmessungen von 1898 August bis 1899 Juli. Im Juli

oder August 1898 hat nämlich Faden 1 seinen Ort um 0.0027 Rev. geändert, wahrscheinlich infolge Verziehung des Schellacks, mit dem die Fäden aufgekittet sind. Infolgedessen mußten die Messungen vor und nach diesem Zeitpunkte gesondert behandelt werden.

II. 1898 August — 1899 Juli

Faden	*OR*	*OL*	*UR*	*UL*	*RR*	*RL*	*LR*	*LL*
1	+ 11.9285	.9289	.9280	.9282	.9289	.9282	.9269	.9276
2	+ 10.2083	.2088	.2074	.2079	.2086	.2086	.2075	.2085
3	+ 6.7735	.7739	.7733	.7738	.7738	.7737	.7734	.7739
4	+ 5.0556	.0554	.0550	.0553	.0556	.0551	.0554	.0556
5	+ 3.3234	.3235	.3233	.3236	.3234	.3235	.3237	.3235
6	— 4.3951	.3947	.3949	.3944	.3945	.3940	.3938	.3939
7	— 10.4275	.4276	.4264	.4270	.4271	.4272	.4261	.4271
8	— 22.4680	.4684	.4658	.4676	.4688	.4681	.4668	.4682
Σ_+	+ 37.2903	.2905	.2870	.2888	.2903	.2891	.2869	.2891
Σ_-	— 37.2906	.2907	.2871	.2890	.2904	.2893	.2867	.2892

Die Untersuchung der fortschreitenden Fehler 1899 Juli lieferte noch für Rechtsdrehung der Schraube die folgenden Abstände:

III. 1899 Juli

Faden	*OR*	*UR*	*RR*	*LR*
1	+ 11.9287	.9280	.9282	.9287
2	+ 10.2088	.2083	.2091	.2080
3	+ 6.7738	.7734	.7739	.7734
4	+ 5.0554	.0553	.0552	.0555
5	+ 3.3235	.3234	.3236	.3233
6	— 4.3940	.3940	.3934	.3941
7	— 10.4268	.4261	.4268	.4260
8	— 22.4698	.4681	.4695	.4691
Σ_+	+ 37.2902	.2884	.2900	.2889
Σ_-	— 37.2906	.2892	.2897	.2892

Wenn nun noch die Fadenabstände in Bogenmaß bekannt sind, läßt sich der Schraubenwert in Bogenmaß ausdrücken. Die Beobachtungen zur Ermittelung dieser Größen wurden in den Jahren 1898 und 1899 ausgeführt; infolgedessen wurde zur Berechnung des Schraubenwertes nur von den aufgeführten Zahlengruppen Gebrauch gemacht. Bevor wir aber zu diesem Punkte übergehen,

sollen noch die Abstände angeführt werden, welche aus den Kontrollmessungen 1899 August bis 1903 September und aus den Schraubenuntersuchungen 1903 September folgen. Die Kontrollmessungen wurden nach 1899 Juli nur noch bei Schraube oben und Schraube unten ausgeführt.

IV. 1899 August — 1903 September.

Faden	*OR*	*OL*	*UR*	*UL*
1	+ 11.9282	.9278	.9267	.9273
2	+ 10.2084	.2084	.2077	.2079
3	+ 6.7741	.7744	.7733	.7739
4	+ 5.0543	.0547	.0540	.0545
5	+ 3.3238	.3238	.3236	.3240
6	— 4.3935	.3935	.3927	.3932
7	— 10.4260	.4261	.4250	.4256
8	— 22.4689	.4696	.4673	.4688
Σ_+	+ 37.2888	.2891	.2853	.2876
Σ_-	— 37.2884	.2892	.2850	.2876

V. 1903 September.

Faden	*OR*	*OL*	*UR*	*UL*	*RR*	*RL*	*LR*	*LL*
1	+ 11.9268	.9271	.9268	.9270	.9269	.9271	.9266	.9268
2	+ 10.2084	.2086	.2073	.2076	.2084	.2084	.2083	.2082
3	+ 6.7739	.7742	.7740	.7744	.7744	.7747	.7743	.7742
4	+ 5.0547	.0543	.0538	.0538	.0541	.0541	.0535	.0539
5	+ 3.3236	.3237	.3238	.3239	.3239	.3240	.3240	.3239
6	— 4.3931	.3935	.3928	.3934	.3928	.3936	.3933	.3929
7	— 10.4256	.4253	.4251	.4250	.4252	.4254	.4247	.4252
8	— 22.4687	.4694	.4679	.4681	.4696	.4692	.4691	.4692
Σ_+	+ 37.2874	.2879	.2857	.2867	.2877	.2883	.2867	.2870
Σ_-	+ 37.2874	.2882	.2858	.2865	.2876	.2882	.2871	.2873

Es ist nicht ausgeschlossen, daß außer der schon erwähnten Ortsänderung von Faden 1 noch andere Fäden ihren Ort ein wenig geändert haben, doch sind diese Änderungen jedenfalls so klein, daß sie vernachlässigt werden können, da 0.001 Rev. nur 0″.03 ist. Bildet man bei allen Gruppen I bis V die Größe $\Sigma_+ - \Sigma_-$ und macht man die Gruppe I dadurch mit den anderen vergleichbar, daß man 0.0027 abzieht, dann erhält man die folgende Zusammenstellung:

VI.

	OR	*OL*	*UR*	*UL*	*RR*	*RL*	*LR*	*LL*
I.	74.5791	.5805	.5740	.5768	.5806	.5786	.5772	.5817
II.	5809	.5812	.5741	.5778	.5807	.5784	.5736	.5783
III.	5808	—	.5776	—	.5797	—	.5781	—
IV.	5772	.5783	.5703	.5752	—	—	—	—
V.	5748	.5761	.5715	.5732	.5753	.5765	.5738	.5746
Mittel	74.5786	.5790	.5735	.5757	.5791	.5778	.5757	.5782

Als Temperatur des Mikrometers wurde die Angabe eines Thermometers benutzt, welches an der Säule des Refraktors befestigt ist. Es ist anzunehmen, daß dieses Thermometer sehr nahe die Temperatur der großen Metallmassen der Montierung anzeigt, und da Fadenplatte und Schraube wieder gegen direkte Bestrahlung geschützt innerhalb der nicht unbedeutenden Massen des ganzen Okularkopfes liegen, so schien es mir am besten zu sein, jene Thermometerangaben als die richtigen anzunehmen.

Eine Diskussion der übrigbleibenden Fehler bei Ableitung des Temperaturkoeffizienten zeigte, daß die angenommenen Temperaturen richtig waren in den Monaten Juli, August, September, Dezember, Januar, Februar, daß sie im März und April um etwa 1^0, im Mai und Juni um 2^0 bis 3^0 zu niedrig, im Oktober und November um 1^0 zu hoch waren. Diese Tatsache erklärt sich ganz ungezwungen aus den Jahreszeiten. In den Monaten, welche anhaltend gleiche Temperaturen haben, zeigt das Thermometer die Temperatur des ganzen Instrumentes. Im Frühjahr hat das Mikrometer schon eine höhere, im Herbst schon eine tiefere Temperatur als die Säule. Eine um 2^0 fehlerhafte Annahme der Temperatur ändert die in VI gegebenen, auf 0^0 reduzierten Größen, um etwa 0.0011 Rev., die größte vorkommende Distanz $1 - 8 = 34.4$ Rev. um 0.0005 Rev. Gegen die Benutzung dieses Thermometers ist also nichts einzuwenden. Daß die Zahlen in VI innerhalb der gleichen Messungsart noch bis zu 0.004 Rev. vom Mittel abweichen, wird in der Hauptsache dadurch zu erklären sein, daß sie durch Aufsummieren von 8 beobachteten Größen gebildet sind. Im Durchschnitt sind die Zahlen bei Linksdrehung um 0.0009 Rev. größer als die bei Rechtsdrehung, für die größte Distanz würde das 0.0004 Rev. = 0″.01 ausmachen, also vernachlässigt werden können. Größer ist der Lagenunterschied. Wir haben bei

Schraube	oben	74.5788	74.5767
„	unten	.5746	
„	rechts	.5784	74.5771.
„	links	.5769	

Der größte Unterschied ist zwischen „oben“ und „unten“, während die Mittel $\frac{1}{2}(o+u)$ und $\frac{1}{2}(r+l)$ nahe zusammenstimmen.

Die Bedeutung der Mittel in VI kann man sich in folgender Weise anschaulich machen. Nehmen wir die Höhe eines Schraubenganges zu 0.583680 mm an, und dreht man die Schraubentrommel um 35.0000 Rev., nämlich um die größte zulässige Bewegung des Mikrometers, so folgt aus den genannten Zahlen, daß die Fadenplatte sich bewegt hat

bei	*OR*	um	20.4283	mm
	OL		4282	
	UR		4297	
	UL		4291	
	RR		4282	
	RL		4286	
	LR		4291	
	LL		4284	

Die Schlußfolgerungen sind:

1. Bei Linksdrehung ist der zurückgelegte Weg durchschnittlich um 0.25 Mikron kürzer als bei Rechtsdrehung. Dieser Unterschied kann aber dadurch hervorgerufen sein, daß, da die Messungen bei Linksdrehung stets nach denen mit Rechtsdrehung ausgeführt wurden, durch den Einfluß des Beobachters die Temperatur des Mikrometers bei Linksdrehung höher war, als angenommen worden ist.

2. Der zurückgelegte Weg ist bei Schraube unten um 1.15 Mikron größer als bei Schraube oben. Dieser Unterschied wird jedenfalls durch die verschiedene Höhe der Ölschicht zu erklären sein; denn bei Schraube oben wird die Schraube durch die Feder und das Gewicht des Schlittens gegen die Mutter gedrückt, bei Schraube unten wirkt nur die Differenz der beiden Kräfte.

3. Der Unterschied zwischen den beiden Lagen „rechts“ und „links“ von 0.35 Mikron ist so einfach nicht zu erklären. Um den Ursachen auf die Spur zu kommen, müßte die Lage des Mikrometers noch mehr variiert werden. Die Größe der Arbeit

scheint mir jedoch in keinem Verhältnis zur Wichtigkeit der Frage zu stehen.

4. Für die Benutzung am wichtigsten ist, daß man zu der Annahme berechtigt ist: Man erhält immer denselben Wert für die Fadendistanzen, wenn man die Messungen in zwei entgegengesetzten Lagen des Mikrometers ausführt.

Über die Durchbiegung der Fäden sind bisher noch keine Untersuchungen angestellt worden. Sind die Fäden gleichmäßig straff gespannt und gut aufgekittet, so würde eine allen Fäden gemeinsame Biegung die Distanzen nicht ändern.

Daß eine nicht zu vernachlässigende, außergewöhnliche Biegung eines Fadens vorhanden wäre, müßte aus den Messungen bei Schraube oben und unten hervorgehen. Etwas derartiges ist aber nicht zu konstatieren.

Wir gehen nun zu der Bestimmung der Fadendistanzen in Bogenmaß über. In der ersten Beobachtungsperiode war der Schraubenwert in der Hauptsache aus Deklinationsbeobachtungen der Sterne A und Z im Sternhaufen bei h Persei bestimmt worden. An Sterndurchgängen lag kein großes Material vor, auch waren die Resultate hieraus nicht recht befriedigend. Da bei den Mondbeobachtungen die Messungen in Deklination im allgemeinen nicht durch Einstellungen mit der Schraube, sondern gewissermaßen auch durch Fadenantritte ausgeführt wurden, indem ich nämlich die Objekte vermöge ihrer täglichen Deklinationsbewegung auf den Faden laufen ließ, schien es mir angebracht zu sein, die Abstände der Fäden durch Sterndurchgänge zu bestimmen.

Bei diesen Beobachtungen wurden die Fäden senkrecht zur täglichen Bewegung gestellt, und es wurde beobachtet bei Schraube rechts und links. Die ersten Versuche zeigten aufs deutlichste, daß man den wünschenswerten Grad der Genauigkeit nur erreichen könne, wenn man hellere Sterne nicht unter 6. bis 7. Größenklasse nimmt. Weiterhin zeigte sich zu Anfang ein unerklärlich großer Unterschied zwischen „rechts“ und „links“. Zu vermuten war, daß hieran Nachziehungen des geklemmten Instrumentes schuld waren, indem nämlich, wenn sich das Fernrohr während des Durchganges noch verstellt, infolge der Unsymmetrie des Netzes der Einfluß einer solchen Verziehung in den Fadenabständen bei „rechts“ sich anders äußern wird als bei „links“. Zur Prüfung dieser Frage wurden Durchgänge der 3 Plejadensterne 17, η und

28 Tauri, welche nahe auf demselben Parallel liegen, beobachtet. Klemmte man das Fernrohr erst 20ˢ bis 30ˢ, bevor 17 Tauri den ersten Faden erreichte, so zeigten die Durchgänge dieses Sternes den erwähnten Unterschied, während η und 28 nichts davon zeigten. Wurde aber die Klemmung 60ˢ bis 90ˢ vor dem ersten Antritt ausgeführt, so war auch bei 17 Tauri der Unterschied verschwunden. Da die 3 Plejadensterne sich sehr schön beobachten lassen, wurden sie fast ausschließlich zur Bestimmung der Fadenabstände benutzt. Nur an einem Abende, 1898 Aug. 22, wurden 4 Sterne auf gleichem Parallel und mit passenden Rektaszensionsdifferenzen beobachtet, die nach den Karten der Bonner Durchmusterung ausgesucht worden waren. Im ganzen wurden auf diese Weise Sterndurchgänge beobachtet

		SR	*SL*	insgesamt
1897	Dez. 15	18	15	33
1898	Jan. 14	—	15	15
	Febr. 22	15	15	30
	Febr. 26	15	—	15
	März 11	15	15	30
	März 12	15	15	30
	Aug. 22	16	16	32
1899	Jan. 26	18	18	36
	Febr. 6	18	18	36

in Summa also 257 Durchgänge. Diese Beobachtungen liefern, auf den Äquator reduziert und für Refraktion verbessert, die folgenden Fadenabstände, wobei die Beobachtungen in solche vor und nach 1898 Juli getrennt werden sollen wegen der Ortsveränderung von Faden 1. Die Distanzen sind auf 0° reduziert.

A. Schraube rechts.

Faden	97 Dez. 15	98 Febr. 22	98 Febr. 26	98 März 11	98 März 12
1	+ 399″.38	399″.30	399″.20	399″.56	399″.64
2	+ 341.95	342.03	341.71	341.62	341.83
3	+ 226.85	226.61	226.65	226.80	226.49
4	+ 169.25	169.18	169.25	169.03	169.27
5	+ 111.34	111.64	111.44	111.34	111.16
6	− 147.31	147.15	146.86	147.08	147.22
7	− 348.87	349.40	348.87	349.18	348.84
8	− 752.57	752.23	752.51	752.09	752.32

B. Schraube links.

Faden	97 Dez. 15	98 Jan. 15	98 Febr. 22	98 März 11	98 März 12
1	+ 399".72	399".75	399".37	399".43	399".69
2	+ 341.99	341.63	341.91	341.61	341.69
3	+ 226.57	226.49	226.50	227.00	226.88
4	+ 169.02	169.18	169.10	169.27	169.34
5	+ 111.06	111.51	111.32	111.66	111.23
6	— 147.12	146.87	147.20	147.17	147.18
7	— 348.55	349.21	348.84	348.86	348.82
8	— 752.68	752.46	752.18	752.95	752.80

C. Schraube rechts.

Faden	98 Aug. 22	99 Jan. 26	99 Febr. 6
1	+ 399".41	399".01	399".85
2	+ 341.78	341.89	341.56
3	+ 226.60	226.65	226.85
4	+ 169.05	169.50	169.30
5	+ 111.50	111.37	111.19
6	— 146.82	147.15	147.52
7	— 348.88	348.97	349.06
8	— 752.51	752.31	752.20

D. Schraube links.

Faden	98 Aug. 22	99 Jan. 26	99 Febr. 6
1	+ 399".67	399".30	399".59
2	+ 341.78	341.82	341.97
3	+ 226.57	226.80	226.69
4	+ 169.17	169.36	169.20
5	+ 111.37	111.43	111.12
6	— 147.01	146.80	147.30
7	— 349.12	349.35	349.01
8	— 752.23	752.53	752.30

Bildet man nun für *A*, *B*, *C*, *D* die Mittelwerte, so erhält man die folgenden Wertsysteme, neben welche die zugehörigen Distanzen in Schraubenrevolutionen gesetzt sind.

1897 Dezember — 1898 Juli

Faden	*A*	*B*	I
1	+ 399".42	399".59	+ 11.9307
2	+ 341.83	341.77	+ 10.2079
2	+ 226.68	266.69	+ 6.7732
4	+ 169.20	169.16	+ 5.0549
5	+ 111.37	111.36	+ 3.3230

Faden	*A*	*B*	I
6	− 147″.12	147″.11	− 4.3941
7	− 349.03	348.86	− 10.4266
8	− 752.34	752.61	− 22.4692

1898 August — 1899 Juli

Faden	*C*	*D*	$\frac{1}{2}$(II + III)
1	+ 399″.33	399″.51	+ 11.9284
2	+ 341.75	341.85	+ 10.2083
3	+ 226.71	226.68	+ 6.7736
4	+ 169.29	169.23	+ 5.0553
5	+ 111.36	111.30	+ 3.3234
6	− 147.15	147.05	− 4.3937
7	− 348.96	349.17	− 10.4262
8	− 752.33	752.37	− 22.4688

Bildet man nun für alle Wertsysteme *A*, *B* usw. die Summen der Abszissen ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

A	2497″.00	2497″.07	74.5796 Rev.
B	2497.15		
C	2496.88	2497.02	74.5777 Rev.
D	2497.16		

dann erhält man für 1 Rev. die beiden Werte

33″.4820 und 33″.4822.

Die zugehörigen Gewichte sind 5 und 3. Also ist der definitive Schraubenwert

33″.4821.

Stellt man mit dieser Zahl die Mittel *A*, *B*, *C*, *D* dar, so bleiben folgende Widersprüche im Sinne Beobachtung minus Rechnung übrig

Faden	*A*	*B*	*C*	*D*
1	− 0″.05	+ 0″.12	− 0″.07	+ 0″.13
2	+ 0.05	− 0.01	− 0.06	+ 0.06
3	− 0.10	− 0.09	− 0.09	− 0.10
4	− 0.05	− 0.09	+ 0.02	− 0.02
5	+ 0.12	+ 0.10	+ 0.08	+ 0.04
6	0.00	+ 0.01	− 0.05	+ 0.07
7	+ 0.07	+ 0.24	+ 0.12	− 0.07
8	− 0.02	− 0.29	− 0.04	− 0.06

Aus der Übereinstimmung der einzelnen Abendwerte folgen für die beiden oben angeführten Summen als mittlere Fehler

$\frac{1}{2}(A+B)$	2497″.07	m. F. ± 0″.15
$\frac{1}{2}(C+D)$	2497.02	m. F. ± 0.20

sodaß wir für den Schraubenwert 33″.4821 den mittleren Fehler ± 0″.0016 erhalten. Diese Unsicherheit kommt in der größten Fadendistanz 1—8 mit dem Betrage von ± 00″.6 zum Ausdruck.

Der definitive Schraubenwert gilt im Mittel für die Temperatur + 5°.7. Der Versuch, seine Abhängigkeit von der Temperatur zu konstatieren, führte zu keinem Resultat, was nicht Wunder nehmen kann, wenn man sich überlegt, von welcher Größe er nur sein kann. Die Mikrometerschraube besteht aus Stahl, das Rohr in $\frac{12}{13}$ seiner Länge ebenfalls aus Stahl und Gußeisen. Nur ein Dreizehntel des Rohres, der Okularteil, ist aus Rotguß. Der zu erwartende Temperaturkoeffizient könnte also nur 1 : 13 des Koeffizienten betragen, der für das System Schraube — Fadenplatte gefunden wurde, also 0.000 000 57. Für Temperaturänderungen von 20° würde die Änderung 0.000 011 betragen, was in der größten Fadendistanz 1—8 = 1152″ nur 0″.013 ausmachen würde. Die Temperaturkoeffizienten der Metallsorten können allerdings nicht unbedeutend schwanken, aber jedenfalls nicht so bedeutend, daß durch Beobachtungen der Temperaturkoeffizient unseres Schraubenwertes konstatiert werden könnte. Ein solcher Koeffizient, der etwa ermittelt würde, kann nach dem Gesagten nicht reell sein.

Nach der Zusammenstellung VI würde folgen für

Schraube	oben	1 Rev. = 33″.4812
„	unten	.4831
„	rechts	.4814
„	links	.4821

Diese Unterschiede sind aber für die Berechnung der Beobachtungen belanglos, weil mit der Schraube nur Strecken von höchstens 2 bis 3 Revolutionen gemessen werden, die Fadendistanzen aber in den 4 oder später 2 verschiedenen Lagen mit der Schraube ausgemessen wurden, weshalb auch ihre Berechnung in Bogenmaß mit dem Werte 33″.4821 erfolgen mußte.

Für die erste Beobachtungsperiode 1892 bis 1897 war der

Schraubenwert $33''.4853 \pm 0''.0017$ abgeleitet worden. Da nun damals die Schraube dem Objektive um 0.35 mm oder rund 1 : 10000 der Brennweite näher war, so muß man $0''.0033$ von obigem Werte abziehen, um ihn mit dem späteren vergleichbar zu machen. Wir finden also

1892 bis 1897 1 Rev. $= 33''.4820 \pm 0''.0017$
1897 bis — $= 33.4821 \pm 0.0016$

demnach eine völlige Übereinstimmung.

Alle Fadendistanzen des beweglichen Netzes, von denen bisher die Rede war, beziehen sich auf die Mitte der Fäden, dort, wo sie von den 3 Rektaszensionsfäden gekreuzt werden. Die beweglichen Fäden werden unter sich nahezu parallel sein, die Abweichungen von diesem Parallelismus lassen sich bequem aus Koinzidenzen mit *A* ermitteln, wenn man dieselben nicht in der Mitte der Fäden, sondern in größerem Abstande davon beobachtet. Die Rektaszensionsfäden wurden mit *X*, *Y*, *Z* bezeichnet, wo *X* auf der Seite der Schraube liegt. Auf dem Okularschieber ist ein Index, auf seiner Führung eine Millimeterskala angebracht. Der Okularschieber läßt sich nun parallel zur Schraube, aber auch senkrecht zu ihr verstellen. In letzterer Stellung verschiebt man ihn nun um je 10 mm nach beiden Seiten von *Y* und beobachtet in der Mitte des Gesichtsfeldes Koinzidenzen mit *A*. Diese beiden Stellen des Gesichtsfeldes wurden mit (*X*) und (*Z*) bezeichnet. Es ist leicht ersichtlich, wie man auf diese Weise die Positionswinkel der beweglichen Fäden gegen *A* erhält.

Solche Messungen wurden ausgeführt 1897 Okt. 6, 1898 Febr. 18 und 1902 Nov. 26, nachdem das Mikrometer und auch die Fäden vorsichtig gereinigt worden waren.

Positionswinkel der bew. Fäden gegen *A*.

Faden	1897 Okt. 6	1898 Febr. 18	1902 Nov. 26
1	$-0^{0}.027$	$-0^{0}.025$	$-0^{0}.005$
2	−0.025	−0.023	−0.005
3	−0.013	−0.012	+0.008
4	−0.014	−0.012	+0.006
5	−0.018	−0.012	+0.003
6	−0.009	−0.007	+0.010
7	−0.007	−0.007	+0.012
8	+0.008	+0.009	+0.029

Die Winkel der 8 Fäden unter sich haben sich nicht geändert, wohl aber die Richtung von Faden *A*. Dies ist aus der folgenden Tabelle zu sehen, welche die Positionswinkel gegen den Faden 6 enthält, der bei den Beobachtungen zur Orientierung des Mikrometers dient.

Positionswinkel der bew. Fäden gegen 6.

Faden	1897 Okt. 6	1898 Febr. 18	1902 Nov. 26.
1	$-0^{0}.018$	$-0^{0}.018$	$-0^{0}.015$
2	−0.016	−0.016	−0.015
3	−0.004	−0.005	−0.002
4	−0.005	−0.005	−0.004
5	−0.009	−0.005	−0.007
7	+0.002	0.000	+0.002
8	+0.017	+0.016	+0.019

Der Positionswinkel von Faden 6 gegen *A* wurde öfter bestimmt, wobei folgende Werte erhalten wurden:

Positionswinkel von 6 gegen *A*.

1897	Okt. 6	$-0^{0}.009$
1898	Febr. 18	−0.007
	Nov. 5	−0.010
1900	Febr. 25	−0.013
	Sept. 8	−0.014
1901	Nov. 2	−0.012
1903	Mai 28	+0.010

A hat also seine Lage auch im Jahre 1899 geändert. Solche kleine Änderungen wurden aber dadurch teilweise unschädlich gemacht, daß Rechnungen mit dieser Größe erst dann ausgeführt wurden, wenn eine Neubestimmung vorhanden war.

Der Positionswinkel von *X*, *Y*, *Z* gegen *A* wurde früher mit Hilfe eines fernen Objektes bestimmt, indem mit diesen Fäden Positionswinkel von 2 Ornamenten an dem 1050 m entfernten Kirchturm von Thonberg gemessen wurden. Solche Messungen waren aber nur bei ganz bestimmtem Wetter auszuführen. Nach Aufstellung der Mire wurden Positionswinkel zweier 19′ voneinander abstehender künstlicher Sterne mit den Fäden *A* und *X*, *Y*, *Z* beobachtet. Man erhielt auf diese Weise

Positionswinkel von *X*, *Y*, *Z* gegen *A*.

		X	*Y*	*Z*	Mittel
1898	Febr. 25	90°.052	90°.057	90°.056	90°.055
	Nov. 5	.042	.044	.045	90.044
1900	Febr. 25	.042	.039	.027	90.036
	Nov. 22	.022	.029	.027	90.026
1901	Nov. 2	.030	.025	.030	90.028
1903	Mai 28	.069	.044	.030	00.048

Die letzten Zahlen von 1903 Mai 28 zeigen, daß der früher vorhandene Parallelismus von *X*, *Y*, *Z* seit der Reinigung 1902 Nov. nicht mehr besteht. Daß die beweglichen Fäden in ihren Abständen und Richtungen so unveränderlich sind im Gegensatz zu den sogenannten festen Fäden, hat seinen Grund darin, — siehe AMBRONN, Fig. 541 — daß die ersteren in der ganzen Länge der Rinne, in welcher sie lagern, festgekittet sind, während die letzteren frei in der in Silber gezogenen Furche liegen und nur an ihren Enden an den Böschungen des Sockels festgeklebt sind. Wären die Furchen scharf genug gerissen, dann wäre die Lagerung der 0.01 mm starken Fäden absolut sicher, so aber können die Fäden darin etwas hin- und hergeschoben werden, was leicht eintritt, wenn sich hin und wieder eine Faser im Fadennetz verfängt. Bei den früheren Netzen waren auch die beweglichen Fäden nur an den Enden festgemacht, weshalb dieselben auch früher öfter Lagenveränderungen erlitten. Bei den festen Fäden ist dieselbe Art der Befestigung nicht möglich, weil sonst das bewegliche Netz auf dem Schellack schleifen würde.

Wir besitzen nunmehr die Kenntnis sämtlicher Winkel, die zur Reduktion nötig sind. Von Interesse ist aber noch der Winkel, den die Meßfäden mit der Schraube oder strenger mit dem Führungszylinder machen. 1897 Okt. 7 wurde mit dem Mikroskop der Teilmaschine der Abstand eines Staubkornes auf Faden 6 von *Y* gemessen bei verschiedenen Ablesungen der Mikrometertrommel. Es ergab sich daraus, daß der Positionswinkel des Zylinders gegen *Y* — 0°.074 war, folglich gegen *A* 89°.975 und gegen 6 89°.984, daß also die beweglichen Fäden bis auf 1′ bis 2′ senkrecht zur Bewegungsrichtung sind. Daß die Bewegung geradlinig erfolgt, wurde 1892 mit Hilfe der Teilmaschine konstatiert, wie es ja auch bei Zylinderführung erwartet werden kann.

Sämtliche Instrumentalkonstanten sind jetzt bekannt, wir können daher nunmehr zur Besprechung der Beobachtungen und ihrer Reduktion übergehen. Aus der Beschreibung des beweglichen Fadennetzes geht hervor, wie außerordentlich bequem und genau sich infolge dieser Anordnung die Messung einer Distanz gestaltet. Im allgemeinen wurden Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen beobachtet, jeder Durchgang lieferte 3 Vergleichungen in α und eine in δ. Grundsätzlich wurde nur bei „Schraube oben" beobachtet, nicht weil das Mikrometer in dieser Lage genauer mäße — im Vergleich zu den Beobachtungsfehlern mißt es absolut genau —, sondern um das Behauchen der Trommel zu verhüten. Ferner wurde grundsätzlich an jedem Beobachtungsabende die Neigung des Fadennetzes gegen den scheinbaren Parallel durch Messung bestimmt. Zu diesem Zwecke wurde möglichst in dem Stundenwinkel und der Deklination der eigentlichen Beobachtung bei ruhendem Fernrohr mit Faden 6 auf einen durchlaufenden Stern eingestellt, und zwar an den schon erwähnten Stellen des Gesichtsfeldes (X) und (Z). Man erhält so mit einfacher Rechnung den Positionswinkel von Faden 6 gegen den scheinbaren Parallel, und da alle Winkel des Fadennetzes bekannt sind, die Lage jedes einzelnen Fadens gegen den scheinbaren Parallel.

An dieser Stelle ist nun sogleich zu erwähnen, in welcher Weise die Beobachtungen von dem Einflusse der Refraktion befreit werden.

Auf Veranlassung von Herrn Prof. BRUNS wurden alle Größen, deren man bedarf, für die Polhöhe von Leipzig tabuliert und zwar, wo nötig, mit doppeltem Argument und in hinreichend kleinen Intervallen. Die Wirkung der Refraktion auf die Distanz zweier Sterne äußert sich in der Weise, daß die Distanz verkürzt und gedreht wird. Die Beobachtung einer Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz ist nun nichts anderes als eine Richtungsbestimmung und Distanzmessung von 2 Objekten, deren Positionswinkel Null ist. Die Deklinationsdifferenz wird also von Refraktion befreit, indem man eine leicht zu tabulierende Korrektion anbringt, die die Verbesserung einer Distanz im Positionswinkel 0^0 ist. Es ist nun klar, daß die Rektaszensionsdifferenz keiner Verbesserung bedarf, wenn der Faden, der zur Bestimmung dient, mit dem scheinbaren Stundenkreis zusammenfällt. Kennt man also den Winkel, den die genannten beiden Richtungen einschließen, dann

läßt sich sofort in einfachster Weise aus diesem Winkel in Verbindung mit der bekannten Deklinationsdifferenz die gesuchte Verbesserung ausrechnen.

Die erwähnten Refraktionstafeln enthalten nun den Positionswinkel des scheinbaren Parallels. Mit Hilfe der bekannten Winkel des Netzes und der schon besprochenen Orientierungsbeobachtung, läßt sich also ohne weiteres der Positionswinkel der Rektaszensionsfäden angeben. Da nun die Tafeln noch den Positionswinkel des scheinbaren Stundenkreises liefern, so ist der gesuchte Winkel gegeben. Zur Erleichterung der Rechnung ist nun noch die Verbesserung der Rektaszensionsdifferenz tabuliert unter der Annahme, daß der in Frage kommende Winkel 1^0 und die Deklinationsdifferenz $1000''$ wäre. Die tabulierten Größen gelten für mittlere Refraktion, sie sind durch Multiplikation mit dem bekannten Faktor zu verbessern.

Zur Beobachtung diente im allgemeinen eine 180-fache Vergrößerung; Kometen wurden meist mit 130-facher Vergrößerung beobachtet. Die anderen Okulare wurden selten benutzt. Als Beweis für die Schärfe der Bilder, welche das Objektiv liefert, wenn man von dem bunten Strahlenkranze heller Objekte absieht, soll hier erwähnt werden, daß einmal — 1903 Sept. 3 — mit ungefähr 1900-facher Vergrößerung beobachtet wurde. Bei der weiter unten zu erwähnenden Untersuchung der Uhrschraube, wurde am hellen Tage ein Stern 1. Größe bei bewegtem Fernrohr eingestellt. Da der Luftzustand sehr gut war, wurde versuchsweise das Okular mit dem Okularmikroskop vertauscht. Die Sternscheibe hatte das Aussehen einer Erbse, war aber völlig kreisrund und scharf und sehr bequem und sicher einzustellen.

Über die Messung von Positionswinkel und Distanz bei kleinem Abstande der beiden Objekte ist nichts besonderes zu erwähnen. Solche Beobachtungen wurden in der üblichen Weise angestellt.

Mit einem Fadenmikrometer größere Distanzen zu messen ist bisher wohl selten versucht worden, weil man nicht gleichzeitig beide Objekte beobachten kann, und weil man der genauen Nachführung des Rohres durch das Triebwerk wohl meist mit Recht mißtraute.

Im IX. Kapitel unserer Abhandlung wird nun eine Beobachtungsreihe behandelt werden, bei der Distanzen bis zu $18'$ regelrecht mit dem Fadenmikrometer gemessen wurden. Es war

nämlich wünschenswert Mösting A an möglichst viele Punkte des Mondrandes anzuschließen, und da das Triebwerk des Refraktors sich als ganz vorzüglich bewährt hatte, wurde ein derartiger Versuch gewagt. Es ist klar, daß man bei solchen Messungen die Uhrschraube und das Triebwerk dem Mikrometer gleichstellt. Daß dies ein gewagtes Unternehmen ist, geht aus einer Vergleichung der beiden Apparate hervor. Die Mikrometerschraube bewegt nur kleine Massen, der Winkelwert ihrer Bewegung ist sehr klein. Die Uhrschraube bewegt ganz bedeutende Massen, wirkt an einem kurzen Radius und greift in ungünstiger Weise in das Gewinde des Uhrkreises ein. Daß trotzdem der Versuch zu guten Resultaten geführt hat, ist ein Beweis für die vorzügliche mechanische Ausführung der REPSOLDschen Triebwerke; andererseits würde aber eine so exakte Nachführung nicht möglich sein, wenn nicht die bedeutenden bewegten Massen als Schwungrad wirkten und kleine Fehler ausglichen.

Schon in früheren Jahren war vermittelst eines automatischen Kontaktes an einem der schnell bewegten Räder des Uhrwerkes die Konstanz des Ganges und des ziemlich vollkommenen Isochronismus des Federpendels nachgewiesen worden. Nunmehr galt es nachzuweisen, ob der andere Teil des Triebwerkes, die Übersetzung, Uhrschraube und das Muttergewinde des Uhrkreises strengeren Ansprüchen genügte.

Die Übertragung der Bewegung vom Uhrwerk nach der Schraube wird durch einen langen Schlüssel bewirkt, der in zwei Sekunden eine Umdrehung ausführt. Durch konische Räder überträgt sich diese Bewegung auf eine Schraube ohne Ende, welche in das Muttergewinde eines Schneckenrades eingreift, welches auf der eigentlichen Uhrschraube sitzt. Die letztere vollendet einen Umgang in 72 Sekunden, demnach hat der Uhrkreis 1200 Zähne. An dem Schneckenrade der Uhrschraube wurde ein Zeiger aus Papier und auf einem gegenüberstehenden Lagerstück eine ebensolche Marke aufgekittet, um den Nullpunkt der Schraube zu fixieren. Notiert oder registriert man nun die Zeit des Durchganges durch diese Nullstellung und ebenso den Moment der Einstellung mit dem Mikrometerfaden, so kennt man die Stellung der Uhrschraube im Momente der Beobachtung. Sind andererseits die periodischen Fehler der Uhrschraube bekannt, so läßt sich die Verbesserung berechnen, welche an die Ablesung der Meßschraube anzubringen ist.

Die periodischen Fehler wurden nun in der folgenden Weise ermittelt. Die Mikrometerschraube wurde parallel zur täglichen Bewegung der Gestirne gestellt, und zwar „Schraube rechts". Das Trommelende hat dann den Positionswinkel 90°, und die Einstellungen auf einen durchlaufenden Stern nehmen ab. Läßt man nun das Triebwerk wirken, so werden Einstellungen auf einen Stern eine konstante Ablesung der Trommel ergeben, wenn das Triebwerk fehlerfrei ist, läuft das Werk zu rasch, so nehmen die Zahlen zu. In dieser Weise wurden nun 1903 Mai 14, Sept. 1 und Sept. 3 bei Tageslicht in möglichst rascher Aufeinanderfolge Einstellungen auf Sterne 1. Größe in der Nähe des Meridians und des Äquators ausgeführt; die Momente wurden ebenso wie die Nullpunktspassagen der Schraube registriert. Zunächst wurde aus den Ablesungen der Meßschraube der Gang des Triebwerkes ermittelt und dieser Gang in Rechnung gebracht. Die so reduzierten Zahlen wurden dann nach den zugehörigen Ablesungen der Uhrschraube geordnet. Da zeigte sich nun, wenn man sich die Umdrehung derselben in 72 Teile geteilt denkt, daß die Ablesungen von 0 bis 30 und von 60 bis 72 nahezu konstant waren, während von 30 bis 44 eine Zunahme von 0.040 Rev. = 1″.34 und von 47 bis 60 eine ebensorasche Abnahme erfolgte. Diese Untersuchung wurde an verschiedenen Stellen des Uhrkreises wiederholt und dabei überall dasselbe Resultat gefunden. An den genannten 3 Tagen wurden 94, 89 und 67 Einstellungen ausgeführt, welche geeignet gemittelt die Zahlen der folgenden Tabelle lieferten, die so gebildet sind, daß die Summe der Fehler von 0 bis 30 und 60 bis 72 Null ist; hierbei ist unter P die in Zeitsekunden ausgedrückte Phase der Uhrschraube, unter A die Ablesung der Mikrometertrommel angesetzt.

Periodische Fehler der Uhrschraube.

P	A	P	A	P	A
2ˢ	0.000	26	− 0.003	50	+ 0.026
5	+ 0.002	29	+ 0.004	53	+ 0.022
8	+ 0.007	32	+ 0.009	56	+ 0.009
11	− 0.002	35	+ 0.017	59	+ 0.003
14	0.000	38	+ 0.037	62	+ 0.003
17	− 0.007	41	+ 0.033	65	− 0.001
20	0.000	44	+ 0.040	68	− 0.006
23	+ 0.004	47	+ 0.040	71	+ 0.006

Die Fehler sind auf den Äquator reduziert. Bezüglich ihrer Sicherheit ist anzuführen, daß die einzelnen beobachteten Zahlen von den obigen Mitteln ganz selten mehr als 0.01 Rev. = 0".3 abweichen, eine Tatsache, die an sich schon beweist, daß das Triebwerk des Leipziger Refraktors zweifelsohne gestattet größere Distanzen zu messen, wenn man die Fehler der Uhrschraube in Rechnung zieht. Bezeichnet man die Fehler der obigen Tabelle mit Δ, und befindet sich das Trommelende der Mikrometerschraube im Positionswinkel π, dann ist die Korrektion, welche man an die Ablesung anzubringen hat

$$-\Delta \cos \delta \sin \pi,$$

wo δ die Deklination bezeichnet.

Die erreichte Genauigkeit läßt den Schluß zu, daß man in geeigneten Fällen durch solche Distanzmessungen bessere Resultate erzielt als durch Rektaszensionsbeobachtungen mit Fadenantritten. Das Uhrwerk ersetzt gewissermaßen das unpersönliche REPSOLDsche Mikrometer, nur daß die Beobachtung mit Uhrwerk ungleich bequemer ist.

Die Untersuchungen ließen deutlich erkennen, daß es empfehlenswert sei, Fernrohr mit Uhrwerk etwa eine Viertelstunde vor Beginn der eigentlichen Beobachtung laufen zu lassen, da der Gang anfangs noch etwas veränderlich ist. Wie man den Gang des Triebwerkes durch die Anordnung der Beobachtung eliminieren und bestimmen kann, wird im IX. Kapitel ausführlich besprochen werden.

Zum Schlusse dieses Kapitels mögen nun noch einige Mitteilungen Platz finden über die bisherigen Arbeiten, zu denen der Leipziger Refraktor gedient hat.

Nach Beendigung der Revisionszonen am Meridiankreise von PISTOR und MARTINS wurde dem Verfasser der Refraktor zugewiesen mit dem Auftrage

1. Ortsbestimmungen einzelner Sterne der Leipziger Zonen vorzunehmen, die aus verschiedenen Gründen wünschenswert waren,

2. Messungen von Doppelsternen auszuführen, welche den Leipziger Zonen angehörten,

3. allerlei Nachforschungen anzustellen über Größe, Farbe, Begleiter usw.

Diese Arbeit begann 1892 Okt. 24. In der Zeit von 1894 Okt. bis 1896 Okt., während welcher ich beurlaubt war, um im Dienste des Kaiserlichen Reichsmarineamtes astronomische Ortsbestimmungen im deutschen Schutzgebiete der Südsee auszuführen, hat Herr Dr. J. HARTMANN diese Arbeit fortgesetzt und nahezu zum Abschluß gebracht. Es wurden im ganzen in der Zeit von 1892 Okt. 24 bis 1897 August 17 erhalten

	von HAYN	von HARTMANN
Anschlüsse in α und δ	705	448
Doppelsternmessungen	178	115
sonstige Aufklärungen	311	151

in Summa also 1153 vollständige Ortsbestimmungen, 293 Doppelsternmessungen und in 462 Fällen Aufklärungen und Richtigstellungen mancherlei Art. Die Resultate dieser Beobachtungen sind in den beiden Zonenbänden des A. G. C. I, 12 und I, 13 enthalten.

Gelegentliche Beobachtungen, Sternbedeckungen, Ortsbestimmungen von Kometen, dem Planeten Eros etc. sind in den Astron. Nachrichten veröffentlicht worden.

II. Kapitel.

Das Netz der ausgewählten 5 selenographischen Punkte erster Ordnung besteht aus den Objekten: Mösting A, Messier A, Kepler A, Egede A, Tycho Zentralberg. Ein Grund, warum außer Mösting A gerade diese 4 Punkte gewählt wurden, war zunächst die gute Definition dieser Objekte, sodann aber der Umstand, daß Messier A und Kepler A vorzüglich geeignet sind, um frei von systematischen Fehlern die Neigung der Mondachse zu bestimmen und ebenso zur Orientierung von photographischen Mondaufnahmen zu dienen. Da nämlich die Krater Messier A, Mösting A, Kepler A so gelegen sind, daß in allen Beleuchtungsphasen die Symmetrieachse ihrer Figur mit dem Parallel nahe zusammenfällt, so werden Deklinationseinstellungen dieser Punkte im wesentlichen frei sein von systematischen, durch verschiedenartige Beleuchtung hervorgerufenen Fehlern. Nachdem so 3 Punkte in der Nähe des Mondäquators gewählt waren, mußten notwendig die beiden anderen in der Nähe der Pole ausgesucht werden. Im Norden war die Wahl nicht

schwer, da Egede A ein sehr scharf definiertes Objekt ist, im Süden dagegen gibt es überhaupt keinen Punkt, der unter allen Beleuchtungsverhältnissen gut zu beobachten ist. Am besten geeignet schien immerhin noch die Spitze des Zentralberges von Tycho zu sein, obschon dieser Punkt 2 Tage vor bis 2 Tage nach Vollmond nicht beobachtet werden kann. Gegenstand der Einstellung war, wie schon gesagt, bei Tycho die Spitze des Zentralberges, bei den 4 anderen Objekten der Schwerpunkt ihrer Figur. Im Plane der Beobachtung lag es nun durch Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen Mösting A mit den 4 anderen Punkten mikrometrisch zu verbinden, ebenso Mösting A mit dem I., II., nördlichen und südlichen Rande des Mondes, und zwar alles dies bei möglichster Variierung zweier wesentlicher Verhältnisse, nämlich des Mondalters und der optischen Libration. Da zu den Beobachtungen naturgemäß nur die Tage vom ersten bis letzten Viertel zur Verfügung standen, und von den auf diese Zeit fallenden klaren Nächten die passenden auszuwählen waren, so ist es erklärlich, daß die Erfüllung des vorgesetzten Beobachtungsplanes nur eine unvollkommene geworden ist.

Es wurden in der Zeit von 1898 März 3 bis 1900 Okt. 8 mikrometrische Anschlüsse erhalten

zwischen	Mösting A	und	I. Rand	an	37 Abenden
	„	„	II. „	„	24 „
	„	„	nördl. „	„	34 „
	„	„	südl. „	„	18 „
	„	„	Messier A	„	25 „
	„	„	Kepler A	„	25 „
	„	„	Egede A	„	24 „
	„	„	Tycho	„	22 „

In eben diesem Zeitraume wurde auch die Beobachtung der 15 Punkte zweiter Ordnung erledigt, die Gegenstand einer späteren dritten Abhandlung sein werden.

Die Beobachtungen eines Abends gestalteten sich nun durchschnittlich folgendermaßen: Zunächst wurden zwischen I. oder II. Rand und Mösting A 4 Durchgänge an je 3 Fäden beobachtet, sodann 4 Deklinationsdifferenzen zwischen dem Krater und dem Rande genommen. Sodann folgte eine Anzahl mikrometrischer Verbindungen zwischen Punkten erster Ordnung oder erster und

zweiter Ordnung; den Schluß bildete wieder eine Beobachtung von Mösting A und Rand wie zu Anfang. Es ist im allgemeinen daran festgehalten worden, daß eine vollständige Beobachtung aus 4 Differenzen in δ und 4 Durchgängen d. h. 12 Vergleichungen in α besteht. Das Resultat der an einem Abend erhaltenen Beobachtungen von Mösting A und Rand beruht also durchschnittlich auf 24 Vergleichungen in α und 8 Vergleichungen in δ. Über die Reduktion der Beobachtungen ist schon im I. Kapitel im allgemeinen gesprochen worden. Hier ist noch einiges hinzuzufügen.

Infolge der Bewegung des Mondes war es natürlich notwendig auch die Momente der δ-Einstellung zu registrieren. Die Befreiung der beobachteten Größen vom Einflusse der Bewegung geschah in der Weise, daß in Gestalt einer Ephemeride der scheinbare (mit Parallaxe behaftete) Ort des Mondes von 10^m zu 10^m mitteleuropäischer Zeit fortschreitend berechnet wurde, und mit den so erhaltenen Bewegungen in α und δ diese Reduktion ausgeführt wurde. Bei den Anschlüssen von Egede A und Tycho an Mösting A erlaubte es manchmal die Kleinheit der α-Differenz nicht gleichzeitig α und δ zu beobachten, oder es mußte zur Beobachtung der δ-Differenz das Uhrwerk zu Hilfe genommen werden. In jedem Falle wurde aber dann die Reihenfolge der einzelnen Beobachtungen so angeordnet, daß die Vorbedingung für die früher geschilderte Berücksichtigung der Refraktion — gleicher Stundenwinkel der δ-Einstellungen beider Objekte — erreicht wurde. Die Beobachtungen in δ geschahen nun fast nie in der Weise, daß mit der Schraube das Objekt eingestellt wurde, sondern der Faden wurde mit der Schraube so gestellt, daß der betreffende Punkt infolge der Bewegung des Mondes in δ auf den Faden lief. Natürlich war es hierdurch nicht immer möglich die δ-Einstellung in unmittelbarer Nähe der α-Fäden vorzunehmen, wodurch die Notwendigkeit eintrat noch eine Verbesserung der δ-Differenzen wegen Neigung des Fadennetzes vorzunehmen. Da die Neigung des Netzes stets bekannt war und die Momente der δ-Einstellung fixiert waren, war alles zu dieser Reduktion Notwendige gegeben. Näher hierauf einzugehen ist wohl nicht nötig.

Erwähnt mag hierbei nur noch werden, daß diese Art der Beobachtung in δ wesentlich genauer ist als die Einstellung mit der Schraube.

Die Frage ist nun: Wie lassen sich aus den so gewonnenen Verbindungen der verschiedenen Punkte ihre selenographischen Längen und Breiten und die Rotationselemente des Mondes herleiten? Der Weg ist kurz gefaßt der: Man nimmt für die einzelnen Unbekannten möglichst genäherte Werte an, berechnet damit die Größen, welche man beobachtet hat, und sodann aus den Widersprüchen zwischen Beobachtung und Rechnung mit Hilfe von Differentialformeln die Verbesserungen der einzelnen Elemente.

Faßt man die vorliegende Aufgabe ganz allgemein auf, so haben wir — vorläufig vom Mondrand abgesehen — ein starres System von 5 Punkten, das mit einem 6. Punkte, dem Schwerpunkte des Mondkörpers, und einer durch diesen Punkt gehenden Achse fest verbunden ist, so lange man von den Bewegungen der Achse im Mondkörper absieht. Die Bahn des Schwerpunktes ist bekannt, ebenso wissen wir, daß die Rotation nach den CASSINISchen Gesetzen stattfindet. Nehmen wir nun zunächst an, daß die CASSINIschen Gesetze in aller Strenge erfüllt würden, dann sind aus den Beobachtungen folgende Unbekannte zu bestimmen: Die Neigung der Achse gegen die Ekliptik und für jeden der 5 Hauptpunkte 3 Koordinaten, nämlich je der Abstand vom Schwerpunkt, der Winkel, den diese Linie mit der Ebene des Äquators bildet, und der Winkel zwischen dem betreffenden und dem ersten Meridian. Theoretisch ist die Lösung dieses Problems durchaus möglich, praktisch aber kommt beim Monde als hinderlich der Umstand hinzu, daß man Punkte, die nahe genug am Rande liegen, nicht beobachten kann. Denn Punkte, die den Polen sehr nahe liegen, und ebenso Äquatorpunkte, die von Mösting A etwa 80° in Länge entfernt sind, lassen sich wegen der perspektivischen Verkürzung und der dadurch bedingten schlechten Definition nicht mehr mit Erfolg beobachten. Nur bei solcher Lage der 4 randnahen Objekte würde aber eine sichere Bestimmung der einzelnen Elemente aus den Bedingungsgleichungen möglich sein. Um diese Lücke nun auszufüllen, wurde Mösting A direkt an 4 Stellen des Randes angeschlossen. In der Rechnung zur Darstellung der Beobachtungen wird ferner in erster Näherung angenommen, daß die 5 Punkte und die beobachteten Stellen des Randes auf einer Kugel liegen.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen möge nun die Ableitung der Formeln [illegible] vorliegenden Problem zur Anwendung kom[illegible]tung, Kontrollen usw.

bin ich bestrebt gewesen dafür zu sorgen, daß die folgenden Entwickelungen frei von Fehlern und schädlichen Vernachlässigungen sind.

Die Bezeichnungsweise schließt sich, soweit möglich, der in früheren Arbeiten gebräuchlichen an.

III. Kapitel.

Die Koordinaten eines Punktes der Mondoberfläche beziehen sich auf das System des Mondäquators, die Beobachtungen aber auf den Erdäquator. Es sind also die Beziehungen dieser beiden Koordinatensysteme zueinander aufzustellen. Hierbei soll in den folgenden Entwickelungen vorläufig überall die physische Libration als nicht vorhanden angenommen werden.

Es sei I die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik, i die Neigung des Mondäquators gegen den Erdäquator, ε die Neigung des Erdäquators gegen die Ekliptik, ferner bezeichne P_0 den Nordpol der Ekliptik, P den Nordpol des Erdäquators, P' den Nordpol des Mondäquators, endlich sei Ω' der aufsteigende Knoten des Mondäquators auf dem Erdäquator, Υ der aufsteigende Knoten des Mondäquators auf der Ekliptik, Δ das Stück auf dem Mondäquator von Ω' bis Υ, dann folgt aus dem Dreieck P_0PP'

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\sin\Delta = \sin\Upsilon \sin\varepsilon \operatorname{cosec} i, \quad \sin\Omega' = \sin\Upsilon \sin I \operatorname{cosec} i \\ &\cos i = \cos\varepsilon\cos I - \sin\varepsilon \sin I \cos\Upsilon \end{aligned}$$

Zu bemerken ist hierzu, daß nach den CASSINIschen Gesetzen der aufsteigende Knoten des Mondäquators auf der Ekliptik Υ identisch ist mit dem absteigenden Knoten der Mondbahn auf der Ekliptik.

Weiter werde die selenographische Länge und Breite mit λ und β bezeichnet. Hierbei ist die Länge auf den sogenannten „ersten Meridian“ bezogen, dessen Abstand vom absteigenden Knoten des Mondäquators auf der Ekliptik nach I. Abh. Seite 869 $180^0 + m - \Omega$ ist, wenn man von der physischen Libration absieht. Die Größe m bedeutet darin die mittlere Länge des Mondes. Die Länge des ersten Meridians ist demnach, vom aufsteigenden Knoten gerechnet,

$$180^0 + m - \Upsilon$$

und vom aufsteigenden Knoten des Mondäquators auf dem Erdäquator

$$180^0 + m - \Upsilon + \Delta.$$

Zählt man nun die selenographische Länge von letzterem Punkte Ω' aus und bezeichnet man sie dann mit λ', so ist

$$\lambda' = \lambda + 180^0 + m - \mathfrak{V} + \Delta. \qquad (2)$$

Bezeichnen wir nun ferner den Oberflächenpunkt des Mondes mit O, seine selenozentrische Rektaszension und Deklination mit a und d, dann ergeben sich aus dem Dreieck OPP', dessen einzelne Stücke die Bedeutung

$$\begin{aligned} &\text{Winkel an} && P = 90^0 + a - \Omega' \\ &\quad\text{„} && \quad\text{„} \quad P' = 90^0 - \lambda' \\ &\text{Seite} && P'O = 90^0 - \beta \\ &\quad\text{„} && PO = 90^0 - d \\ &\quad\text{„} && P'P = i \end{aligned}$$

besitzen, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin d &= \sin\beta\cos i + \cos\beta\sin i\sin\lambda' \\ -\cos d\sin(a-\Omega') &= \sin\beta\sin i - \cos\beta\cos i\sin\lambda' \\ \cos d\cos(a-\Omega') &= \cos\beta\cos\lambda' \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

oder umgekehrt

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \sin d\cos i - \cos d\sin i\sin(a-\Omega') \\ \cos\beta\sin\lambda' &= \sin d\sin i + \cos d\cos i\sin(a-\Omega') \\ \cos\beta\cos\lambda' &= \cos d\cos(a-\Omega'). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Der Winkel an O, der später gebraucht wird, soll mit x bezeichnet werden; man findet ihn aus den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \sin i\cos\lambda'\sec d \\ \cos d\cos x &= \cos i\cos\beta - \sin i\sin\beta\sin\lambda'. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Nun ist weiter der Übergang vom Mondzentrum auf den Beobachtungsort auszuführen.

Nennt man α und δ die scheinbare Rektaszension und Deklination des Mondes, s den scheinbaren Abstand des Kraters von der Mitte der Mondscheibe, K den dazu gehörigen selenozentrischen Winkel, ferner sei in dem Dreiecke „Mitte der Mondscheibe, Nordpol des Erdäquators, Krater“ π der Winkel an der Mitte, p der Winkel am Krater, endlich h' der scheinbare Radius des Mondes, dann ist die selenozentrische Rektaszension und Deklination der Mitte der Mondscheibe $\alpha + 180^0$ bezw. $-\delta$. In dem Dreieck „Mitte

der Mondscheibe (M), Nordpol des Erdäquators (P), Krater (O)" sind nun die Seiten $PO = 90^0 - d$, $PM = 90^0 + \delta$ und der Winkel an P ist $\alpha + 180^0 - a$. Hieraus ergeben sich die Beziehungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos K = -\sin d \sin\delta - \cos d \cos\delta \cos(\alpha - a) \\ \sin K \cos\pi = +\sin d \cos\delta - \cos d \sin\delta \cos(\alpha - a) \\ \sin K \sin\pi = -\cos d \sin(\alpha - a) \end{cases}$$

oder umgekehrt:

$$(7)\qquad \begin{cases} \sin d = -\sin\delta \cos K + \cos\delta \sin K \cos\pi \\ -\cos d \cos(\alpha - a) = \cos\delta \cos K + \sin\delta \sin K \cos\pi \\ -\cos d \sin(\alpha - a) = \sin K \sin\pi \end{cases}$$

Den Winkel p, der später gebraucht wird, erhält man aus den Formeln

$$(8)\qquad \begin{cases} \sin p = \sin\pi \cos\delta \sec d, \\ \cos p = \cos(\alpha - a)\cos\pi + \sin(\alpha - a)\sin\pi \sin\delta. \end{cases}$$

In dem ebenen Dreieck „Beobachter, Mondzentrum, Krater" sind die 3 Winkel s, K, $180^0 - (K + s)$. Die Seiten, welche den Winkeln s und $180^0 - (K + s)$ gegenüber liegen, sind der wahre Radius des Mondes an der Stelle des Kraters und die Entfernung des Mondes vom Beobachter. Bezeichnet man vorübergehend letztere beiden Größen mit r und E, so ist

$$\sin s : r = \sin(K + s) : E.$$

Nun ist

$$\sin h' = r : E,$$

demnach

$$\sin s = \sin h' \sin(K + s) = \sin h' \sin K \cos s + \sin h' \cos K \sin s$$

$$(9)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg} s = \sin h' \sin K + \sin h' \cos K \operatorname{tg} s \\ \qquad = \dfrac{\sin h' \sin K}{1 - \sin h' \cos K} \end{cases}$$

Aus der scheinbaren Distanz des Objektes von der Mitte der Mondscheibe s und dem Positionswinkel an letzterem Punkte π lassen sich nun leicht die α- und δ-Differenzen zwischen Krater und Mondzentrum ableiten. Bezeichnet man nämlich

die scheinbare Rektaszension des Objekts mit α_1
„ „ Deklination „ „ „ δ_1
und die Größe $\frac{1}{2}(\delta + \delta_1)$ „ δ_m,

so ist es erlaubt für kleine Werte von s, wie es z. B. bei Mösting A der Fall ist, zu schreiben

$$\alpha_1 - \alpha = s \sin \pi \sec \delta_m, \quad \delta_1 - \delta = s \cos \pi.$$

Bei größerem s, also bei den Randpunkten, muß man für π den Positionswinkel an der Mitte von s einführen, der mit π_m bezeichnet werden soll, da sonst die rechtwinkligen Koordinaten bis zu 0".2 fehlerhaft werden können. Den Winkel π_m findet man genau genug für alle beim Monde vorkommende Werte von s und δ auf folgende Weise. Sind nämlich von 2 Objekten am Himmel gegeben ihre scheinbare Entfernung s, die Positionswinkel an den beiden Punkten π_1 und π_2, ihre Rektaszensionen α_1, α_2, ihre Deklinationen δ_1, δ_2, so hat man nach den GAUSSschen Formeln

$$\cos \tfrac{1}{2}(\pi_1 + 180^0 - \pi_2) \cos \tfrac{1}{2} s = \sin \tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$- \sin \tfrac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2) \cos \tfrac{1}{2} s = \sin \tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Da nun $\pi_1 - \pi_2$, s und $\alpha_1 - \alpha_2$ kleine Winkel sind, kann man schreiben

$$- \tfrac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2) = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \delta_m.$$

Addiert man zu beiden Seiten π_1, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2) = \pi_1 + \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \delta_m. \qquad (10)$$

$\tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$ ist aber der gesuchte Winkel π_m. In unserem Falle haben wir demnach die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \pi_m &= \pi + \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha) \sin \delta_m, \\ \alpha_1 - \alpha = s \sin \pi_m \sec \delta_m, &\quad \delta_1 - \delta = s \cos \pi_m. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

IV. Kapitel.

In allen Formeln bisher ist von der physischen Libration gänzlich abgesehen worden. Auch in den nun folgenden Entwickelungen soll dies geschehen. Wie sie schließlich in Rechnung zu ziehen ist, soll in Kapitel V gezeigt werden. In den vorstehenden Formeln sind als genau bekannt vorauszusetzen die Größen ε, ϑ, m, α, δ. Genäherte Werte sind gegeben für I, λ, β, h'. Es ist nun zu untersuchen, wie sich $\alpha_1 - \alpha$ und $\delta_1 - \delta$ ändern, wenn man I, λ, β, h' um kleine Größen variiert. Wir erhalten durch Differentiation aus den Formeln (1)

$$\sin i \, \mathrm{d}i = (\cos \varepsilon \sin I + \sin \varepsilon \cos I \cos \vartheta) \, \mathrm{d}I.$$

Nun folgt aber aus dem Dreieck P_0PP' (siehe Formeln (1))

$$\sin i \cos \Delta = \cos \varepsilon \sin I + \sin \varepsilon \cos I \cos \vartheta,$$

demnach

$$(12) \qquad di = \cos \Delta \, dI.$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} \cos \Delta \, d\Delta &= -\sin \vartheta \sin \varepsilon \cos i \operatorname{cosec}^2 i \, di \\ &= -\sin \Delta \operatorname{cotg} i \, di, \end{aligned}$$

also

$$(13) \qquad d\Delta = -\sin \Delta \operatorname{cotg} i \, dI.$$

Schließlich finden wir

$$\begin{aligned} \cos \Omega' d\Omega' &= \sin \vartheta \cos I \operatorname{cosec} i \, dI - \sin \vartheta \sin I \cos i \operatorname{cosec}^2 i \, di \\ &= \sin \Omega' \operatorname{cotg} I \, dI - \sin \Omega' \operatorname{cotg} i \, di, \end{aligned}$$

folglich

$$(14) \qquad d\Omega' = (\operatorname{tg} \Omega' \operatorname{cotg} I - \operatorname{tg} \Omega' \operatorname{cotg} i \cos \Delta) dI.$$

Es war

$$\lambda' = \lambda + 180^0 + m - \vartheta + \Delta,$$

demnach

$$d\lambda' = d\lambda + d\Delta$$

$$(15) \qquad d\lambda' = d\lambda - \sin \Delta \operatorname{cotg} i \, dI.$$

Aus der 1. Formel (3) findet man

$$\begin{aligned} \cos d \, dd &= + (\cos \beta \cos i - \sin \beta \sin i \sin \lambda') d\beta \\ &\quad - (\sin \beta \sin i - \cos \beta \cos i \sin \lambda') di \\ &\quad + \cos \beta \sin i \cos \lambda' d\lambda' \\ &= \cos d \cos x d\beta + \cos d \sin (a - \Omega') di + \cos \beta \sin x \cos d \, d\lambda' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (16) \quad dd &= + \cos x d\beta + \sin x \cos \beta \, d\lambda \\ &\quad - \sin x \cos \beta \sin \Delta \operatorname{cotg} i \, dI + \sin (a - \Omega') \cos \Delta \, dI. \end{aligned}$$

Aus den beiden anderen Formeln (3) ergibt sich

$$\operatorname{tg} (a - \Omega') = -\operatorname{tg} \beta \sin i \sec \lambda' + \cos i \operatorname{tg} \lambda'$$

und somit

$$\begin{aligned} \sec^2 (a - \Omega') d(a - \Omega') &= -\sin i \sec \lambda' \sec^2 \beta \, d\beta \\ &\quad - \sin i \sin \lambda' \sec^2 \lambda' \operatorname{tg} \beta \, d\lambda' \\ &\quad + \cos i \sec^2 \lambda' d\lambda' \\ &\quad - \cos i \sec \lambda' \operatorname{tg} \beta \, di \\ &\quad - \sin i \operatorname{tg} \lambda' di. \end{aligned}$$

Nun ist $\cos^2(a - \Omega') = \cos^2\beta \cos^2\lambda' \sec^2 d$. Man erhält hiermit $\mathrm{d}(a - \Omega') = -\sin x \sec d \,\mathrm{d}\beta + \cos x \sec d \cos\beta \,\mathrm{d}\lambda' - \cos(a - \Omega') \operatorname{tg} d \,\mathrm{d}i$ und durch Einsetzen schon früher gefundener Ausdrücke

$$\begin{aligned}\cos d \,\mathrm{d}a = &- \sin x \,\mathrm{d}\beta + \cos x \cos\beta \,\mathrm{d}\lambda \\ &- \cos x \cos\beta \sin \Delta \operatorname{cotg} i \,\mathrm{d}I \\ &- \cos(a - \Omega') \sin d \cos \Delta \,\mathrm{d}I \\ &+ \cos d \,(\operatorname{tg} \Omega' \operatorname{cotg} I - \operatorname{tg} \Omega' \operatorname{cotg} i \cos \Delta)\,\mathrm{d}I.\end{aligned} \tag{17}$$

Aus den Formeln (6) finden wir

$$\cos K = -\sin d \sin\delta - \cos d \cos\delta \cos(\alpha - a)$$

$$\operatorname{cotg}\pi = \operatorname{cotg}(\alpha - a) \sin\delta - \operatorname{tg} d \cos\delta \operatorname{cosec}(\alpha - a)$$

$$\begin{aligned}-\sin K \,\mathrm{d}K = &- (\cos d \sin\delta - \sin d \cos\delta \cos(\alpha - a))\,\mathrm{d}d \\ &- \cos d \cos\delta \sin(\alpha - a)\,\mathrm{d}a.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\sin K \cos p = -\cos d \sin\delta + \sin d \cos\delta \cos(\alpha - a)$$

$$\sin p = \sin\pi \sec d \cos\delta,$$

$$\cos d \sin(\alpha - a) = -\sin\pi \sin K,$$

folglich

$$\begin{aligned}\mathrm{d}K &= -\cos p \,\mathrm{d}d - \sin\pi \cos\delta \,\mathrm{d}a \\ &= -\cos p \,\mathrm{d}d - \sin p \cos d \,\mathrm{d}a\end{aligned} \tag{18}$$

Durch Differentiation von $\operatorname{cotg}\pi$ erhalten wir

$$\begin{aligned}-\operatorname{cosec}^2\pi \,\mathrm{d}\pi = &+ \sin\delta \operatorname{cosec}^2(\alpha - a)\,\mathrm{d}a \\ &- \operatorname{tg} d \cos\delta \cos(\alpha - a) \operatorname{cosec}^2(\alpha - a)\,\mathrm{d}a \\ &- \sec^2 d \cos\delta \operatorname{cosec}(\alpha - a)\,\mathrm{d}d.\end{aligned}$$

Durch Einführung der Beziehungen

$$\sin\pi \sin K = -\cos d \sin(\alpha - a), \quad \sin p \sin K = -\cos\delta \sin(\alpha - a)$$

ergibt sich schließlich der Ausdruck

$$\mathrm{d}\pi = \cos p \operatorname{cosec} K \cos d \,\mathrm{d}a - \sin p \operatorname{cosec} K \,\mathrm{d}d. \tag{19}$$

Aus den Formeln (11) folgt, wenn man wieder π für π_m und δ für δ_m schreibt,

$$\mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha) = \sin\pi \sec\delta \,\mathrm{d}s + \cos\pi \sec\delta \sin s \,\mathrm{d}\pi$$

$$\mathrm{d}(\delta_1 - \delta) = \cos\pi \cos s \,\mathrm{d}s - \sin\pi \sin s \,\mathrm{d}\pi.$$

Durch Differentiation von

$$\sin s = \sin h' \sin (K+s)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s = &+ \sec s \cos h' \sin (K+s)\,\mathrm{d}h' \\ &+ \sec s \sin h' \cos (K+s)\,\mathrm{d}K \\ &+ \sec s \sin h' \cos (K+s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\sec s \cos h' \sin (K+s)}{1 - \sec s \sin h' \cos (K+s)}\,\mathrm{d}h' + \frac{\sec s \sin h' \cos (K+s)}{1 - \sec s \sin h' \cos (K+s)}\,\mathrm{d}K.$$

Aus dem ebenen Dreieck „Beobachter, Mondzentrum, Krater" findet sich

$$1 - \sin h' \sec s \cos (K+s) = \sec s \sin K \operatorname{cosec} (K+s)$$

und somit

$$\mathrm{d}s = \sin^2 (K+s) \operatorname{cosec} K\,\mathrm{d}h' + \sin s \cos (K+s) \operatorname{cosec} K\,\mathrm{d}K$$

und

$$\begin{aligned} (20\mathrm{a}) \quad \mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha) = &+ \sin \pi \sec \delta \sin^2 (K+s) \operatorname{cosec} K\,\mathrm{d}h' \\ &+ \sin \pi \sec \delta \sin s \cos (K+s) \operatorname{cosec} K\,\mathrm{d}K \\ &+ \cos \pi \sec \delta \sin s\,\mathrm{d}\pi \\ (20\mathrm{b}) \quad \mathrm{d}(\delta_1 - \delta) = &+ \cos \pi \sin^2 (K+s) \operatorname{cosec} K\,\mathrm{d}h' \\ &+ \cos \pi \sin s \cos (K+s) \operatorname{cosec} K\,\mathrm{d}K \\ &- \sin \pi \sin s\,\mathrm{d}\pi. \end{aligned}$$

Diese Formeln kann man auch so schreiben

$$\begin{aligned} \cos\delta\,\mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha) = &+ \sin (\alpha_1 - \alpha) \cos \delta \sin (K+s) \operatorname{cosec} h' \operatorname{cosec} K\,\mathrm{d}h' \\ &+ \sin (\alpha_1 - \alpha) \cos \delta \cos (K+s) \operatorname{cosec} K\,\mathrm{d}K \\ &+ \sin (\delta_1 - \delta)\,\mathrm{d}\pi \\ \mathrm{d}(\delta_1 - \delta) = &+ \sin (\delta_1 - \delta) \sin (K+s) \operatorname{cosec} h' \operatorname{cosec} K\,\mathrm{d}h' \\ &+ \sin (\delta_1 - \delta) \cos (K+s) \operatorname{cosec} K\,\mathrm{d}K \\ &- \sin (\alpha_1 - \alpha) \cos \delta\,\mathrm{d}\pi. \end{aligned}$$

Es würde zu weit führen ausführlich die nötigen Substitutionen hier wiederzugeben; es wird genügen folgendes anzuführen. Zunächst sollen die Abkürzungen eingeführt werden:

$$(21) \quad \begin{cases} A_1 = \sin (\alpha_1 - \alpha) \cos \delta \cos (K+s) \operatorname{cosec} K, \\ A_2 = \sin (\delta_1 - \delta) \operatorname{cosec} K, \\ D_1 = \sin (\delta_1 - \delta) \cos (K+s) \operatorname{cosec} K, \\ D_2 = \sin (\alpha_1 - \alpha) \cos \delta \operatorname{cosec} K, \\ G = \sin (\alpha_1 - \alpha) \cos \delta \sin (K+s) \operatorname{cosec} h' \operatorname{cosec} K, \\ H = \sin (\delta_1 - \delta) \sin (K+s) \operatorname{cosec} h' \operatorname{cosec} K. \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\cos\delta\,\mathrm{d}(\alpha_1-\alpha) &= G\mathrm{d}h' - A_1\cos p\,\mathrm{d}d - A_1\sin p\cos d\,\mathrm{d}a\\ &\quad - A_2\sin p\,\mathrm{d}d + A_2\cos p\cos d\,\mathrm{d}a\\ \mathrm{d}(\delta_1-\delta) &= H\mathrm{d}h' - D_1\cos p\,\mathrm{d}d - D_1\sin p\cos d\,\mathrm{d}a\\ &\quad + D_2\sin p\,\mathrm{d}d - D_2\cos p\cos d\,\mathrm{d}a.\end{aligned}$$

Hier ist nun $\mathrm{d}a$ und $\mathrm{d}d$ durch die in Formel (16) und (17) gegebenen Ausdrücke zu ersetzen. Setzt man

$$U = \sin\Delta\cot g\, i, \quad W = \operatorname{tg}\Omega'\cot g\, I - \operatorname{tg}\Omega'\cot g\, i\cos\Delta,$$

dann ist

$$\begin{aligned}\cos d\,\mathrm{d}a &= -\sin x\,\mathrm{d}\beta + \cos x\cos\beta\,\mathrm{d}\lambda - U\cos x\cos\beta\,\mathrm{d}I\\ &\quad + W\cos d\,\mathrm{d}I - \cos(a-\Omega')\sin d\cos\Delta\,\mathrm{d}I\\ \mathrm{d}d &= +\cos x\,\mathrm{d}\beta + \sin x\cos\beta\,\mathrm{d}\lambda - U\sin x\cos\beta\,\mathrm{d}I\\ &\quad + \sin(a-\Omega')\cos\Delta\,\mathrm{d}I.\end{aligned}$$

Durch diese Substitution, geeignetes Zusammenziehen und nach Einführung der beiden Hilfsgrößen

$$\left.\begin{aligned}S &= \cos p\sin(a-\Omega') - \sin p\cos(a-\Omega')\sin d\\ T &= \sin p\sin(a-\Omega') + \cos p\cos(a-\Omega')\sin d\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

erhalten wir schließlich die definitiven Differentialformeln:

$$\cos\delta\,\mathrm{d}(\alpha_1-\alpha) = G\,\mathrm{d}h' \qquad (23a)$$

$$\begin{aligned}&-[A_1\cos\beta\sin(p+x) - A_2\cos\beta\cos(p+x)]d\lambda\\ &-[A_1\cos(p+x) + A_2\sin(p+x)]\mathrm{d}\beta\\ &+[A_1U\cos\beta\sin(p+x) - A_2U\cos\beta\cos(p+x)]\mathrm{d}I\\ &-[A_1W\sin p\cos d - A_2W\cos p\cos d]\mathrm{d}I\\ &-[A_1S\cos\Delta + A_2T\cos\Delta]\mathrm{d}I\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}(\delta_1-\delta) = H\,\mathrm{d}h' \qquad (23b)$$

$$\begin{aligned}&-[D_1\cos\beta\sin(p+x) + D_2\cos\beta\cos(p+x)]\mathrm{d}\lambda\\ &-[D_1\cos(p+x) - D_2\sin(p+x)]\mathrm{d}\beta\\ &+[D_1U\cos\beta\sin(p+x) + D_2U\cos\beta\cos(p+x)]\mathrm{d}I\\ &-[D_1W\sin p\cos d + D_2W\cos p\cos d]\mathrm{d}I\\ &-[D_1S\cos\Delta - D_2T\cos\Delta]\mathrm{d}I.\end{aligned}$$

V. Kapitel.

In allen bisher abgeleiteten Formeln ist vorläufig von Berücksichtigung der physischen Libration Abstand genommen. Es wurde angenommen, daß die Neigung I und die Rotationsgeschwindigkeit konstant seien, und daß der absteigende Knoten des Mondäquators auf der Ekliptik genau mit dem aufsteigenden Knoten der Mondbahn zusammenfalle. Nun ist aber nach Abh. I Seite 869 die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik $\vartheta = I + \varrho$, die Länge des absteigenden Knotens des Mondäquators $\psi = \Omega + \sigma$, und der Winkelabstand des ersten Meridians vom absteigenden Knoten des Mondäquators

$$180^0 + m + \tau - \Omega - \sigma.$$

In die Formeln (1) und (2) müßte demnach eingesetzt werden: $I + \varrho$ für I, $\Omega + \sigma$ für Ω, $m + \tau$ für m. Für die Rechnungen praktischer ist aber ein Verfahren, das FRANZ Astr. Nachr. 3241 angibt, hier aber nochmals etwas ausführlicher entwickelt werden soll, weil die Formeln an jener Stelle nicht ganz richtig sind.

Für die Rechnung nämlich ganz gleichgültig ist, ob man die Elemente des Mondäquators für periodisch veränderlich ansieht, oder ob man sie als unabhängig von der physischen Libration betrachtet und dafür die selenographische Länge und Breite eines Punktes so variiert, daß trotzdem die Rechnung richtig bleibt. Indem man so verfährt, tut man nichts anderes, als man transformiert die selenographischen Koordinaten, die sich auf den wahren Mondäquator beziehen, auf einen anderen, den mittleren Äquator, und von diesem dann weiter auf das System des Erdäquators usw. Da nun wahrer und mittlerer Mondäquator sich nur um kleine Größen von der Ordnung der 3 Störungsgrößen ϱ, σ, τ unterscheiden, wird man nicht strenge Transformationsformeln anwenden, sondern von Differentialformeln Gebrauch machen.

Nennt man, wie früher, den Nordpol der Ekliptik P_0, den Nordpol des Mondes P', einen Oberflächenpunkt O, seine selenographischen Koordinaten λ und β, seine selenozentrische Länge und Breite l und b, dann ist die selenographische Länge vom absteigenden Knoten des wahren Mondäquators gerechnet

$$\lambda' = \varphi + \lambda,$$

und die selenozentrische Länge von demselben Punkte aus gezählt

$$l' = l - \psi,$$

wo

$$\varphi = 180^0 + m + \tau - \psi = 180^0 + g + \omega + \tau - \sigma$$

und

$$\psi = \Omega + \sigma$$

In dem Dreiecke $P_0 P' O$ sind die Seiten $P_0 P' = \vartheta$, $P_0 O = 90 - b$, $P' O = 90 - \beta$ und die Winkel bei P_0 und P': $90^0 - l'$ bezw. $90^0 + \varphi + \lambda$, demnach gelten die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \sin b &= \cos\vartheta \sin\beta - \sin\vartheta \cos\beta \sin(\varphi + \lambda) \\ \cos b \sin(l - \psi) &= \sin\vartheta \sin\beta + \cos\vartheta \cos\beta \sin(\varphi + \lambda) \\ \cos b \cos(l - \psi) &= \cos\beta \cos(\varphi + \lambda) \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Die gesuchte Variation von λ und β erhält man nun, wenn man diese Formeln differentiiert, l und b aber als konstant annimmt. So ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} O &= \cos\vartheta \cos\beta \,\mathrm{d}\beta + \sin\vartheta \sin\beta \sin(\varphi + \lambda)\,\mathrm{d}\beta \\ &\quad - \sin\vartheta \cos\beta \cos(\varphi + \lambda)\,\mathrm{d}(\varphi + \lambda) \\ -\cos b \cos(l - \psi)\mathrm{d}\psi &= \sin\vartheta \cos\beta \,\mathrm{d}\beta - \cos\vartheta \sin\beta \sin(\varphi + \lambda) d\beta \\ &\quad + \cos\vartheta \cos\beta \cos(\varphi + \lambda)\,\mathrm{d}(\varphi + \lambda) \\ &\quad + \cos\vartheta \sin\beta \,\mathrm{d}\vartheta - \sin\vartheta \cos\beta \sin(\varphi + \lambda)\,\mathrm{d}\vartheta \\ \cos b \sin(l - \psi)\,\mathrm{d}\psi &= -\sin\beta \cos(\varphi + \lambda)\,\mathrm{d}\beta \\ &\quad - \cos\beta \sin(\varphi + \lambda)\,\mathrm{d}(\varphi + \lambda). \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Man will nun wissen, wie λ und β sich ändern, wenn man in (24) für ϑ, φ und ψ die ungestörten Größen I, $180^0 + m - \Omega$ und Ω setzt, d. h. aus (25) sind $\mathrm{d}\lambda$ und $\mathrm{d}\beta$ zu bestimmen, indem man einsetzt

$$\mathrm{d}\vartheta = -\varrho, \quad \mathrm{d}\varphi = -(\tau - \sigma), \quad \mathrm{d}\psi = -\sigma.$$

Wenn man diese Substitution durchführt, l und b eliminiert und hierbei $\cos\vartheta = 1$, $\sin^2\vartheta = 0$ setzt, dann ergibt sich

$$\mathrm{d}\beta = -\varrho \sin(\varphi + \lambda) + \sigma \sin\vartheta \cos(\varphi + \lambda), \quad (2$$

und wenn man diesen Wert von $\mathrm{d}\beta$ einsetzt

$$\mathrm{d}\lambda = \varrho \,\mathrm{tg}\,\beta \cos(\varphi + \lambda) + \sigma \sin\vartheta \,\mathrm{tg}\,\beta \sin(\varphi + \lambda) +$$

Da ϱ und $\sigma \sin\vartheta$ stets kleiner als $2'$ bleiben, ist
setzen $\varphi + \lambda = 180^0 + g + \omega + \lambda$, $\vartheta = I$.

Die auf den mittleren Mondäquator transformierten selenographischen Längen und Breiten lauten also $\lambda + d\lambda$, $\beta + d\beta$, wo

$$(28)\quad \begin{cases} d\lambda = -\varrho \operatorname{tg}\beta \cos(g+\omega+\lambda) - I\sigma \operatorname{tg}\beta \sin(g+\omega+\lambda) + \tau \\ d\beta = +\varrho \sin(g+\omega+\lambda) - I\sigma \cos(g+\omega+\lambda). \end{cases}$$

Hierzu ist zu bemerken, daß die Ausdrücke für $d\lambda$ und $d\beta$ bei FRANZ, Astr. Nachr. 3241 Seite 8 und 9 entgegengesetztes Vorzeichen von dem hier gefundenen haben, was daher kommt, daß an genannter Stelle $d\lambda$ und $d\beta$ berechnet sind in der Annahme $dI = +\varrho$, $d\Omega = +\sigma$, während, wie oben ersichtlich, diese Größen negativ genommen werden müssen. Trotzdem sind die Formeln (21) und (22) an der zitierten Stelle richtig.

Im vorigen Kapitel ist gezeigt worden, wie man aus den Beobachtungen I, λ und β bestimmen kann. Nun muß aber noch die Größe

$$f = \frac{(C-B)B}{(C-A)A} = \frac{\alpha}{\beta}$$

aus den Beobachtungen abgeleitet werden. In der I. Abhandlung ist gezeigt worden, wie die Funktionen ϱ, σ, τ abhängig sind von den Größen α, β, γ, und wie wiederum β eine Funktion von I ist.

Es wäre also nur nötig ϱ, σ, τ zu differentiieren, $d\varrho$, $d\sigma$, $d\tau$ als Funktionen von df und dI darzustellen, und mit Hilfe von (28) $d\lambda$ und $d\beta$ durch df und dI auszudrücken. Die Gleichungen (23) lassen erkennen, wie die Darstellung der Beobachtungen von $d\lambda$ und $d\beta$ abhängt, demnach geben sie auch das Mittel an die Hand aus den Beobachtungen df, die Verbesserung des angenommenen Wertes von f zu finden. Da nun die Differentialformeln für $d\tau$, $d\varrho$, $d\sigma$ unbequem für die Rechnung waren, außerdem $d\tau : df$ je nach dem Werte des df stark variiert, soll ein einfacheres Verfahren benutzt werden, das außerdem den Vorzug bietet größere Sicherheit gegen Rechenfehler zu gewähren, es wurden nämlich einfach für verschiedene Werte von f die Störungsgrößen τ, x, y gerechnet, und sodann — als Ausgangswert $f = 0.5$ genommen — die Quotienten $d\tau : df$, $dx : df$, $dy : df$, und hieraus schließlich $d\varrho : df$ und $Id\sigma : df$ gebildet.

Eine vorläufige Betrachtung der Darstellung der Beobachtungen ließ als wahrscheinlich erscheinen, daß der FRANZsche Wert für $I = 1^0\,31'\,22''$ nahezu richtig und höchstens um vielleicht $1'$ zu vergrößern sein würde, was die Ausgleichung späterhin auch be-

stätigt hat. Die Rechnung zeigte nun, daß der Einfluß einer Änderung von I von solchem Betrage in den Formeln für $d\tau$, $d\varrho$, $Id\sigma$ völlig zu vernachlässigen ist.

Als Ausgangswerte wurden nach der I. Abh. (51) angenommen

$$\left.\begin{aligned} \tau &= -22''.3\sin g + 129''.5\sin g' - 13''.7\sin(-2g'+2\omega-2\omega') \\ &\quad - 20''.2\sin 2\omega, \\ \varrho &= -87''.4\cos g + 7''.6\cos(g+2\omega) - 11''.0\cos(2g+2\omega), \\ I\sigma &= -89''.5\sin g + 7''.6\sin(g+2\omega) - 11''.0\sin(2g+2\omega). \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Die Differentialformeln für dx und dy haben Gültigkeit für alle möglichen Werte von df, sie lauten

$$dx = +193''\sin\omega\, df,$$
$$dy = -\ 35''\cos\omega\, df,$$

woraus sich ergibt

$$\left.\begin{aligned} d\varrho &= (-79''\cos g + 115''\cos(g+2\omega))\, df \\ Id\sigma &= (-79''\sin g + 115''\sin(g+2\omega))\, df \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Die ursprüngliche Vermutung, daß f nur wenig von 0.5 verschieden sein könne, war nach den bisherigen Arbeiten über physische Libration gerechtfertigt. Zunächst wurde deshalb τ für die Werte 0.4 und 0.6 gerechnet, daraus ergab sich die Formel für $d\tau$, welche für $df = \pm 0.1$ Gültigkeit hat. Eine zweite Ausgleichung geschah unter der Annahme $df = +0.25$, eine dritte mit $df = +0.4$. Im folgenden ist für verschiedene Werte von f das zugehörige τ aufgeführt. Das Glied mit dem Argumente 2ω ist auch noch für die Mitten der Intervalle gegeben.

$f = 0.4$, $\tau = -26''.5\sin g + 161''.7\sin g' - 16''.7\sin(-2g'+2\omega-2\omega') - 14''.9\sin 2\omega$

				−17.0
0.5	−22.3	+129.5	−13.7	−20.2
				−26.5
0.6	−18.0	+ 99.6	−10.9	−43.3
				+51.9
0.6	−13.9	+ 72.6	− 8.1	+18.2
				+ 9.4
0.8	− 9.7	+ 48.1	− 5.3	+ 5.2
0.9	− 5.4	+ 22.5	− 2.6	+ 2.7

(31)

Für $f = 0.662$ wird das Glied mit dem Argumente 2ω unendlich, für diesen Wert von f könnten also die CASSINIschen Gesetze nicht bestehen. Man sieht hieraus, wie schon in der I. Abh. betont wurde, daß dieses Glied, das früher ganz nebensächlich behandelt wurde, die wichtigste Rolle spielt und schon an sich erkennen läßt, daß f aller Wahrscheinlichkeit nach nicht zwischen 0.6 und 0.7 liegen wird, da die Natur nur wesentlich stabile Zustände zu schaffen pflegt. Aus obenstehender Tafel findet man, wenn 0.5 als Ausgangswert für f genommen wird, für

$$\begin{array}{lllll} df = \pm 0.05, \frac{d\tau}{df} = +42''\sin g - 310''\sin g' + 29''\sin(-2g'+2\omega-2\omega') - & 80''\sin 2\omega \\ (32) \quad = +0.25 \quad = +42 \quad -279 \quad +28 & +154 \\ = +0.40 \quad = +42 \quad -267 \quad +27 & +57 \end{array}$$

Wenn nun (20), (30) und (32) in (28) eingesetzt werden, so erhält man schließlich

$$(33) \quad \begin{cases} d\lambda = -22''\sin g + 129''\sin g' - 14''\sin(-2g'+2\omega-2\omega') - 20''\sin 2\omega \\ \quad + 88''\operatorname{tg}\beta\cos(\omega+\lambda) - 7''\operatorname{tg}\beta\cos(\omega-\lambda) + 11''\operatorname{tg}\beta\cos(g+\omega-\lambda) \\ \quad + \frac{d\tau}{df} df \\ \quad + (79''\cos(\omega+\lambda) - 115''\cos(\omega-\lambda))\operatorname{tg}\beta\, df \\ d\beta = -88''\sin(\omega+\lambda) - 7''\sin(\omega-\lambda) + 11''\sin(g+\omega-\lambda) \\ \quad - (79''\sin(\omega+\lambda) + 115''\sin(\omega-\lambda))\, df \end{cases}$$

Für $d\tau : df$ ist aus (32) der entsprechende Wert zu nehmen. Somit ist alles gegeben, um aus den Bedingungsgleichungen, die uns das System (23) liefert, sämtliche Unbekannte zu bestimmen. Die in diesen Gleichungen enthaltenen $d\lambda$ und $d\beta$ setzen sich nämlich zusammen aus einem konstanten Term, der Verbesserung der angenommenen selenographischen Länge und Breite und aus einem variabelen Teil, das sind in (33) die Glieder, welche mit df multipliziert sind.

VI. Kapitel.

Bei der Fülle der in den früheren Kapiteln abgeleiteten Formeln scheint es angezeigt zu sein, in übersichtlicher Zusammenstellung noch einmal die Rechnungsvorschriften zu wiederholen.

A.

Als bekannt sei vorausgesetzt f und I, und zwar $f = 0.85$, ferner die Länge und Breite eines Punktes λ und β, ebenso sein Abstand vom Mondschwerpunkt h in Bogensekunden. Gesucht wird seine scheinbare α- und δ-Differenz gegen die Mondmitte.

Zunächst ist mit den bekannten Formeln der scheinbare Ort des Mondes für die gegebene Zeit zu rechnen. Dadurch erhält man α und δ. Dann folgt die Berechnung der Größen i, Ω', Δ nach den Formeln (1)

$$\sin \Delta = \sin \vartheta \sin \varepsilon \operatorname{cosec} i, \quad \sin \Omega' = \sin \vartheta \sin I \operatorname{cosec} i$$

$$\cos i = \cos \varepsilon \cos I - \sin \varepsilon \sin I \cos \vartheta.$$

Die Reduktionen auf den mittleren Mondäquator sind nach (33)

$$\begin{aligned} d\lambda = &- 6'' \sin g + 34'' \sin g' + 5'' \sin 2\omega \\ &+ 115'' \operatorname{tg} \beta \cos(\omega + \lambda) - 48'' \operatorname{tg} \beta \cos(\omega - \lambda) \\ &+ 11'' \operatorname{tg} \beta \cos(g + \omega - \lambda), \end{aligned}$$

$$d\beta = - 115'' \sin(\omega + \lambda) - 48'' \sin(\omega - \lambda) + 11'' \sin(g + \omega - \lambda).$$

Mit den so verbesserten λ und β wird dann weiter berechnet:

$$\lambda' = \lambda + 180^0 + m - \vartheta + \Delta.$$

Durch Einführung bekannter Hilfsgrößen erhält man weiter die Formeln:

$$\cos \beta \sin \lambda' = m \sin M, \quad \sin \beta = m \cos M,$$

$$\sin d = m \cos(M - i)$$

$$\cos d \sin(a - \Omega') = m \sin(M - i)$$

$$\cos d \cos(a - \Omega') = \cos \beta \cos \lambda'$$

$$\cos d \cos(a - \alpha) = n \sin N, \quad \sin d = n \cos N,$$

$$\cos K = - n \sin(\delta + N)$$

$$\sin \pi \sin K = \cos d \sin(a - \alpha)$$

$$\cos \pi \sin K = n \cos(\delta + N).$$

Aus h wird mit Hilfe der anfangs erwähnten Parallaxenrechnung h' gefunden, somit ist

$$\operatorname{tg} s = \frac{\sin h' \sin K}{1 - \sin h' \cos K},$$

$$\pi_m = \pi + \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha) \sin \tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta),$$
$$\alpha_1 - \alpha = s \sin \pi_m \sec \tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta),$$
$$\delta_1 - \delta = s \cos \pi_m .$$

B.

Der umgekehrte Fall ist gegeben. Aus der α- und δ-Differenz soll die selenographische Länge und Breite eines Punktes der Mondoberfläche berechnet werden. Ist die Entfernung des Punktes vom Mondschwerpunkt gänzlich unbekannt, so ist für h der aus Sternbedeckungen folgende Wert des Mondhalbmessers einzusetzen, da dieser wohl dem zu benutzenden Halbmesserwerte am nächsten kommen dürfte. Zunächst ist dann wieder die Parallaxenrechnung durchzuführen. Die weiteren Formeln lauten:

$$s \sin \pi_m = (\alpha_1 - \alpha) \cos \tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta), \quad s \cos \pi_m = (\delta_1 - \delta),$$
$$\pi = \pi_m - \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha) \sin \tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta),$$
$$\sin (K + s) = \sin s \operatorname{cosec} h',$$
$$\sin K \cos \pi = q \sin Q, \quad \cos K = q \cos Q,$$
$$\operatorname{tg} (\alpha - a) = \sin Q \operatorname{tg} \pi \sec (\delta - Q),$$
$$\operatorname{tg} d = \operatorname{tg} (\delta - Q) \cos (a - \alpha).$$

Nun sind die Größen i, Ω', Δ zu berechnen, dann erhält man

$$\cos d \sin (a - \Omega') = r \sin R, \quad \sin d = r \cos R,$$
$$\sin \beta = r \cos (i + R),$$
$$\cos \beta \sin \lambda' = r \sin (i + R),$$
$$\cos \beta \cos \lambda' = \cos d \cos (a - \Omega'),$$
$$\lambda = \lambda' - 180^0 - m + \vartheta - \Delta.$$

Die so erhaltenen Werte von λ und β beziehen sich auf den mittleren Mondäquator, die Transformation auf den wahren erfolgt durch die unter A angeführten Größen $d\lambda$ und $d\beta$ mit umgekehrtem Vorzeichen.

C.

Zur Aufstellung der Gleichungen, welche die Bestimmung von λ, β, h, f und I liefern sollen, bedient man sich der in Kapitel IV entwickelten Differentialformeln.

Sehr viele Größen, welche in diesen Formeln vorkommen, sind schon durch die vorangegangene Rechnung A oder B be-

kannt. Infolgedessen ist die Berechnung dieser Differentialformeln durchaus nicht so umständlich, wie sie aussieht. Nach den Formeln (5) und (8) ist zu rechnen:

$$\sin x = \sin i \cos \lambda' \sec d,$$
$$\cos d \cos x = \cos i \cos \beta - \sin i \sin \beta \sin \lambda',$$
$$\sin p = \sin \pi \cos \delta \sec d,$$
$$\cos p = \cos (\alpha - a) \cos \pi + \sin (\alpha - a) \sin \pi \sin \delta,$$

ferner nach (21) und (22)

$$A_1 = \sin (\alpha_1 - \alpha) \cos \delta \cos (K + s) \operatorname{cosec} K,$$
$$A_2 = \sin (\delta_1 - \delta) \operatorname{cosec} K,$$
$$D_1 = \sin (\delta_1 - \delta) \cos (K + s) \operatorname{cosec} K,$$
$$D_2 = \sin (\alpha_1 - \alpha) \cos \delta \operatorname{cosec} K,$$
$$G = \sin (\alpha_1 - \alpha) \cos \delta \sin (K + s) \operatorname{cosec} h' \operatorname{cosec} K,$$
$$H = \sin (\delta_1 - \delta) \sin (K + s) \operatorname{cosec} h' \operatorname{cosec} K,$$
$$S = \cos p \sin (a - \Omega') - \sin p \cos (a - \Omega') \sin d,$$
$$T = \sin p \sin (a - \Omega') + \cos p \cos (a - \Omega') \sin d,$$

endlich noch

$$U = \sin \Delta \operatorname{cotg} i,$$
$$W = \operatorname{tg} \Omega' \operatorname{cotg} I - \operatorname{tg} \Omega' \operatorname{cotg} i \cos \Delta,$$

Mit diesen Hilfsgrößen erhält man schließlich die Gleichungen (23)

$$\begin{aligned}
\cos \delta \, \mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha) &= G \, \mathrm{d}h' \\
&- \{A_1 \cos \beta \sin (p + x) - A_2 \cos \beta \cos (p + x)\} \left\{\mathrm{d}\lambda + \tfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}f} \mathrm{d}f\right\} \\
&- \{A_1 \cos (p + x) + A_2 \sin (p + x)\} \left\{\mathrm{d}\beta + \tfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}f} \mathrm{d}f\right\} \\
&+ \{A_1 U \cos \beta \sin (p + x) - A_2 U \cos \beta \cos (p + x)\} \, \mathrm{d}I \\
&- \{A_1 W \sin p \cos d - A_2 W \cos p \cos d\} \, \mathrm{d}I \\
&- \{A_1 S \cos \Delta + A_2 T \cos \Delta\} \, \mathrm{d}I
\end{aligned} \tag{34a}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\delta_1 - \delta) &= H \, \mathrm{d}h' \\
&- \{D_1 \cos \beta \sin (p + x) + D_2 \cos \beta \cos (p + x)\} \left\{\mathrm{d}\lambda + \tfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}f} \mathrm{d}f\right\} \\
&- \{D_1 \cos (p + x) - D_2 \sin (p + x)\} \left\{\mathrm{d}\beta + \tfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}f} \mathrm{d}f\right\} \\
&+ \{D_1 U \cos \beta \sin (p + x) + D_2 U \cos \beta \cos (p + x)\} \, \mathrm{d}I \\
&- \{D_1 W \sin p \cos d + D_2 W \cos p \cos d\} \, \mathrm{d}I \\
&- \{D_1 S \cos \Delta - D_2 T \cos \Delta\} \, \mathrm{d}I.
\end{aligned} \tag{34b}$$

In diesen beiden Gleichungen bedeutet dh' die Verbesserung des zum Objekt gehörigen scheinbaren Mondradius. Will man dafür dh einführen, so ist G und H mit dem Quotienten r = scheinbarer Radius : mittlerer Radius zu multiplizieren. $d\lambda : df$ und $d\beta : df$ sind nach (33) zu berechnen. Es ist

$$\frac{d\lambda}{df} = \frac{d\tau}{df} + [79'' \cos(\omega + \lambda) - 115'' \cos(\omega - \lambda)] \operatorname{tg} \beta$$

$$\frac{d\beta}{df} = -[79'' \sin(\omega + \lambda) + 115'' \sin(\omega - \lambda)].$$

$d\tau : df$ ist nach (31) zu bilden; maßgebend hierfür ist der Ausgangswert und der vermutliche Endwert von f.

D.

Die Formeln (34) würden unmittelbar die Beobachtungsgleichungen zur Ermittelung der 5 Unbekannten sein, wenn es möglich wäre, direkt die α- und δ-Differenz gegen die Mondmitte zu messen. Nun besteht aber die Beobachtung darin, daß man den betrachteten Punkt entweder an den Rand oder an ein anderes Objekt anschließt, dadurch erfahren die Gleichungen naturgemäß einige Komplikationen.

Man kann die Formeln (34) abgekürzt so schreiben:

$$(35)\quad \begin{cases} \cos\delta\, d(\alpha_1 - \alpha) = r G_1 dh_1 + L_1 d\lambda_1 + B_1 d\beta_1 + E_1 dI + F_1 df \\ d(\delta_1 - \delta) = r H_1 dh_1 + L_1' d\lambda_1 + B_1' d\beta_1 + E_1' dI + F_1' df. \end{cases}$$

Ist nun Punkt 1 an einen Punkt 2 angeschlossen worden, so lauten für letzteren die Gleichungen analog, nur daß überall der Index 2 auftritt. Da nun $\alpha_2 - \alpha_1$ und $\delta_2 - \delta_1$ beobachtet worden ist, so ist $d(\alpha_2 - \alpha_1)$ und $d(\delta_2 - \delta_1)$ zu bilden. Wir erhalten demnach die Gleichungen:

$$(36)\quad \begin{cases} \cos\delta\, d(\alpha_2 - \alpha_1) = r G_2 dh_2 + L_2 d\lambda_2 + B_2 d\beta_2 + (E_2 - E_1) dI \\ \qquad\qquad - r G_1 dh_1 - L_1 d\lambda_1 - B_1 d\beta_1 + (F_2 - F_1) df \\ d(\delta_2 - \delta_1) = r H_2 dh_2 + L_2' d\lambda_2 + B_2' d\beta_2 + (E_2' - E_1') dI \\ \qquad\qquad - r H_1 dh_1 - L_1' d\lambda_1 - B_1' d\beta_1 + (F_2' - F_1') df. \end{cases}$$

Dies ist die definitive Form der Beobachtungsgleichungen, wie sie bei der Ausgleichung der Messungen zwischen je zwei Punkten erster Ordnung anzuwenden sind.

Für die mikrometrischen Verbindungen in α und δ zwischen Rand und Mösting A gestaltet sich die Sache sehr einfach. Als

Mondradius sei irgend ein Wert angenommen, der mit R bezeichnet werde, seine scheinbare Größe heiße R'. Nennt man nun die Rektaszensionen des I. und II. Randes α_{I} und α_{II}, die Deklinationen des nördlichen und südlichen Randes δ_n und δ_s, dann ist beobachtet worden

$$\alpha_1 - \alpha_{\mathrm{I}}, \quad \alpha_1 - \alpha_{\mathrm{II}}, \quad \delta_1 - \delta_n, \quad \delta_1 - \delta_s.$$

Gegeben durch Rechnung ist

$$\alpha - \alpha_{\mathrm{I}} = R' \sec\delta, \quad \alpha - \alpha_{\mathrm{II}} = -R' \sec\delta,$$
$$\delta - \delta_n = -R', \qquad \delta - \delta_s = R',$$

ferner

$$\alpha_1 - \alpha \quad \text{und} \quad \delta_1 - \delta.$$

Da nun für jedes Instrument und jeden Beobachter ein anderer Wert von R' gilt, muß eine Verbesserung $\mathrm{d}R'$ eingeführt werden. Wir haben also die Beziehungen zwischen Beobachtung und Rechnung:

$$\alpha_1 - \alpha_{\mathrm{I}} = +R' \sec\delta + \sec\delta\, \mathrm{d}R' + (\alpha_1 - \alpha) + \mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha)$$
$$\alpha_1 - \alpha_{\mathrm{II}} = -R' \sec\delta - \sec\delta\, \mathrm{d}R' + (\alpha_1 - \alpha) + \mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha)$$
$$\delta_1 - \delta_n = -R' - \mathrm{d}R' + (\delta_1 - \delta) + \mathrm{d}(\delta_1 - \delta)$$
$$\delta_1 - \delta_s = +R' + \mathrm{d}R' + (\delta_1 - \delta) + \mathrm{d}(\delta_1 - \delta).$$

Bildet man also die Differenz „Beobachtung minus Rechnung" so ist in den 4 Fällen

$$\left.\begin{aligned} B - R &= \mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha) + \sec\delta\, \mathrm{d}R', \\ B - R &= \mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha) - \sec\delta\, \mathrm{d}R', \\ B - R &= \mathrm{d}(\delta_1 - \delta) - \mathrm{d}R', \\ B - R &= \mathrm{d}(\delta_1 - \delta) + \mathrm{d}R'. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Da, wenn man von einem Werte von R ausgeht, der dem wahren Mondradius sehr nahe kommt, die Größe $\mathrm{d}R'$ mehr oder weniger konstant sein wird, jedenfalls aber nicht von der Parallaxe abhängig ist, so ist es korrekter für $\mathrm{d}R'$ zu setzen $\mathrm{d}R$. In dem Falle also, daß Mösting A an den Mondrand durch α- und δ-Differenzen angeschlossen ist, treten zu den Gleichungen (35) noch die Glieder

I. Rand: $+\mathrm{d}R$, nördl. Rand: $-\mathrm{d}R$,
II. Rand: $-\mathrm{d}R$, südl. Rand: $+\mathrm{d}R$,

Ist das Objekt der Mondoberfläche in Position und Distanz an eine Reihe von Randpunkten angeschlossen — dies ist die Methode der bisherigen Heliometerbeobachtungen —, dann gelten die Gleichungen (35) ohne weiteres, da ein solcher Beobachtungssatz unter Elimination des Mondradius direkt $\alpha_1 - \alpha$ und $\delta_1 - \delta$ zu bestimmen gestattet.

In diesem Kapitel ist unter A und B der Weg gegeben, auf dem man von den selenographischen Koordinaten zum scheinbaren Ort auf der Mondscheibe gelangt und umgekehrt. Dasselbe Thema behandelt FRANZ in seiner Abhandlung „Die Figur des Mondes" im IV. Abschnitte. Die daselbst, Seite 14, angegebene Berücksichtigung der physischen Libration ist unmöglich. Ist die dort angegebene Methode bei der Berechnung seiner 8 Fixpunkte wirklich angewendet worden, so sind die Örter der 8 Fixpunkte nicht richtig. Im übrigen ist der Weg, der a. a. O. von FRANZ und hier von mir verfolgt wurde, der gleiche.

Der Ort des Hauptpunktes Mösting A ist selenographisch bekannt. Diese selenographischen Koordinaten von Mösting A werden unter Berücksichtigung der physischen Libration durch verschiedene Zwischenstufen transformiert in das System der α- und δ-Differenzen gegen die Mondmitte. Die Beobachtung liefert nun die α- und δ-Differenz eines 2. Punktes gegen Mösting A und somit gegen die Mondmitte. Von diesem Momente an scheidet Mösting A völlig aus der weiteren Berechnung aus. Man hat nun den scheinbaren Ort des 2. Punktes gegen die Mondmitte, und diese Koordinaten werden nun rückwärts transformiert auf das System des Mondäquators. Die physische Libration wird an dieser Stelle genau auch wie vorhin bei Mösting A entweder dadurch in Rechnung gezogen, daß in den Transformationsformeln die Elemente des wahren Mondäquators angewendet werden, oder man transformiert mit Hilfe der wiederholt genannten Differentialformeln Mösting A vom wahren Äquator auf den mittleren und rechnet mit den Elementen des mittleren weiter, und hier führt man für den 2. Punkt umgekehrt dieselbe Rechnung durch.

Der Satz an der oben zitierten Stelle: „Die so erhaltenen selenographischen Längen und Breiten λ und β des Fixpunktes wurden noch um die Differenz der physischen Libration für den Fixpunkt und für Mösting A korrigiert" ist demnach nicht verständlich. Als Grund für diese Rechnung ist auf derselben Seite,

Zeile 20 von unten angegeben: „weil die relative Lage des Fixpunktes gegen Mösting A gemessen ist.“ Außerdem müßten die auf dieser Seite gegebenen Korrektionen $d\lambda$ und $d\beta$ das entgegengesetzte Zeichen haben. Daß die Berücksichtigung der physischen Libration nicht richtig sein kann, zeigt schon auf den Seiten 10—13 der auffallende Parallelismus zwischen den dort gegebenen übrigbleibenden Fehlern und den Korrektionen für Libration.

VII. Kapitel.

Nachdem nun alle Rechnungsvorschriften gegeben sind, soll zur Ausgleichung der Beobachtungen geschritten werden. Zu dem Zwecke ist zunächst die Darstellung der Beobachtungen zu rechnen. Für die in Frage kommende Zeit ist im Berliner Jahrbuch eine Ephemeride des geozentrischen Ortes von Mösting A gegeben. Aus dieser Ephemeride wurde für dieselben Zeiten, für welche nach Kapitel II schon der scheinbare Ort des Mondes gerechnet war, der geozentrische Ort von Mösting A scharf interpoliert. Mit Differentialformeln, wie sie ähnlich im Anhang des Jahrbuches gegeben sind, wurde dann der geozentrische Ort in den topozentrischen verwandelt. Die Parallaxe von Mösting A, deren Kenntnis hierzu nötig ist, wurde mit Hilfe einer Tafel berechnet, die mit den Argumenten Mondparallaxe und Abstand des Punktes Mösting A von der Mondmitte die Parallaxendifferenz von Mond und Krater enthielt. Diese Reduktion kann in Rektaszension bis zu 10″, in Deklination bis 17″ betragen, also wesentlich größer sein, als im Jahrbuch angegeben ist. Die daselbst gegebenen Differentialformeln lassen die gewünschten Reduktionen höchstens bis auf 0″.1 genau berechnen; überhaupt sind bei Mondrechnungen in vielen Fällen Differentialformeln von keinem großen Nutzen, da dieselben, wenn sie genügend scharf sein sollen, für die Rechnung ebenso unbequem werden, als wenn man mit den strengen Formeln 6- oder 7-stellig rechnet. Dabei bieten nach meinen Erfahrungen diese strengen Rechnungen größere Sicherheit gegen Rechenfehler, ein Umstand, der bei so komplizierten Rechnungen, wie sie der Mond erfordert, viel mehr ins Gewicht fällt als Ersparnis an Zeit. Für jeden Abend wurde dann zur Prüfung der Richtigkeit ein Wert direkt scharf berechnet, wobei sich ergab, daß die Ephemeride

für 1898 Nov. 26 nicht richtig ist. Diese direkte Rechnung ließ deutlich erkennen, daß es praktischer gewesen wäre, von der Ephemeride keinen Gebrauch zu machen, sondern alle Werte direkt zu berechnen. Die Genauigkeit der interpolierten Werte läßt nämlich sehr zu wünschen übrig, was durchaus erklärlich ist, da die Ephemeride nur bis auf $0^s.01$ bezw. $0''.1$ genau gegeben ist; deshalb können die interpolierten Örter leicht um $0''.2$ falsch sein.

Allen Rechnungen für Mösting A liegen die Werte zugrunde, die FRANZ aus den SCHLÜTERschen Beobachtungen gefunden hat. Auch der Mondhalbmesser wurde nicht nach dem Nautical Almanac, sondern nach SCHLÜTER-FRANZ angenommen. Er ist gegeben durch die Formel $\sin R : \sin \Pi = [9.435\,223]$, wenn der Mondhalbmesser mit R, die Parallaxe mit Π bezeichnet wird. Dieser Halbmesser wird der Wahrheit sehr nahe kommen, da er nur wenig von dem aus Sternbedeckungen abgeleiteten abweicht.

Da die genannten Rechnungen schon vollendet waren, ehe die in der I. Abh. entwickelte Theorie der physischen Libration vorlag, so mußte nun nachträglich mit Hilfe der in Tabelle 43 gegebenen Differentialquotienten der scheinbare Ort von Mösting A auf diese verbesserte Theorie reduziert werden.

Die in Tabelle 38 gegebenen Differenzen in α und δ sind berechnet mit dem genannten Mondradius, der Libration nach FRANZ und den Größen

$$I = 1^0\ 31'\ 22'',$$

$$\lambda = -5^0\ 10'\ 19'', \quad \beta = -3^0\ 11'\ 24''.$$

Die angeführten Epochen sind überall in mitteleuropäischer Zeit gegeben, die mit MEZ bezeichnet ist.

Die folgende Tafel gibt

in Kol. 3: die Differenz Libration-HAYN nach Formel (29) minus Libration-FRANZ für Mösting A in Länge, — der Unterschied in Breite ist höchstens $\pm 10''$ und deshalb hier nicht gegeben, wohl aber in Rechnung gezogen worden —

in Kol. 4 und 7: scheinbare Koordinaten von Mösting A nach FRANZ,

in Kol. 5 und 8: Reduktion dieser Größen auf die Libration nach Formel (29) ($f = 0.50$),

in Kol. 6 und 9: die Korrektionen, welche nach den Resultaten unserer Abhandlung an die verbesserten Koordinaten anzubringen sind, sodaß die Summe der beiden Korrektionen die schließliche Verbesserung der Örter des Berliner Jahrbuchs bedeutet.

Wenn im folgenden Hundertstel Bogensekunden angeführt werden, so geschieht es nur, weil die Rechnung überall mit dieser Genauigkeit geführt wurde, um bei den zahlreichen Operationen den Einfluß der Abrundungsfehler zu verringern.

Tabelle 38.

Tag	MEZ	H — F	$\alpha_1 - \alpha$	I. Korr.	II. Korr.	$\delta_1 - \delta$	I. Korr.	II. Korr.
1898 März 3	$6^h 40^m$	+32″	+ 37″.61	−0″.15	+0″.64	− 48″.86	+0″.02	+0″.14
	7 0		+ 36.61			− 49.14		
4	7 10	+32	+ 11.56	−0.15	+0.60	− 71.84	+0.01	−0.03
	7 50		+ 9.59			− 72.15		
	8 30		+ 7.33			− 72.64		
Mai 1	8 30	+ 7	− 82.77	−0.05	+0.25	−127.40	−0.04	−0.44
	9 0		− 84.13			−127.73		
	9 30		− 85.46			−127.92		
2	8 40	+ 7	− 87.93	−0.05	+0.23	−141.64	−0.04	−0.57
	9 10		− 89.22			−141.86		
	9 40		− 90.50			−142.14		
Juni 1	9 10	+ 9	− 75.39	−0.05	+0.09	−165.55	−0.01	−0.55
	9 40		− 76.27			−165.71		
	10 10		− 76.98			−165.71		
28	9 10	+15	−101.10	−0.07	−0.15	−156.28	0.00	−0.48
	9 40		−101.90			−156.05		
Sept. 26	7 40	+13	+124.29	−0.07	−0.25	+ 36.76	0.00	+0.19
	8 10		+123.25			+ 37.37		
	8 40		+121.97			+ 37.99		
27	7 0	+13	+130.81	−0.07	−0.25	+ 66.79	+0.01	+0.28
	7 40		+129.83			+ 67.44		
Okt. 3	9 40	0	+169.01	−0.01	−0.14	+ 50.60	+0.03	+0.31
	10 30		+168.66			+ 50.44		
28	7 40	−16	+150.47	+0.05	−0.24	+ 98.99	+0.07	+0.38
	8 20		+149.59			+ 99.18		
29	7 30	−16	+158.26	+0.06	−0.21	+ 83.32	+0.06	+0.35
	8 10		+157.90			+ 83.15		

Tag	MEZ	H — F	$\alpha_1 - \alpha$	I. Korr.	II. Korr.	$\delta_1 - \delta$	I. Korr.	II. Korr.
1898 Nov. 2	$9^h 50^m$	−20″	+125″.85	+0″.10	−0″.14	− 38″.49	0″.00	+0″.05
	10 20		+125.20			− 38.78		
21	5 40	−28	+150.79	+0.11	−0.11	+ 92.96	+0.07	+0.33
	6 10		+149.53			+ 93.40		
	6 40		+148.27			+ 93.82		
23	4 40	−28	+153.47	+0.11	−0.14	+111.63	+0.08	+0.40
	5 20		+152.64			+111.98		
	6 0		+151.71			+112.32		
26	6 20	−28	+164.66	+0.12	−0.07	+ 69.65	+0.07	+0.34
	6 50		+164.24			+ 69.58		
	7 20		+163.83			+ 69.51		
28	7 10	−30	+155.07	+0.14	−0.02	+ 6.54	+0.04	+0.17
	8 0		+154.36			+ 6.17		
	8 50		+153.18			+ 5.74		
	9 40		+151.59			+ 5.26		
Dez. 27	10 20	−31	+120.42	+0.14	+0.16	− 52.24	−0.01	−0.06
	10 50		+118.93			− 52.74		
1899 Jan. 22	5 50	−26	+173.94	+0.12	+0.48	− 4.46	+0.02	+0.12
	6 20		+172.82			− 4.88		
26	7 20	−27	+ 49.32	+0.11	+0.25	−119.79	−0.06	−0.41
	8 10		+ 47.56			−120.29		
	9 0		+ 45.42			−120.67		
27	9 50	−26	+ 10.93	+0.10	+0.15	−135.05	−0.07	−0.51
	10 30		+ 9.14			−135.31		
	11 10		+ 7.00			−135.59		
Febr. 19	6 0	−23	+167.55	+0.11	+0.67	− 31.95	0.00	−0.01
	6 30		+166.10			− 32.43		
	7 0		+164.41			− 33.02		
21	11 0	−23	+ 88.48	+0.11	+0.50	− 98.72	−0.04	−0.34
	11 50		+ 85.47			− 99.68		
27	10 30	−25	− 57.20	+0.08	+0.12	−153.83	−0.09	−0.77
	11 10		− 58.68			−154.08		
März 23	6 50	−27	+ 15.37	+0.10	+0.34	−146.21	−0.08	−0.66
	7 40		+ 12.84			−146.51		
	8 50		+ 9.09			−146.92		
	9 30		+ 6.86			−147.14		
24	7 0	−29	− 10.78	+0.10	+0.27	−153.49	−0.09	−0.74
	7 40		− 12.44			−153.80		

Tag	MEZ	H — F	$\alpha_1 - \alpha$	I. Korr.	II. Korr.	$\delta_1 - \delta$	I. Korr.	II. Korr.
1899 März 25	7h 50m	−29″	− 32″.26	+0″.10	+0″.20	−157″.32	−0″.10	−0″.79
	8 20		− 33.39			−157.58		
	8 50		− 34.63			−157.71		
April 22	7 10	−41	− 46.79	+0.15	+0.10	−158.77	−0.12	−0.82
	7 40		− 48.09			−158.95		
	8 10		− 49.48			−159.10		
23	8 40	−41	− 56.94	+0.15	+0.08	−157.88	−0.12	−0.80
	9 10		− 58.26			−158.03		
	9 40		− 59.48			−158.04		
25	10 30	−43	− 44.91	+0.18	+0.16	−148.47	−0.11	−0.74
	11 10		− 46.22			−148.41		
Juni 18	9 0	−48	− 87.65	+0.19	−0.32	−144.27	−0.12	−0.64
	9 30		− 88.77			−143.87		
	10 0		− 89.77			−143.51		
19	8 50	−48	− 77.13	+0.21	−0.28	−137.80	−0.11	−0.62
	9 40		− 78.95			−137.29		
Juli 19	8 50	−50	− 32.34	+0.25	−0.33	− 96.77	−0.03	−0.39
	9 20		− 32.86			− 96.29		
	9 50		− 33.51			− 95.80		
20	8 40	−50	+ 4.63	+0.26	−0.25	− 72.65	−0.01	−0.31
	9 10		+ 3.78			− 72.27		
	9 40		+ 3.02			− 71.80		
Aug. 14	7 20	−47	− 73.57	+0.23	−0.60	−112.59	−0.08	−0.43
	7 40		− 74.25			−112.32		
16	7 50	−34	− 32.24	+0.18	−0.48	− 78.66	0.00	−0.32
	8 40		− 33.98			− 77.85		
24	9 30	−30	+187.15	+0.11	−0.05	+108.20	+0.09	+0.18
	10 0		+187.85			+108.42		
	10 30		+188.23			+108.57		
	11 0		+188.58			+108.79		
25	20 30	−30	+199.41	+0.13	−0.01	+ 82.30	+0.07	+0.11
	20 50		+198.98			+ 81.63		
26	10 40	−28	+226.38	+0.12	+0.06	+ 60.32	+0.06	+0.06
	11 30		+227.34			+ 59.94		
26	20 40	−28	+213.57	+0.12	+0.03	+ 50.06	+0.06	+0.03
	21 0		+212.87			+ 49.15		
27	11 20	−28	+231.72	+0.13	+0.07	+ 22.19	+0.04	−0.05
	11 50		+232.15			+ 21.83		

Tag	MEZ	H — F	$\alpha_1 - \alpha$	I. Korr.	II. Korr.	$\delta_1 - \delta$	I. Korr.	II. Korr.
1899 Okt. 14	$5^h 40^m$	−19″	+ 47″.56	+0″.08	−0″.38	+ 44″.83	+0″.07	0″.00
	6 30		+ 46.30			+ 45.47		
15	5 50	−18	+ 65.47	+0.06	−0.35	+ 67.14	+0.07	+0.06
	6 40		+ 64.51			+ 67.72		
	8 20		+ 61.87			+ 69.07		
	8 50		+ 60.82			+ 69.49		
	9 20		+ 59.58			+ 69.83		
16	5 50	−18	+ 87.85	+0.06	−0.30	+ 83.29	+0.07	+0.09
	6 20		+ 87.68			+ 83.73		
	6 50		+ 87.52			+ 84.06		
	9 0		+ 85.60			+ 85.53		
	9 30		+ 83.95			+ 85.90		
17	8 10	−18	+114.88	+0.06	−0.24	+ 92.55	+0.07	+0.10
	8 50		+114.25			+ 92.88		
	9 30		+113.58			+ 93.17		
19	9 0	−17	+178.46	+0.06	−0.08	+ 71.88	+0.06	+0.05
	9 40		+178.43			+ 71.72		
	10 20		+177.96			+ 71.61		
20	8 40	−18	+203.94	+0.07	−0.03	+ 42.75	+0.04	−0.04
	9 20		+204.25			+ 42.49		
	10 0		+204.08			+ 42.14		
Nov. 16	6 40	−24	+174.96	+0.11	−0.02	+ 51.92	+0.06	+0.01
	7 10		+175.08			+ 51.81		
	7 40		+175.03			+ 51.65		
	8 30		+174.73			+ 51.24		
	8 50		+174.44			+ 51.20		
21	10 0	−25	+140.00	+0.12	−0.07	−135.25	−0.04	−0.55
	10 30		+139.43			−135.57		
Dez. 14	5 40	−31	+184.21	+0.14	+0.17	+ 31.58	+0.06	−0.03
	6 30		+183.91			+ 31.14		
1900 Jan. 15	7 30	−34	+126.43	+0.15	+0.22	−140.31	−0.05	−0.63
	8 20		+124.72			−140.93		
Febr. 8	5 50	−22	+219.26	+0.11	+0.67	− 23.66	+0.01	−0.16
	6 40		+217.19			− 24.62		
9	6 10	−22	+205.40	+0.11	+0.65	− 65.99	0.00	−0.33
	6 50		+203.59			− 66.73		
13	7 20	−20	+ 78.13	+0.07	+0.30	−171.42	−0.06	+0.01
	7 30		+ 77.86			−171.51		

Tag	MEZ	H — F	$\alpha_1 - \alpha$	I. Korr.	II. Korr.	$\delta_1 - \delta$	I. Korr.	II. Korr.
1900 Mai 13	$9^h\ 0^m$	+17″	− 13″80	−0″07	+0″27	−114″91	0″00	−0″71
	9 30		− 14.89			−114.80		
	10 0		− 16.06			−114.61		
Juni 7	7 50	+17	− 13.42	−0.08	+0.03	−159.62	0.00	−0.84
	8 10		− 14.36			−159.31		
10	8 40	+15	− 16.88	−0.06	+0.09	−100.60	+0.01	−0.58
	9 10		− 18.06			−100.37		
13	11 0	+14	+ 8.84	−0.07	+0.27	− 27.90	+0.03	−0.18
	11 40		+ 7.28			− 27.49		
Juli 14	11 20	+11	+ 49.73	−0.05	+0.05	+ 57.57	+0.03	+0.18
	11 50		+ 49.05			+ 57.88		
	12 20		+ 48.24			+ 58.20		
	12 50		+ 47.50			+ 58.44		
15	11 30	+11	+ 68.79	−0.07	+0.07	+ 73.92	+0.03	+0.22
	12 0		+ 68.40			+ 74.12		
	12 30		+ 67.87			+ 74.45		
18	11 50	+13	+140.72	−0.08	+0.20	+ 72.31	+0.01	+0.15
	12 20		+141.25			+ 72.37		
Aug. 12	10 10	+15	+ 79.81	−0.09	−0.09	+ 77.63	+0.02	+0.16
	10 30		+ 79.79			+ 77.77		
16	11 20	+19	+204.59	−0.09	+0.19	+ 32.43	−0.01	−0.06
	11 50		+205.42			+ 32.16		
	12 20		+205.95			+ 31.90		
	12 50		+206.14			+ 31.65		
Sept. 12	10 10	+31	+200.61	−0.16	+0.10	+ 41.17	−0.02	−0.04
	10 50		+201.27			+ 40.96		
	11 30		+201.71			+ 40.72		
	12 10		+201.79			+ 40.37		
15	11 30	+35	+239.81	−0.17	+0.17	− 82.93	−0.02	−0.41
	12 0		+240.09			− 83.40		
	12 30		+240.09			− 83.96		
Okt. 5	5 50	+43	− 2.51	−0.21	−0.34	+ 44.98	−0.02	+0.10
	6 30		− 3.13			+ 45.19		
	7 10		− 3.85			+ 45.44		
8	6 40	+45	+110.74	−0.22	−0.08	+ 58.53	−0.06	+0.05
	7 20		+111.83			+ 58.67		

In den folgenden Tabellen 39 bis 42 sind die analogen Werte für die 4 anderen Hauptpunkte gegeben. Sie sind berechnet mit

der physischen Libration nach Formel (29) und den genäherten selenographischen Koordinaten

Messier A	$\lambda = +46^\circ\ 55'.0$	$\beta = -\ 2^\circ\ 0'.0$
Kepler A	$= -\ 36\ \ 5.0$	$= +\ 7\ \ 7.0$
Egede A	$= +\ 10\ \ 30.0$	$= +\ 51\ \ 30.0$
Tycho	$= -\ 11\ \ 15.0$	$= -\ 43\ \ 27.0$

Da diese 4 Punkte bereits mit der verbesserten Libration berechnet sind, fällt hier die für Mösting A gegebene I. Korr. fort. Es ist unter Korr. die Verbesserung der Koordinaten nach den definitiven Resultaten gegeben.

Tabelle 39. Scheinbarer Ort von Messier A.

Tag			MEZ	$\alpha_2 - \alpha$	Korr.	$\delta_2 - \delta$	Korr.
1898	März	4	$7^h\ 27^m\ 35^s$	$-\ 12'\ 22''.41$	$+\ 0''.33$	$+\ 1'\ 35''.41$	$-\ 0''.07$
	Mai	2	8 57 2	12 30.64	+ 0.16	+ 3 27.29	− 0.21
	Juni	1	9 31 21	13 30.03	+ 0.14	+ 2 54.48	− 0.06
	Sept.	26	8 0 36	11 11.88	− 0.42	− 3 23.81	+ 0.25
	Okt.	28	8 1 25	10 9.40	− 0.40	− 3 19.07	+ 0.08
		29	7 46 46	10 21.59	− 0.35	− 2 59.00	+ 0.05
	Nov.	21	5 57 26	10 7.45	− 0.37	− 3 26.21	+ 0.20
		23	5 13 49	9 47.24	− 0.35	− 3 27.32	+ 0.16
		26	6 35 35	10 27.25	− 0.26	− 2 40.98	+ 0.03
		28	7 28 52	11 8.04	− 0.22	− 1 36.52	− 0.03
		28	9 5 25	11 13.12	− 0.22	− 1 33.85	− 0.03
1899	Jan.	26	7 46 29	11 20.12	+ 0.05	+ 1 19.91	− 0.26
		27	10 27 56	11 23.39	+ 0.04	+ 1 58.94	− 0.28
	Febr.	19	6 24 41	11 5.53	+ 0.25	− 0 52.67	− 0.11
		27	10 50 56	11 43.27	+ 0.10	+ 3 12.15	− 0.28
	März	23	7 5 53	11 16.56	+ 0.15	+ 2 3.54	− 0.37
		23	9 16 19	11 21.26	+ 0.15	+ 2 6.32	− 0.37
		24	7 29 15	11 18.15	+ 0.13	+ 2 32.71	− 0.39
		25	8 22 10	11 25.02	+ 0.12	+ 2 55.44	− 0.37
	April	23	9 11 1	11 55.86	+ 0.10	+ 3 14.28	− 0.30
	Juni	18	9 47 38	12 39.45	− 0.10	+ 3 14.73	− 0.15
		19	9 7 39	13 10.66	− 0.06	+ 2 53.78	− 0.09
	Juli	19	9 30 28	14 21.29	− 0.16	+ 0 49.64	+ 0.08
		20	9 10 2	14 15.66	− 0.18	− 0 18.77	+ 0.02
	Okt.	14	5 56 32	12 3.34	− 0.35	− 3 33.02	+ 0.02
		14	6 4 6	12 3.53	− 0.35	− 3 33.22	+ 0.02
		14	6 27 50	12 4.06	− 0.35	− 3 33.81	+ 0.02
		15	6 12 54	11 31.09	− 0.34	− 3 58.25	− 0.03
		15	8 37 41	11 34.59	− 0.34	− 4 0.57	− 0.03
		15	8 47 32	11 34.76	− 0.34	− 4 0.69	− 0.03

Tag			MEZ	$\alpha_2 - \alpha$	Korr.	$\delta_2 - \delta$	Korr.
1899	Okt.	15	$8^h\ 57^m\ 23^s$	$-11'\ 34''.91$	$-0''.34$	$-4'\ 0''.79$	$-0''.03$
		16	6 6 51	11 4.20	−0.32	−4 8.89	−0.06
		19	9 10 0	10 36.47	−0.30	−3 27.02	−0.22
		19	9 40 0	10 37.65	−0.30	−3 26.54	−0.22
		19	10 10 0	10 39.02	−0.30	−3 26.15	−0.22
		20	9 0 0	10 36.04	−0.27	−2 55.92	−0.25
		20	9 20 0	10 36.91	−0.27	−2 55.46	−0.25
		20	9 40 0	10 37.81	−0.27	−2 55.01	−0.25
1900	Mai	13	9 6 53	12 8.99	+0.20	+2 42.83	−0.20
	Juni	7	8 2 32	11 9.76	+0.04	+3 4.98	−0.30
	Okt.	5	6 23 4	12 23.06	−0.21	−4 9.28	−0.04

Tabelle 40. Scheinbarer Ort von Kepler A.

Tag			MEZ	$\alpha_2 - \alpha$	Korr.	$\delta_2 - \delta$	Korr.
1898	März	4	$7^h\ 29^m\ 2^s$	$+\ 8'\ 45''.94$	$+0''.67$	$+0'\ 1''.50$	$+0''.64$
	Mai	2	8 58 23	7 18.40	+0.53	−2 41.53	+0.16
	Juni	1	9 32 50	8 11.99	+0.41	−2 43.35	+0.11
	Sept.	26	8 2 3	8 56.71	−0.25	+5 37.86	+0.73
	Okt.	3	9 58 13	9 46.42	−0.26	+5 1.61	+0.88
		28	8 2 45	8 40.21	−0.37	+6 40.46	+0.87
		29	7 48 8	9 4.13	−0.35	+6 8.37	+0.87
	Nov.	26	6 36 59	9 21.63	−0.20	+5 40.02	+0.86
		28	7 30 22	10 1.02	−0.09	+3 42.58	+0.79
		28	9 6 56	10 2.39	−0.09	+3 40.42	+0.79
1899	Jan.	26	7 47 53	8 56.15	+0.37	−0 54.06	+0.31
		27	10 29 17	8 18.99	+0.35	−1 40.37	+0.20
	Febr.	27	10 52 14	7 25.50	+0.41	−2 54.28	−0.10
	März	23	7 7 13	8 23.94	+0.54	−1 57.11	+0.08
	Okt.	15	6 14 13	7 46.23	−0.37	+6 35.87	+0.63
		15	8 38 59	7 43.11	−0.37	+6 40.07	+0.63
		16	6 0 0	7 52.39	−0.40	+7 0.48	+0.66
		16	6 20 0	7 52.57	−0.40	+7 1.07	+0.66
		16	6 40 0	7 52.65	−0.40	+7 1.65	+0.66
		16	9 0 0	7 51.43	−0.40	+7 4.87	+0.66
		16	9 15 0	7 51.20	−0.40	+7 5.12	+0.66
		16	9 30 0	7 50.84	−0.40	+7 5.32	+0.66
		19	9 17 1	9 35.12	−0.27	+6 19.62	+0.71
		20	9 0 3	10 17.62	−0.17	+5 24.31	+0.66
1900	Febr.	13	7 30 0	9 14.18	+0.45	−2 1.03	−0.04
		13	8 0 0	9 13.65	+0.45	−2 1.73	−0.04
	Juli	14	12 6 34	7 50.75	−0.05	+6 8.91	+0.73
		15	11 44 14	7 44.58	−0.09	+6 42.66	+0.78
		18	12 10 0	8 35.78	−0.07	+6 41.43	+0.78
		18	12 50 0	8 37.63	−0.07	+6 41.85	+0.78

Tag			MEZ	$\alpha_3 - \alpha$	Korr.	$\delta_3 - \delta$	Korr.
1900	Juli	18	$13^h\ 30^m\ 0^s$	+ 8′ 38″.91	— 0″.07	+ 6′ 42″.02	+ 0″.78
	Aug.	12	10 10 0	7 50.32	— 0.26	+ 6 58.77	+ 0.76
		12	10 20 0	7 50.37	— 0.26	+ 6 59.06	+ 0.76
		12	10 30 0	7 50.43	— 0.26	+ 6 59.34	+ 0.76
		16	11 20 0	10 3.24	— 0.04	+ 5 32.13	+ 0.67
		16	11 50 0	10 5.05	— 0.04	+ 5 31.60	+ 0.67
		16	12 20 0	10 6.41	— 0.04	+ 5 31.16	+ 0.67
	Sept.	12	11 43 52	10 3.40	— 0.12	+ 5 55.23	+ 0.68
		12	11 49 39	10 3.63	— 0.12	+ 5 55.17	+ 0.68
		12	11 55 26	10 3.77	— 0.12	+ 5 55.06	+ 0.68
	Okt.	5	6 52 56	6 55.98	— 0.41	+ 6 17.46	+ 0.71

Tabelle 41. Scheinbarer Ort von Egede A.

Tag			MEZ	$\alpha_4 - \alpha$	Korr.	$\delta_4 - \delta$	Korr.
1898	März	4	$7^h\ 47^m\ 22^s$	+ 0′ 0″.91	+ 0″.33	+ 12′ 0″.16	+ 0″.10
		4	7 52 39	+ 0 0.91	+ 0.33	12 0.29	+ 0.10
	Mai	1	8 52 46	+ 1 22.90	+ 0.27	11 34.92	— 0.12
		1	8 57 57	+ 1 22.80	+ 0.27	11 34.89	— 0.12
		2	9 18 50	+ 1 39.51	+ 0.30	11 33.43	— 0.17
		2	9 24 56	+ 1 39.39	+ 0.30	11 33.40	— 0.17
	Juni	1	9 50 33	+ 1 28.64	+ 0.37	11 44.65	— 0.18
		1	9 55 29	+ 1 28.72	+ 0.37	11 44.72	— 0.18
	Sept.	26	8 24 28	— 5 32.70	0.00	12 14.15	+ 0.25
	Okt.	3	10 12 0	— 4 16.11	— 0.24	11 57.63	+ 0.05
	Nov.	21	6 7 59	— 5 47.40	0.00	12 6.57	+ 0.25
		21	6 20 0	— 5 47.81	0.00	12 6.50	+ 0.25
		21	6 31 50	— 5 48.22	0.00	12 6.50	+ 0.25
		23	5 33 38	— 6 0.08	— 0.11	11 51.04	+ 0.22
		23	5 39 37	— 6 0.29	— 0.11	11 51.22	+ 0.22
		28	7 39 3	— 3 8.93	— 0.18	11 51.71	+ 0.10
		28	9 15 12	— 3 7.55	— 0.18	11 54.49	+ 0.10
1899	Jan.	26	7 56 45	+ 0 48.15	+ 0.07	11 8.13	— 0.12
		26	8 1 34	+ 0 48.21	+ 0.07	11 8.24	— 0.12
	Febr.	19	6 42 35	— 1 42.03	+ 0.22	11 50.19	+ 0.02
		21	11 31 0	+ 0 2.68	+ 0.18	11 24.40	— 0.03
		21	11 36 25	+ 0 2.65	+ 0.18	11 24.27	— 0.03
	März	23	7 27 31	+ 1 31.25	+ 0.20	10 54.53	— 0.14
		25	8 16 1	+ 2 1.54	+ 0.01	10 45.63	— 0.18
	April	22	8 1 52	+ 2 3.05	+ 0.20	10 48.72	— 0.35
	Juni	18	9 28 50	+ 1 36.18	+ 0.10	11 13.90	— 0.12
	Aug.	16	8 12 54	— 2 6.98	+ 0.10	12 37.58	0.00
		26	11 2 59	— 4 17.80	— 0.20	12 8.36	— 0.14
		26	11 11 50	— 4 17.47	— 0.20	12 8.73	— 0.14
	Okt.	14	6 19 16	— 6 28.90	— 0.08	12 19.19	— 0.06

Tag			MEZ	$\alpha_4 - \alpha$	Korr.	$\delta_4 - \delta$	Korr.
1899	Okt.	15	$6^h\,22^m\,49^s$	$-6'\,52''.70$	$-0''.11$	$+12'\,11''.79$	$-0''.09$
		15	9 6 45	$-6\;59.03$	-0.11	$12\;13.36$	-0.09
	Nov.	16	6 40 0	$-5\;15.33$	-0.20	$12\;7.13$	-0.19
		16	7 10 0	$-5\;14.97$	-0.20	$12\;8.22$	-0.19
		16	7 40 0	$-5\;14.74$	-0.20	$12\;9.24$	-0.19
	Dez.	14	5 47 30	$-4\;34.46$	-0.12	$12\;2.32$	-0.17
1900	Febr.	8	6 30 54	$-2\;32.12$	$+0.16$	$11\;58.35$	-0.15
		9	6 34 50	$-1\;21.14$	$+0.14$	$11\;44.77$	-0.17
		9	6 42 8	$-1\;20.91$	$+0.14$	$11\;44.82$	-0.17
	Mai	13	9 24 26	$+1\;33.83$	$+0.45$	$11\;24.61$	-0.21
		13	9 32 58	$+1\;34.05$	$+0.45$	$11\;24.87$	-0.21
	Juli	14	12 10 0	$-6\;33.11$	$+0.11$	$12\;23.12$	-0.01
		14	12 25 0	$-6\;33.83$	$+0.11$	$12\;23.19$	-0.01
		14	12 40 0	$-6\;34.53$	$+0.11$	$12\;23.35$	-0.01
		15	11 50 0	$-6\;53.65$	$+0.06$	$12\;9.17$	-0.04
		15	12 5 0	$-6\;54.16$	$+0.06$	$12\;9.45$	-0.04
		15	12 20 0	$-6\;54.81$	$+0.06$	$12\;9.70$	-0.04
	Sept.	12	12 3 31	$-5\;19.02$	-0.21	$12\;15.51$	-0.24
	Okt.	8	7 10 0	$-7\;5.43$	-0.37	$12\;3.48$	-0.24
		8	7 25 0	$-7\;5.47$	-0.37	$12\;4.06$	-0.24
		8	7 40 0	$-7\;5.52$	-0.37	$12\;4.68$	-0.24

Tabelle 42. Scheinbarer Ort von Tycho.

Tag			MEZ	$\alpha_5 - \alpha$	Korr.	$\delta_5 - \delta$	Korr.
1898	März	4	$7^h\,37^m\,3^s$	$-0'\,42''.19$	$+1''.44$	$-10'\,47''.83$	$+0''.26$
		4	7 41 47	$-0\;42.49$	$+1.44$	$10\;47.96$	$+0.26$
	Mai	1	9 4 39	$-3\;36.35$	$+1.28$	$11\;24.63$	-0.06
		1	9 9 21	$-3\;36.52$	$+1.28$	$11\;24.63$	-0.06
		2	9 6 28	$-3\;55.80$	$+1.22$	$11\;38.81$	-0.10
		2	9 11 32	$-3\;56.00$	$+1.22$	$11\;38.85$	-0.10
	Juni	1	9 40 5	$-3\;37.03$	$+1.09$	$12\;17.43$	-0.01
		1	9 44 54	$-3\;36.90$	$+1.09$	$12\;17.27$	-0.01
	Sept.	26	8 12 5	$+5\;57.92$	$+0.20$	$9\;14.29$	$+0.51$
		26	8 17 42	$+5\;57.87$	$+0.20$	$9\;14.16$	$+0.51$
	Okt.	3	10 5 25	$+5\;51.51$	-0.05	$8\;41.02$	$+0.60$
	Nov.	23	5 22 46	$+6\;59.59$	$+0.30$	$7\;30.12$	$+0.62$
1899	Febr.	19	6 33 54	$+3\;44.51$	$+1.11$	$10\;5.05$	$+0.38$
		21	11 19 50	$+0\;49.53$	$+1.24$	$10\;55.47$	$+0.12$
		21	11 25 31	$+0\;49.15$	$+1.24$	$10\;50.52$	$+0.12$
	März	23	7 16 52	$-1\;44.51$	$+1.17$	$11\;19.15$	-0.14
		23	9 9 31	$-1\;50.72$	$+1.17$	$11\;20.52$	-0.14
		24	7 12 55	$-2\;28.55$	$+1.11$	$11\;19.95$	-0.21
		24	7 16 42	$-2\;28.70$	$+1.11$	$11\;20.03$	-0.21
	April	22	7 51 1	$-3\;23.78$	$+1.04$	$11\;24.64$	-0.24

Tag	MEZ	$\alpha_5 - \alpha$	Korr.	$\delta_5 - \delta$	Korr.
1899 April 22	$8^h\ 1^m\ 27^s$	$-3'\ 24''.20$	$+1''.04$	$-11'\ 24''.82$	$-0''.24$
Juni 18	9 16 36	−3 52.52	+0.79	11 26.89	−0.16
18	9 29 14	−3 53.14	+0.79	11 26.75	−0.16
18	9 41 53	−3 53.37	+0.79	11 26.59	−0.16
19	9 21 57	−3 26.03	+0.74	11 38.34	−0.10
Juli 19	9 22 23	−0 39.77	+0.58	11 46.55	+0.11
20	9 2 33	+1 3.33	+0.56	11 36.40	+0.18
Aug. 16	8 4 10	+0 1.06	+0.56	11 30.64	+0.15
24	9 50 0	+7 33.83	−0.08	7 54.58	+0.50
24	10 15 0	+7 34.17	−0.08	7 55.01	+0.50
24	10 40 0	+7 34.53	−0.08	7 55.53	+0.50
26	10 55 21	+7 2.70	+0.02	8 40.33	+0.43
Dez. 14	5 40 0	+6 23.77	+0.72	9 9.37	+0.42
14	6 0 0	+6 23.37	+0.72	9 10.08	+0.42
14	6 20 0	+6 22.95	+0.72	9 10.78	+0.42
1900 Febr. 8	5 58 0	+5 27.51	+1.14	10 6.01	+0.32
8	6 5 46	+5 27.16	+1.14	10 6.16	+0.32
9	6 15 43	+4 14.63	+1.15	10 41.04	+0.21
Juni 7	7 56 10	−3 4.64	+0.87	11 12.49	−0.26
10	8 15 0	−2 3.19	+0.90	11 4.11	−0.10
10	8 25 0	−2 3.27	+0.90	11 4.28	−0.10
10	8 35 0	−2 3.34	+0.90	11 4.37	−0.10
Juli 14	12 52 23	+5 17.06	+0.17	8 58.12	+0.52
15	11 38 6	+5 58.55	+0.17	8 30.64	+0.57
18	12 10 0	+7 2.81	+0.23	8 18.38	+0.61
18	12 30 0	+7 3.15	+0.23	8 18.86	+0.61
18	12 50 0	+7 3.50	+0.23	8 19.46	+0.61
Sept. 12	10 0 0	+7 19.97	+0.15	9 9.29	+0.46
12	10 20 0	+7 20.10	+0.15	9 9.99	+0.46
12	10 40 0	+7 20.19	+0.15	9 10.67	+0.46
15	11 52 44	+4 52.68	+0.25	11 2.56	+0.22
Okt. 5	5 55 3	+4 57.86	+0.49	9 1.71	+0.54
5	6 1 57	+4 57.99	+0.49	9 1.81	+0.54

In den Tabellen 38—42 sind mehr Werte tabuliert, als zur Bearbeitung der hier zu behandelnden Beobachtungen nötig sind. Es sind nämlich in diese Zusammenstellungen auch sogleich die Größen mit aufgenommen worden, die zur Berechnung der Punkte 2. Ordnung gebraucht werden. In den folgenden Tabellen wird die Darstellung der einzelnen Beobachtungen durch die Rechnung gegeben. Die 3 letzten Kolumnen enthalten: die mit $\cos\delta$ multiplizierten Tagesmittel, die rechnungsmäßige Darstellung dieser Größe durch die definitiven Resultate und den schließlich übrigbleibenden Widerspruch zwischen Beobachtung und Rechnung.

Tabelle 43. Mösting A — I. Mondrand.

Tag			MEZ	beob. $(\alpha_1 - \alpha_1)$	$B - R$	$(B - R)\cos\delta$	Σ	v
1898	März	3	$6^h 49^m.0$	$+16'\,57''.10$	$+0''.40$	$+0''.37$	$+1''.38$	$-1''.01$
		4	7 10.5	16 19.28	+2.45	+2.28	+1.35	+0.93
		4	8 18.2	16.44	+2.36			
	Mai	1	8 38.2	14 19.43	+1.00	+0.97	+1.03	−0.06
		1	9 24.3	17.30	+0.94			
		2	8 40.5	14 30.34	+1.87	+1.92	+1.01	+0.91
		2	9 36.0	28.93	+1.98			
	Juni	1	9 13.9	15 58.43	+1.44	+1.46	+0.87	+0.59
		1	10 8.8	58.63	+1.65			
		28	9 18.8	15 1.61	+1.29	+1.01	+0.64	+0.37
		28	9 40.5	0.59	+0.82			
	Sept.	26	7 40.1	18 42.02	+0.18	+0.34	+0.53	−0.19
		26	8 40.2	40.01	+0.53			
		27	7 5.3	18 28.52	+1.25	+1.42	+0.53	+0.89
		27	7 39.8	28.70	+1.61			
	Okt.	28	7 44.6	18 36.39	+0.68	+0.65	+0.55	+0.10
		28	8 18.7	36.59	+0.66			
	Nov.	21	5 39.6	18 32.49	+0.73	+0.90	+0.67	+0.23
		21	6 46.8	29.89	+1.07			
		23	4 49.1	18 22.30	+1.62	+1.39	+0.64	+0.75
		23	5 53.9	22.56	+1.19			
		26	6 21.4	19 1.92	+0.46	+0.89	+0.71	+0.18
		26	7 16.4	4.71	+1.44			
	Dez.	27	10 24.3	18 16.17	+0.61	+0.84	+0.93	−0.09
		27	10 48.0	15.80	+1.24			
1899	Jan.	22	5 55.1	19 21.45	+1.22	+0.98	+1.22	−0.24
		22	6 17.5	21.00	+0.95			
		26	7 26.9	16 12.80	+0.89	+1.08	+1.02	+0.06
		26	8 39.9	12.35	+1.38			
	Febr.	19	6 8.5	19 13.71	+1.06	+0.82	+1.39	−0.57
		19	7 4.3	10.81	+0.75			
		21	11 7.4	17 20.33	+2.52	+2.33	+1.25	+1.08
		21	11 50.1	16.35	+2.45			
	März	23	6 52.2	15 27.31	+1.03	+1.63	+1.12	+0.51
		23	7 40.4	26.97	+2.27			
		23	8 51.7	23.65	+2.11	+1.59	+1.12	+0.47
		23	9 29.3	20.46	+1.01			
		24	7 2.3	14 54.39	+0.33	+0.82	+1.05	−0.23
		24	7 40.7	54.83	+1.32			
		25	7 52.7	14 35.75	+0.26	+0.13	+0.98	−0.85
		25	8 45.4	35.07	+0.01			
	April	22	7 9.1	14 31.17	+1.11	+1.03	+0.88	+0.15
		22	7 23.3	30.88	+0.95			
		22	7 28.8	30.46	+0.60	+0.51	+0.88	−0.37
		22	8 22.9	29.32	+0.42			

Tag			MEZ	beob. $(\alpha_I - \alpha_I)$	$B - R$	$(B - R)\cos\delta$	Σ	v
1899	April	23	$8^h 46^m.0$	+ 14′ 41″.47	+ 1″.44	+ 1″.34	+ 0″.86	+ 0″.48
		23	9 31.6	40.76	+ 1.29			
		25	10 36.8	15 51.95	+ 0.71	+ 0.69	+ 0.93	− 0.24
		25	11 4.9	52.12	+ 0.75			
	Juni	18	9 3.6	14 39.25	+ 1.14	+ 0.68	+ 0.47	+ 0.21
		18	10 1.5	36.63	+ 0.28			
		19	8 55.1	15 24.85	+ 0.34	+ 0.65	+ 0.52	+ 0.13
		19	9 34.3	24.85	+ 1.05			
	Juli	19	8 58.8	17 20.79	− 1.08	− 0.78	+ 0.48	− 1.26
		19	9 46.0	20.82	− 0.65			
		20	8 49.2	18 8.77	− 1.16	− 1.32	+ 0.55	− 1.87
		20	9 33.8	7.72	− 1.77			
	Aug.	14	7 20.1	15 46.16	+ 1.64	+ 1.30	+ 0.23	+ 1.07
		14	7 34.4	45.30	+ 1.20			
		16	7 51.2	17 14.40	− 0.87	− 0.22	+ 0.34	− 0.56
		16	8 38.6	14.23	+ 0.38			
	Okt.	14	5 39.3	17 28.46	− 0.83	− 0.81	+ 0.41	− 1.22
		15	5 57.4	17 38.01	− 0.41	− 0.06	+ 0.42	− 0.48
		15	6 42.3	39.10	+ 0.29			
		15	8 24.3	38.10	+ 0.24	+ 0.47	+ 0.42	+ 0.05
		15	9 19.1	36.52	+ 0.71			
		16	5 50.8	17 57.68	+ 0.03	− 0.15	+ 0.48	− 0.63
		16	6 55.3	59.47	− 0.34			
		17	8 15.3	18 34.26	+ 0.37	+ 0.23	+ 0.54	− 0.31
		17	9 31.0	34.97	+ 0.10			
1900	Jan.	15	8 6.5	17 54.46	+ 1.93	+ 1.85	+ 0.99	+ 0.86
		15	8 18.1	54.35	+ 1.97			

Tabelle 44. Mösting A — II. Mondrand.

Tag			MEZ	beob. $(\alpha_I - \alpha_{II})$	$B - R$	$(B - R)\cos\delta$	Σ	v
1898	Okt.	3	$9^h 42^m.4$	− 13′ 40″.07	− 1″.39	− 0″.98	− 1″.01	+ 0″.03
		3	10 23.0	41.63	− 0.73			
		29	7 32.6	13 36.91	− 0.81	− 0.61	− 1.07	+ 0.46
		29	8 1.5	38.24	− 0.48			
	Nov.	2	9 51.0	14 12.70	− 1.31	− 1.15	− 1.00	− 0.15
		2	10 11.8	13.70	− 1.19			
		28	7 12.9	13 52.14	− 1.00	− 0.94	− 0.89	− 0.05
		28	8 6.1	55.27	− 1.07			
		28	8 50.0	58.32	− 1.37	− 0.94	− 0.89	− 0.05
		28	9 38.6	60.79	− 0.70			
	Dez.	27	10 24.3	14 15.24	− 0.38	—	—	—
		27	10 48.0	15.27	+ 0.95			
1899	Jan.	26	8 40.9	14 38.80	− 0.71	− 0.68	− 0.63	− 0.05
		27	9 57.8	15 0.55	− 0.94	− 1.38	− 0.72	− 0.66
		27	11 9.0	6.20	− 1.89			

Tag		MEZ	beob. $(\alpha_I - \alpha_{II})$	$B - R$	$(B - R)\cos\delta$	Σ	v
1899 Febr.	27	$10^h 34^m.8$	$-16' 18''.75$	$-1''.61$	$-1''.16$	$-0''.75$	$-0''.41$
	27	11 6.3	20.34	−0.74			
April	25	10 36.8	17 21.83	−0.69	−0.65	−0.72	+0.07
	25	11 4.9	23.80	−0.69			
Aug.	24	9 34.1	13 26.64	−0.81	−0.98	−0.92	−0.06
	24	11 1.7	29.80	−1.18			
	25	20 29.7	13 25.67	−1.21	−0.98	−0.88	−0.10
	25	20 44.4	25.01	−0.85			
	26	10 41.2	12 54.53	−1.78	−1.34	−0.81	−0.53
	26	11 28.8	55.16	−1.06			
	26	20 42.7	13 15.66	−1.68	−1.04	−0.84	−0.20
	26	20 57.5	14.53	−0.56			
	27	11 27.1	12 47.04	−0.99	−1.45	−0.80	−0.65
	27	11 47.9	48.81	−2.14			
Okt.	19	9 2.0	14 0.24	−1.21	−0.96	−0.95	−0.01
	19	10 17.8	3.39	−0.80			
	20	8 45.2	13 37.75	−0.96	−0.94	−0.90	−0.04
	20	9 58.6	41.08	−1.05			
Nov.	21	10 2.7	13 32.67	−0.46	−0.70	−0.94	+0.24
	21	10 29.9	34.43	−1.02			
1900 Jan.	15	8 6.5	13 42.68	−0.81	−0.38	−0.66	+0.28
	15	8 18.1	42.51	0.00			
Juni	13	11 4.0	17 1.92	−2.08	−1.49	−0.62	−0.87
	13	11 20.9	2.02	−1.16			
Juli	14	11 28.6	15 47.71	+2.63	—	—	—
	14	11 43.4	48.62	+2.43			
	15	11 28.3	15 18.81	+0.81	+0.81	−0.80	+1.61
	18	11 58.7	14 9.18	−0.33	−0.32	−0.67	+0.35
Sept.	15	12 30.0	12 47.66	+0.06	+0.06	−0.71	+0.77

Tabelle 45. Mösting A — nördl. Rand.

Tag		MEZ	beob. $(\delta_I - \delta_{II})$	$B - R$	Mittel	Σ	v
1898 März	3	$6^h 58^m.2$	$-15' 57''.96$	$-2''.22$	$-2''.22$	$-1''.14$	$-1''.08$
	4	7 18.3	16 26.54	−1.17	−1.51	−1.31	−0.20
	4	8 25.3	29.36	−1.86			
Mai	1	8 46.0	17 50.33	−1.75	−2.06	−1.72	−0.34
	1	9 16.9	51.23	−2.37			
	2	8 47.3	18 18.50	−2.11	−1.78	−1.85	+0.07
	2	9 29.4	18.60	−1.45			
Juni	1	9 21.7	19 8.76	−1.89	−2.21	−1.83	−0.38
	1	10 1.5	9.75	−2.54			
	28	9 26.7	18 39.11	−1.99	−1.76	−1.76	0.00
	28	9 32.4	38.56	−1.53			

Tag		MEZ	beob. $(\delta_1 - \delta_n)$	$B - R$	Mittel	Σ	v
1898 Okt.	3	$9^h 48^m.8$	$-14' 24''.00$	$-2''.21$	$-1''.72$	$-0''.97$	$-0''.75$
	3	10 18.3	23.91	−1.23			
	28	7 53.2	13 57.21	−0.56	−0.55	−0.90	+0.35
	28	8 11.0	57.53	−0.54			
	29	7 39.5	14 3.12	−0.78	−0.83	−0.93	+0.10
	29	7 56.2	3.78	−0.89			
Nov.	2	9 59.5	15 34.72	−1.28	−1.28	−1.23	−0.05
	28	7 20.6	14 55.83	−1.20	−1.18	−1.11	−0.07
	28	8 0.5	57.27	−1.17			
	28	8 56.8	59.26	−1.18	−1.23	−1.11	−0.12
	28	9 32.9	60.53	−1.28			
Dez.	27	10 40.6	15 50.25	−1.25	−1.25	−1.34	+0.09
1899 Febr.	21	11 14.5	16 35.52	−2.20	−2.01	−1.62	−0.39
	21	11 43.3	35.24	−1.83			
März	23	6 59.4	17 26.19	−1.75	−2.05	−1.94	−0.11
	23	7 35.3	27.90	−2.35			
	23	8 57.2	29.63	−2.20	−2.17	−1.94	−0.23
	23	9 23.1	29.93	−2.14			
	24	7 8.0	17 37.17	−1.80	−2.03	−2.02	−0.01
	24	7 34.7	38.68	−2.27			
	25	7 58.8	17 48.06	−2.59	−2.10	−2.07	−0.03
	25	8 39.2	48.59	−1.62			
April	22	7 15.6	17 55.16	−1.28	−1.62	−2.10	+0.48
	22	7 33.4	56.50	−2.00			
	22	8 16.7	57.37	−1.58			
	23	8 51.7	18 5.61	−2.09	−1.97	−2.08	+0.11
	23	9 25.0	6.15	−1.85			
Juni	18	9 10.0	17 57.92	−1.53	−2.05	−1.92	−0.13
	18	9 54.3	58.05	−2.57			
	19	9 0.9	18 6.32	−2.41	−2.32	−1.90	−0.42
	19	9 27.8	5.96	−2.24			
Juli	19	9 5.5	17 52.89	−1.51	−1.48	−1.67	+0.19
	19	9 38.3	52.58	−1.45			
	20	8 55.6	17 41.48	−0.87	−0.49	−1.59	+1.10
	20	9 25.2	40.89	−0.11			
Aug.	14	7 27.3	17 33.15	−0.87	−0.87	−1.71	+0.84
	16	7 57.8	17 31.70	−3.23	−1.93	−1.60	−0.33
	16	8 32.1	28.81	−0.64			
	24	9 43.3	14 23.56	−0.96	−1.24	−1.10	−0.14
	24	10 57.6	26.01	−1.53			
	25	20 38.2	14 31.05	−0.63	−0.63	−1.17	+0.54
	26	10 47.5	14 40.01	−1.42	−1.28	−1.22	−0.06
	26	11 22.6	41.17	−1.32			
	26	20 49.9	14 50.43	−1.13			
	27	11 32.3	15 4.17	−1.93	−1.91	−1.33	−0.58
	27	11 42.4	4.55	−1.91			

Tag			MEZ	beob. $(\delta_1 - \delta_2)$	$B - R$	Mittel	Σ	v
1899	Okt.	19	$9^h\ 8^m.8$	$-15'\ 2''.31$	$-0''.83$	$-0''.82$	$-1''.23$	$+0''.41$
		19	10 12.5	3.91	−0.81			
		20	8 51.3	15 17.82	−1.62	−1.72	−1.32	−0.40
		20	9 54.2	20.21	−1.82			
1900	Juni	13	11 14.4	16 19.20	−0.66	−0.66	−1.46	+0.80
	Juli	14	11 37.5	15 29.00	−0.78	−0.78	−1.10	+0.32

Tabelle 46. Mösting A — südlichem Rand.

Tag			MEZ	beob. $(\delta_1 - \delta_2)$	$B - R$	Mittel	Σ	v
1898	Sept.	26	$7^h\ 48^m.5$	$+16'\ 54''.01$	$+1''.46$	$+1''.47$	$+1''.47$	$0''.00$
		26	8 31.2	55.44	+1.48			
		27	7 12.4	17 18.27	+0.68	+1.03	+1.56	−0.53
		27	7 31.8	19.82	+1.38			
	Nov.	2	10 5.6	14 17.91	+1.47	+1.47	+1.33	+0.14
		21	5 47.4	17 33.12	+0.99	+1.18	+1.61	−0.43
		21	6 38.6	34.34	+1.37			
		23	4 55.4	17 32.23	+0.78	+0.96	+1.68	−0.72
		23	5 46.7	34.27	+1.15			
		26	6 27.2	16 27.05	+1.93	+2.11	+1.62	+0.49
		26	7 8.5	28.44	+2.30			
	Dez.	27	10 33.9	14 5.40	+1.55	+1.55	+1.22	+0.33
1899	Jan.	22	6 4.0	14 55.36	+0.59	+0.59	+1.40	−0.81
		26	7 36.6	12 49.23	+0.92	+1.41	+0.87	+0.54
		26	8 29.8	51.50	+1.91			
		27	10 5.3	12 39.75	+1.82	+1.84	+0.77	+1.07
		27	11 2.9	40.85	+1.87			
	Febr.	19	6 17.2	14 29.49	+0.76	+1.00	+1.27	−0.27
		19	6 57.2	29.56	+1.23			
		27	10 42.8	12 39.88	+1.65	+1.98	+0.51	+1.47
		27	11 0.9	41.03	+2.31			
	Okt.	14	5 47.8	17 11.91	+1.40	+1.40	+1.28	+0.12
		15	6 3.6	17 38.23	+1.02	+0.98	+1.34	−0.34
		15	6 35.1	39.58	+0.95			
		15	8 30.2	43.99	+1.22	+0.97	+1.34	−0.37
		15	9 11.7	44.28	+0.72			
		16	5 57.3	17 54.64	+1.33	+1.15	+1.37	−0.22
		16	6 48.4	56.83	+0.97			
		17	8 20.3	18 5.00	+1.32	+1.18	+1.38	−0.20
		17	9 24.0	6.52	+1.05			
	Nov.	21	10 10.9	12 48.40	−0.92	−0.77	+0.73	−1.50
		21	10 23.2	48.98	−0.62			

Tabelle 47. Messier A — Mösting A.

A.

Tag			MEZ	beob. $(\alpha_2 - \alpha_1)$	$(B - R)\cos\delta$	Σ	v
1898	März	4	$7^h 27^m.6$	$-12'33''.14$	$-0''.18$	$-0''.26$	$+0''.08$
	Mai	2	8 57.0	11 2.67	−0.74	−0.07	−0.67
	Juni	1	9 31.3	12 14.65	−0.67	+0.04	−0.71
	Sept.	26	8 0.6	13 15.16	+0.25	−0.16	+0.41
	Okt.	28	8 1.4	12 39.95	−0.50	−0.16	−0.34
		29	7 46.8	13 0.01	−0.24	−0.13	−0.11
	Nov.	21	5 57.4	12 38.61	−0.99	−0.26	−0.73
		23	5 13.8	12 20.39	−0.26	−0.21	−0.05
		26	6 35.6	13 13.10	−1.21	−0.18	−1.03
		28	7 28.9	13 43.40	−0.34	−0.18	−0.16
		28	9 5.4	13 45.43	+0.49	−0.18	+0.67
1899	Jan.	26	7 46.5	12 8.49	+0.17	−0.19	+0.36
		27	10 27.9	11 32.96	−0.26	−0.11	−0.15
	Febr.	19	6 24.7	13 52.17	−0.14	−0.38	+0.24
		27	10 50.9	10 43.80	+1.55	−0.02	+1.57
	März	23	7 5.9	11 31.37	−0.19	−0.19	0.00
	Okt.	14	5 56.5	12 51.68	−1.10	+0.03	−1.13
		15	6 12.9	12 36.43	−0.25	+0.01	−0.26
		15	8 37.7	12 35.35	+0.54	+0.01	+0.53
		16	6 6.8	12 31.68	+0.33	−0.02	+0.35
		19	9 15.8	13 34.79	+0.38	−0.21	+0.59
		20	8 58.6	13 59.80	+0.32	−0.23	+0.55
1900	Mai	13	9 6.9	11 53.83	+0.96	−0.07	+1.03
	Juni	7	8 2.5	10 55.51	+0.12	+0.01	+0.12
	Okt.	5	6 23.1	12 20.05	−0.23	+0.13	−0.36

B.

Tag			MEZ	beob. $(\delta_2 - \delta_1)$	$B - R$	Σ	v
1898	März	4	$7^h 27^m.6$	$+2'47''.38$	$0''.00$	$-0''.04$	$+0''.04$
	Mai	2	8 57.0	+5 49.51	+0.42	+0.23	+0.19
	Juni	1	9 31.3	+5 41.02	+0.87	+0.49	+0.38
	Sept.	26	8 0.6	−4 1.25	−0.27	−0.06	−0.21
	Okt.	28	8 1.4	−4 58.20	+0.03	−0.30	+0.33
		29	7 46.8	−4 22.36	−0.06	−0.30	+0.24
	Nov.	21	5 57.4	−5 0.11	−0.62	−0.13	−0.49
		23	5 13.8	−5 19.24	+0.09	−0.24	+0.33
		26	6 35.6	−3 50.54	+0.12	−0.31	+0.43
		28	7 28.9	−1 43.24	−0.28	−0.20	−0.08
		28	9 5.4	−1 39.70	−0.22	−0.20	−0.02

Tag			MEZ	beob. $(\delta_2 - \delta_1)$	$B - R$	Σ	v
1899	Jan.	26	$7^h 46^m.5$	$+ 3' 20''.50$	$+ 0''.47$	$+ 0''.15$	$+ 0''.32$
		27	10 27.9	+ 4 14.22	− 0.09	+ 0.23	− 0.32
	Febr.	19	6 24.7	− 0 20.28	+ 0.05	− 0.10	+ 0.15
		27	10 50.9	+ 5 46.29	+ 0.09	+ 0.49	− 0.40
	März	23	7 5.9	+ 4 30.00	+ 0.08	+ 0.29	− 0.21
	Okt.	14	5 56.5	− 4 18.35	− 0.22	+ 0.02	− 0.44
		15	6 12.9	− 5 5.86	− 0.13	− 0.09	− 0.04
		15	8 37.7	− 5 9.86	+ 0.10	− 0.09	+ 0.19
		16	6 6.8	− 5 32.93	− 0.43	− 0.15	− 0.28
		19	9 15.6	− 4 39.31	− 0.50	− 0.27	− 0.23
		20	8 58.6	− 3 38.87	− 0.25	− 0.21	− 0.04
1900	Mai	13	9 6.9	+ 4 39.15	+ 1.43	+ 0.51	+ 0.92
	Juni	7	8 2.5	+ 5 44.52	+ 0.11	+ 0.54	− 0.43
	Okt.	5	6 23.1	− 4 55.00	− 0.59	− 0.14	− 0.45

Tabelle 48. Kepler A — Mösting A.

A.

Tag			MEZ	beob. $(\alpha_2 - \alpha_1)$	$(B - R)\cos\delta$	Σ	v
1898	März	4	$7^h 29^m.0$	$+ 8' 35''.56$	$+ 0''.15$	$+ 0''.07$	$+ 0''.08$
	Mai	2	8 58.4	8 46.64	− 0.49	+ 0.30	− 0.79
	Juni	1	9 32.8	9 27.78	− 0.30	+ 0.30	− 0.60
	Sept.	26	8 2.0	6 53.84	+ 0.63	0.00	+ 0.63
	Okt.	3	9 58.2	6 57.01	− 0.49	− 0.10	− 0.39
		28	8 2.7	6 9.96	− 0.21	− 0.13	− 0.08
		29	7 48.1	5 26.98	+ 0.96	− 0.13	+ 1.09
	Nov.	26	6 37.0	6 36.59	− 0.46	− 0.12	− 0.34
		28	7 30.4	7 26.23	+ 0.17	− 0.06	+ 0.23
		28	9 6.9	7 29.95	+ 0.37	− 0.06	+ 0.43
1899	Jan.	26	7 47.9	8 8.50	+ 0.83	+ 0.12	+ 0.71
		27	10 29.3	8 10.10	+ 0.40	+ 0.19	+ 0.21
	Febr.	27	10 52.2	8 23.99	+ 0.56	+ 0.29	+ 0.27
	März	23	7 7.2	8 9.61	+ 0.29	+ 0.19	+ 0.10
	Okt.	15	6 14.2	6 41.43	+ 0.31	− 0.02	+ 0.33
		15	8 39.0	6 41.30	− 0.51	− 0.02	− 0.49
		16	6 8.2	5 24.80	+ 0.15	− 0.10	+ 0.25
		19	9 17.0	6 36.59	− 0.02	− 0.18	+ 0.16
		20	9 0.0	6 53.42	− 0.04	− 0.13	+ 0.09
1900	Juli	14	12 6.6	7 1.18	− 1.00	− 0.10	− 0.90
		15	11 44.2	6 35.72	− 0.30	− 0.16	− 0.14
		18	12 17.2	6 15.36	+ 0.32	− 0.27	+ 0.59
	Aug.	12	10 12.9	6 30.90	+ 0.29	− 0.17	+ 0.46
		16	11 25.6	6 37.98	− 0.91	− 0.22	− 0.69
	Okt.	5	6 52.9	6 59.70	− 0.01	− 0.07	+ 0.06

B.

Tag		MEZ	beob. $(\delta_2 - \delta_1)$	$B - R$	Σ	v
1898	März 4	$7^h 29^m.0$	+ 1′ 14″.43	+ 0″.96	+ 0″.67	+ 0″.29
	Mai 2	8 58.4	− 0 18.79	+ 0.93	+ 0.73	+ 0.20
	Juni 1	9 32.8	+ 0 3.23	+ 0.90	+ 0.66	+ 0.24
	Sept. 26	8 2.0	+ 5 0.88	+ 0.22	+ 0.54	− 0.32
	Okt. 3	9 58.2	+ 4 11.94	+ 0.90	+ 0.57	+ 0.33
	28	8 2.7	+ 5 1.49	+ 0.20	+ 0.49	− 0.29
	29	7 48.1	+ 4 45.93	+ 0.77	+ 0.52	+ 0.25
	Nov. 26	6 37.0	+ 4 30.89	+ 0.55	+ 0.52	+ 0.03
	28	7 30.4	+ 3 37.06	+ 0.92	+ 0.62	+ 0.30
	28	9 6.9	+ 3 35.18	+ 0.39	+ 0.62	− 0.23
1899	Jan. 26	7 47.9	+ 1 6.92	+ 0.84	+ 0.72	+ 0.12
	27	10 29.3	+ 0 35.43	+ 0.43	+ 0.71	− 0.28
	Febr. 27	10 52.2	− 0 19.89	+ 0.34	+ 0.67	− 0.33
	März 23	7 7.2	+ 0 30.28	+ 1.00	+ 0.74	+ 0.26
	Okt. 15	6 14.2	+ 5 28.97	+ 0.59	+ 0.69	− 0.10
	15	8 39.0	+ 5 31.27	+ 0.60	+ 0.69	− 0.09
	16	6 8.2	+ 5 37.35	+ 0.26	+ 0.57	− 0.31
	19	9 17.0	+ 5 8.08	+ 0.33	+ 0.66	− 0.33
	20	9 0.0	+ 4 42.37	+ 0.73	+ 0.70	+ 0.03
1900	Juli 14	12 6.6	+ 5 11.38	+ 0.51	+ 0.55	− 0.04
	15	11 44.2	+ 5 29.55	+ 0.93	+ 0.56	+ 0.37
	18	12 17.2	+ 5 29.62	+ 0.46	+ 0.63	− 0.17
	Aug. 12	10 12.9	+ 5 41.83	+ 0.63	+ 0.60	+ 0.03
	16	11 25.6	+ 5 0.46	+ 0.81	+ 0.73	+ 0.08
	Okt. 5	6 52.9	+ 5 32.48	+ 0.32	+ 0.61	− 0.29

Tabelle 49. Egede A — Mösting A.

A.

Tag		MEZ	beob. $(\alpha_4 - \alpha_1)$	$(B - R)\cos\delta$	Σ	v
1898	März 4	$7^h 52^m.6$	− 0′ 8″.15	+ 0″.23	− 0″.26	+ 0″.49
	Mai 1	8 52.8	+ 2 47.56	+ 0.80	+ 0.02	+ 0.78
	2	9 18.8	+ 3 8.77	− 0.39	+ 0.07	− 0.46
	Juni 1	9 50.5	+ 2 44.53	− 0.66	+ 0.26	− 0.92
	Sept. 26	8 24.5	− 7 35.10	+ 0.20	+ 0.25	− 0.05
	Okt. 3	10 12.0	− 7 5.41	− 0.48	− 0.09	− 0.37
	Nov. 21	6 31.8	− 8 17.50	− 0.56	+ 0.11	− 0.67
	23	5 33.6	− 8 32.13	+ 0.41	+ 0.03	+ 0.38
	28	7 39.0	− 5 43.40	+ 0.35	− 0.15	+ 0.50
	28	9 15.2	− 5 39.37	+ 0.68	− 0.15	+ 0.83

Tag		MEZ	beob. $(\alpha_4 - \alpha_1)$	$(B-R)\cos\delta$	Σ	v
1899	Jan. 26	$7^h 56^m.7$	+ 0′ 0″.39	+ 0″.40	− 0″.17	+ 0″.57
	Febr. 19	6 42.6	− 4 28.84	− 1.16	− 0.41	− 0.75
	21	11 36.4	− 1 24.66	− 0.85	− 0.30	− 0.55
	März 23	7 27.5	+ 1 17.66	0.00	− 0.14	+ 0.14
	April 22	8 1.9	+ 2 52.10	+ 0.10	+ 0.10	0.00
	Juni 18	9 28.8	+ 3 4.85	+ 0.12	+ 0.41	− 0.29
	Aug. 16	8 12.9	− 1 33.62	+ 0.45	+ 0.53	− 0.08
	26	11 3.0	− 8 4.64	+ 0.09	− 0.25	+ 0.34
	Dez. 14	5 47.5	− 7 38.92	− 0.14	− 0.27	+ 0.13
1900	Mai 13	9 24.4	+ 1 48.52	− 0.06	+ 0.17	− 0.23
	Juli 14	12 12.2	− 7 21.22	+ 0.39	+ 0.06	+ 0.33
	15	11 51.1	− 8 2.26	− 0.12	− 0.01	− 0.11
	Sept. 12	12 3.5	− 8 40.47	+ 0.16	− 0.30	+ 0.46
	Okt. 8	7 18.1	− 8 56.95	+ 0.06	− 0.29	+ 0.35

B.

Tag		MEZ	beob. $(\delta_4 - \delta_1)$	$B-R$	Σ	v
1898	März 4	$7^h 47^m.4$	+ 13′ 12″.58	+ 0″.31	+ 0″.13	+ 0″.18
	Mai 1	8 57.9	13 43.17	+ 0.53	+ 0.32	+ 0.21
	2	9 24.9	13 55.96	+ 0.52	+ 0.40	+ 0.12
	Juni 1	9 55.5	14 30.26	− 0.18	+ 0.37	− 0.55
	Sept. 26	8 24.5	11 36.76	+ 0.28	+ 0.06	+ 0.22
	Okt. 3	10 12.0	11 6.96	− 0.14	− 0.26	+ 0.12
	Nov. 21	6 31.8	10 32.36	− 0.36	− 0.08	− 0.28
	23	5 33.6	9 58.87	− 0.03	− 0.18	+ 0.15
	28	7 39.0	11 45.62	+ 0.28	− 0.07	+ 0.35
	28	9 15.2	11 49.02	+ 0.08	− 0.07	+ 0.15
1899	Jan. 26	8 1.6	13 8.69	+ 0.18	+ 0.29	− 0.11
	Febr. 19	6 42.6	12 22.73	− 0.12	+ 0.03	− 0.15
	21	11 31.0	13 4.38	+ 0.62	+ 0.31	+ 0.31
	März 23	7 27.5	13 21.24	+ 0.20	+ 0.52	− 0.32
	April 22	8 1.9	13 28.78	+ 0.88	+ 0.47	+ 0.41
	Juni 18	9 28.8	13 38.75	+ 0.84	+ 0.52	+ 0.32
	Aug. 16	8 12.9	13 56.61	+ 0.74	+ 0.32	+ 0.42
	26	11 3.0	11 8.27	+ 0.12	− 0.20	+ 0.32
	Dez. 14	5 47.5	11 30.64	− 0.11	− 0.14	+ 0.03
1900	Mai 13	9 24.4	12 59.55	(− 19.89)	—	—
	Juli 14	12 12.2	11 24.64	− 0.40	− 0.19	− 0.21
	15	11 51.1	10 54.70	− 0.39	− 0.26	− 0.13
	Sept. 12	12 3.5	11 34.59	− 0.51	− 0.20	− 0.31
	Okt. 8	7 18.1	11 5.51	+ 0.33	− 0.19	+ 0.52

Tabelle 50. Tycho — Mösting A.

A.

Tag			MEZ	beob. $(\alpha_5 - \alpha_1)$	$(B-R)\cos\delta$	Σ	v
1898	März	4	$7^h 37^m.1$	$-0'\,51''.95$	$+0''.33$	$+0''.80$	$-0''.47$
	Mai	1	9 4.6	$-2\,11.46$	$+0.51$	$+1.03$	-0.52
		2	9 6.5	$-2\,25.74$	$+0.94$	$+0.99$	-0.05
	Juni	1	9 40.1	$-2\,19.87$	$+0.80$	$+0.94$	-0.14
	Sept.	26	8 12.1	$+3\,54.91$	$+0.09$	$+0.45$	-0.36
	Okt.	3	10 5.4	$+3\,3.02$	$+0.30$	$+0.09$	$+0.21$
	Nov.	23	5 22.8	$+4\,27.14$	$+0.24$	$+0.44$	-0.20
1899	Febr.	19	6 33.9	$+0\,59.08$	$+0.53$	$+0.49$	$+0.04$
		21	11 19.8	$-0\,38.13$	-0.24	$+0.69$	-0.93
	März	23	7 16.9	$-1\,57.63$	$+0.99$	$+0.82$	$+0.17$
	April	22	7 51.0	$-2\,34.04$	$+1.30$	$+0.94$	$+0.36$
	Juni	18	9 16.6	$-2\,23.77$	$+0.63$	$+1.02$	-0.39
	Aug.	16	8 4.2	$+0\,35.13$	$+1.38$	$+1.06$	$+0.32$
		26	10 55.3	$+3\,14.79$	-1.05	-0.04	-1.01
	Dez.	14	5 40.5	$+3\,20.45$	$+0.98$	$+0.52$	$+0.46$
1900	Febr.	8	5 58.3	$+1\,49.40$	$+0.84$	$+0.43$	$+0.41$
	Juni	7	7 56.2	$-2\,49.81$	$+1.02$	$+0.82$	$+0.20$
	Juli	14	12 52.4	$+4\,31.00$	$+1.33$	$+0.12$	$+1.21$
		15	11 38.1	$+4\,49.85$	-0.07	$+0.10$	-0.17
		18	12 8.6	$+4\,40.18$	-1.61	$+0.03$	-1.64
	Sept.	12	10 6.0	$+4\,0.75$	$+1.07$	$+0.04$	$+1.03$
		15	11 52.7	$+0\,52.36$	-0.39	$+0.07$	-0.46

B.

Tag			MEZ	beob. $(\delta_5 - \delta_1)$	$B-R$	Σ	v
1898	März	4	$7^h 41^m.8$	$-9'\,35''.72$	$+0''.18$	$+0''.29$	$-0''.11$
	Mai	1	9 9.3	9 16.19	$+0.60$	$+0.38$	$+0.22$
		2	9 11.5	9 16.99	-0.05	$+0.48$	-0.53
	Juni	1	9 44.9	9 30.71	$+0.84$	$+0.54$	$+0.30$
	Sept.	26	8 17.7	9 51.61	$+0.08$	$+0.32$	-0.24
	Okt.	3	10 5.4	9 31.68	-0.11	$+0.29$	-0.40
	Nov.	23	5 22.8	9 22.72	-0.52	$+0.22$	-0.74
1899	Febr.	19	6 33.9	9 32.33	$+0.22$	$+0.39$	-0.17
		21	11 25.5	9 15.52	$+0.75$	$+0.46$	$+0.29$
	März	23	7 16.9	8 52.44	$+0.25$	$+0.52$	-0.17
	April	22	7 51.0	8 45.19	$+0.32$	$+0.58$	-0.26
	Juni	18	9 16.6	9 2.83	-0.10	$+0.48$	-0.58
	Aug.	16	8 4.2	10 11.50	$+0.71$	$+0.47$	$+0.24$
		26	10 55.3	9 39.74	$+0.85$	$+0.37$	$+0.48$
	Dez.	14	5 40.5	9 40.75	$+0.28$	$+0.45$	-0.17

Tag	MEZ	beob. $(\delta_2 - \delta_1)$	$B - R$	Σ	v
1900 Febr. 8	$5^h 58^m.3$	$-9'40''.79$	$+1''.41$	$+0''.48$	$+0''.93$
Juni 7	7 56.2	8 32.60	+0.37	+0.58	−0.21
Juli 14	12 52.4	9 55.42	+1.13	+0.34	+0.79
15	11 38.1	9 43.75	+0.89	+0.35	+0.54
18	12 8.6	9 30.65	+0.04	+0.46	−0.42
Sept. 12	10 6.0	9 50.24	+0.39	+0.50	−0.11
15	11 52.7	9 38.60	+0.66	+0.63	+0.03

Von allen in den Tabellen 43—50 wiedergegebenen Beobachtungen sind nur die nachgenannten von der weitereren Rechnung ausgeschlossen worden:

Tab. 44: 1898 Dez. 27. Der II. Rand war unvollständig beleuchtet.
1900 Juli 14. Trotz guter innerer Übereinstimmung nicht mit den anderen Beobachtungen zu vereinen; wahrscheinlich hohes Gebirge am Rande.

Tab. 49B: 1900 Mai 13. Kein Fehler in der Rechnung; wahrscheinlich bei der Beobachtung in δ ein falsches Objekt eingestellt.

Die Beobachtungen in den Tabellen 43—46 sind zu Abendmitteln zusammengezogen, welche weiterhin gleiches Gewicht erhielten, gleichviel ob die Beobachtungen aus mehr oder weniger Vergleichungen bestanden. Sind an einem Abende mehrere zeitlich getrennte Sätze beobachtet, so wurden diese als selbständige Abendwerte betrachtet.

Die nun folgenden Tabellen enthalten die Differentialformeln nach (35) für alle Beobachtungstage, für welche in Tabelle 38 bis 42 die betreffenden Koordinaten gegeben sind.

Tabelle 51. Mösting A.

$\cos\delta\, d(\alpha_1 - \alpha) =$	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	$df(0.0)$	$df(+0.25)$	$df(+0.4)$
1898 März 3	+0.04	−0.0044	+0.0005	+0.0003	$+1''.04$	$+1''.88$	$+1''.43$
4	+0.01	43	+ 09	+ 02	+1.12	+1.95	+1.50
Mai 1	−0.09	42	+ 16	− 12	+1.09	+1.73	+1.37
2	−0.09	43	+ 18	− 15	+1.08	+1.73	+1.37
Juni 1	−0.08	44	+ 17	− 17	+0.64	+1.23	+0.93
28	−0.11	43	+ 17	− 17	+0.17	+0.68	+0.46
Sept. 26	+0.13	45	− 14	− 09	−1.48	−1.32	−1.28
27	+0.14	44	− 16	− 13	−1.48	−1.33	−1.28

$\cos\delta\, d(\alpha_1-\alpha)=$			$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	$df(0.0)$	$df(+0.25)$	$df(+0.4)$
1898	Okt.	3	+0.17	−0.0042	−0.0010	−0.0007	−1″.43	−1″.32	−1″.26
		28	+0.16	42	− 16	− 16	−1.34	−1.38	−1.26
		29	+0.16	42	− 15	− 13	−1.32	−1.37	−1.25
	Nov.	2	+0.12	43	− 01	+ 01	−1.23	−1.31	−1.18
		21	+0.16	43	− 17	− 14	−0.97	−1.18	−1.01
		23	+0.16	41	− 18	− 18	−0.93	−1.15	−0.99
		26	+0.17	42	− 13	− 10	−0.89	−1.13	−0.96
		28	+0.15	43	− 06	− 02	−0.86	−1.12	−0.94
	Dez.	27	+0.12	43	+ 01	+ 02	−0.08	−0.56	−0.34
1899	Jan.	22	+0.17	43	− 05	00	+0.60	−0.06	+0.18
		26	+0.05	42	+ 10	− 02	+0.77	+0.09	+0.33
		27	+0.01	41	+ 13	− 06	+0.81	+0.14	+0.37
	Febr.	19	+0.17	43	− 02	+ 02	+1.27	+0.43	+0.68
		21	+0.09	43	+ 06	+ 01	+1.32	+0.48	+0.73
		27	−0.06	41	+ 17	− 18	+1.45	+0.63	+0.88
	März	23	+0.02	41	+ 13	− 08	+1.58	+0.65	+0.92
		24	−0.01	41	+ 15	− 12	+1.60	+0.67	+0.94
		25	−0.03	41	+ 17	− 15	+1.60	+0.66	+0.94
	April	22	−0.05	41	+ 17	− 17	+1.46	+0.49	+0.78
		23	−0.06	41	+ 18	− 18	+1.49	+0.49	+0.81
		25	−0.05	43	+ 16	− 14	+1.57	+0.51	+0.85
	Juni	18	−0.09	42	+ 17	− 16	+0.49	−0.52	−0.12
		19	−0.08	43	+ 15	− 13	+0.51	−0.53	−0.12
	Juli	19	−0.03	47	+ 07	− 04	−0.06	−1.10	−0.63
		20	+0.00	48	+ 02	− 03	−0.03	−1.10	−0.62
	Aug.	14	−0.07	44	+ 12	− 08	−0.56	−1.47	−1.02
		16	−0.03	47	+ 04	− 03	−0.52	−1.48	−1.00
		24	+0.20	43	− 18	− 17	−0.54	−1.39	−0.96
		25	+0.20	43	− 15	− 11	−0.62	−1.47	−1.03
		26	+0.23	43	− 13	− 08	−0.66	−1.50	−1.08
		26	+0.22	43	− 12	− 06	−0.69	−1.54	−1.11
		27	+0.23	43	− 09	− 03	−0.73	−1.58	−1.14
	Okt.	14	+0.05	45	− 15	− 14	−0.71	−1.45	−1.04
		15	+0.07	45	− 17	− 17	−0.69	−1.41	−1.02
		16	+0.09	44	− 19	− 19	−0.69	−1.39	−1.00
		17	+0.12	44	− 19	− 18	−0.71	−1.42	−1.03
		19	+0.18	44	− 16	− 12	−0.82	−1.50	−1.12
		20	+0.21	44	− 13	− 07	−0.89	−1.58	−1.19
	Nov.	16	+0.18	44	− 14	− 09	−0.62	−1.25	−0.91
		21	+0.14	43	+ 06	00	−0.87	−1.47	−1.14
	Dez.	14	+0.19	44	− 12	− 05	−0.26	−0.77	−0.54
1900	Jan.	15	+0.13	43	+ 07	− 01	+0.06	−0.39	−0.22
	Febr.	8	+0.22	44	− 06	+ 01	+0.76	+0.38	+0.47
		9	+0.20	44	− 02	+ 02	+0.71	+0.33	+0.42
		13	+0.08	42	+ 09	− 06	+0.64	+0.30	+0.38

$\cos\delta\, d(\alpha_1-\alpha)=$			dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	$df(0.0)$	$df(+0.25)$	$df(+0.4)$
1900	Mai	13	−0.01	−0.0042	+0.0014	−0.0009	+0″.90	+1″.04	+0″.89
	Juni	7	−0.01	40	+ 18	− 16	+0.17	+0.47	+0.31
		10	−0.02	43	+ 13	− 06	+0.31	+0.65	+0.46
		13	+0.01	46	00	− 02	+0.50	+0.90	+0.70
	Juli	14	+0.05	45	− 15	− 15	−0.21	+0.41	+0.18
		15	+0.07	44	− 18	− 18	−0.22	+0.40	+0.18
		18	+0.15	43	− 18	− 14	−0.41	+0.22	0.00
	Aug.	12	+0.09	45	− 19	− 18	−0.88	−0.08	−0.33
		16	+0.21	44	− 14	− 05	−1.18	−0.37	−0.62
	Sept.	12	+0.21	44	− 15	− 07	−1.46	−0.51	−0.79
		15	+0.24	44	− 03	+ 03	−1.79	−0.81	−1.10
	Okt.	5	0.00	45	− 17	− 17	−1.29	−0.22	−0.55
		8	+0.12	45	− 19	− 14	−1.34	−0.27	−0.61

Tabelle 52. Mösting A.

$d(\delta_1-\delta)=$			dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	$df(0.0)$	$df(+0.25)$	$df(+0.4)$
1898	März	3	−0.05	+0.0005	+0.0044	+0.0006	+0″.35	+0″.25	+0″.34
		4	−0.08	+ 09	43	− 05	+0.26	+0.09	+0.21
	Mai	1	−0.14	+ 17	42	− 34	−0.06	−0.32	−0.15
		2	−0.15	+ 18	42	− 39	−0.08	−0.36	−0.36
	Juni	1	−0.18	+ 17	44	− 42	+0.05	−0.17	−0.08
		28	−0.17	+ 17	43	− 42	+0.16	−0.04	+0.06
	Sept.	26	+0.04	− 14	45	+ 23	−0.45	−0.41	−0.39
		27	+0.07	− 16	44	+ 30	−0.53	−0.48	−0.46
	Okt.	3	+0.05	− 10	43	+ 36	−0.36	−0.34	−0.32
		28	+0.11	− 16	42	+ 42	−0.59	−0.61	−0.57
		29	+0.09	− 14	43	+ 41	−0.54	−0.56	−0.52
	Nov.	2	−0.04	− 01	43	+ 14	−0.11	−0.11	−0.12
		21	+0.10	− 16	44	+ 33	−0.52	−0.60	−0.54
		23	+0.12	− 17	42	+ 41	−0.53	−0.52	−0.56
		26	+0.07	− 12	43	+ 38	−0.41	−0.49	−0.44
		28	+0.01	− 06	43	+ 26	−0.27	−0.31	−0.30
	Dez.	27	−0.06	+ 01	44	+ 08	−0.22	−0.21	−0.23
1899	Jan.	22	0.00	− 05	44	+ 21	−0.22	−0.29	−0.28
		26	−0.13	+ 09	42	− 18	−0.45	−0.31	−0.38
		27	−0.15	+ 12	41	− 27	−0.54	−0.34	−0.42
	Febr.	19	−0.03	− 02	44	+ 14	−0.28	−0.32	−0.33
		21	−0.11	+ 06	43	− 08	−0.51	−0.40	−0.46
		27	−0.17	+ 18	40	− 40	−1.00	−0.63	−0.77
	März	23	−0.16	+ 13	41	− 30	−0.92	−0.63	−0.73
		24	−0.17	+ 15	40	− 35	−1.02	−0.68	−0.80
		25	−0.17	+ 17	40	− 39	−1.10	−0.72	−0.85

$d(\delta_1-\delta)=$			$d\lambda_1$		$d\beta_1$	dI	$df(0.0)$	$df(+0.25)$	$df(+0.4)$
1899	April	22	−0.17	+0.0017	+0.0040	−0.0040	−1″.14	−0″.71	−0″.88
		23	−0.17	+ 18	40	− 40	−1.17	−0.74	−0.89
		25	−0.16	+ 16	42	− 35	−1.11	−0.71	−0.86
	Juni	18	−0.15	+ 17	41	− 36	−0.84	−0.41	−0.61
		19	−0.15	+ 16	43	− 32	−0.82	−0.44	−0.62
	Juli	19	−0.10	+ 07	47	− 10	−0.67	−0.51	−0.62
		20	−0.08	+ 02	48	+ 01	−0.68	−0.64	−0.71
	Aug.	14	−0.12	+ 12	44	− 21	−0.55	−0.29	−0.47
		16	−0.08	+ 04	47	− 02	−0.68	−0.60	−0.68
		24	+0.12	− 17	44	+ 43	−0.99	−1.33	−1.20
		25	+0.09	− 14	44	+ 37	−0.96	−1.25	−1.14
		26	+0.07	− 12	44	+ 33	−0.93	−1.17	−1.09
		26	+0.05	− 11	44	+ 31	−0.92	−1.15	−1.07
		27	+0.02	− 09	44	+ 26	−0.87	−1.05	−1.00
	Okt.	14	+0.05	− 15	46	+ 38	−1.08	−1.32	−1.24
		15	+0.07	− 17	45	+ 42	−1.12	−1.40	−1.30
		16	+0.09	− 18	44	+ 44	−1.17	−1.46	−1.35
		17	+0.10	− 19	44	+ 44	−1.19	−1.49	−1.38
		19	+0.08	− 15	45	+ 37	−1.14	−1.39	−1.30
		20	+0.05	− 12	45	+ 30	−1.08	−1.27	−1.20
	Nov.	16	+0.06	− 14	44	+ 32	−1.07	−1.27	−1.21
		21	−0.14	+ 05	43	− 16	−0.67	−0.60	−0.68
	Dez.	14	+0.03	− 12	44	+ 27	−0.93	−1.07	−1.06
1900	Jan.	15	−0.15	+ 06	43	− 20	−0.82	−0.75	−0.84
	Febr.	8	−0.02	− 06	45	+ 12	−0.75	−0.80	−0.84
		9	−0.07	− 02	45	+ 02	−0.80	−0.82	−0.87
		13	+0.18	+ 10	41	− 33	−0.98	−0.79	−0.96
	Mai	13	−0.12	+ 14	42	− 20	−1.18	−1.23	−1.23
	Juni	7	−0.17	+ 17	39	− 33	−0.95	−1.08	−1.06
		10	−0.11	+ 13	43	− 14	−0.95	−1.06	−1.05
		13	−0.03	+ 00	46	+ 17	−0.86	−0.87	−0.92
	Juli	14	+0.06	− 15	45	+ 43	−0.98	−0.77	−0.90
		15	+0.08	− 17	45	+ 44	−1.01	−0.77	−0.91
		18	+0.08	− 18	43	+ 37	−1.08	−0.82	−0.96
	Aug.	12	+0.08	− 18	45	+ 45	−1.29	−0.96	−1.12
		16	+0.03	− 14	45	+ 24	−1.18	−0.91	−1.11
	Sept.	12	+0.04	− 15	45	+ 27	−1.36	−1.03	−1.16
		15	−0.09	− 04	45	− 04	−0.90	−0.82	−0.89
	Okt.	5	+0.05	− 17	45	+ 45	−1.31	−0.91	−1.09
		8	+0.06	− 19	45	+ 37	−1.44	−0.98	−1.16

Für die 4 anderen Hauptpunkte sind die Differentialquotienten $d\alpha : df$ und $d\delta : df$ in der Annahme gegeben, daß der Endwert von f in der Nähe von 0,9 liegt.

Tabelle 53. Messier A.

$\cos\delta\, d\,\alpha_2 - \alpha =$			$d h_2$	$d \lambda_2$	$d \beta_2$	$d I$	$d f$
1898	März	4	− 0.75	− 0.0027	− 0.0007	− 0.0000	− 0″.90
	Mai	2	− 0.80	− 23	− 17	− 15	+ 0.81
	Juni	1	− 0.82	− 25	+ 10	− 07	− 0.58
	Sept.	20	− 0.71	− 31	− 15	− 15	− 0.94
	Okt.	28	− 0.63	− 30	− 18	− 09	− 0.97
		29	− 0.63	− 31	− 10	− 04	− 0.96
	Nov.	21	− 0.65	− 31	− 18	− 17	− 0.79
		23	− 0.63	− 30	− 19	− 14	− 0.78
		26	− 0.63	− 31	− 14	− 01	− 0.74
		28	− 0.66	− 31	− 08	+ 03	− 0.69
1899	Jan.	26	− 0.70	− 28	+ 09	− 08	+ 0.24
		27	− 0.72	− 26	+ 11	− 11	+ 0.25
	Febr.	19	− 0.66	− 32	− 03	+ 03	+ 0.51
		27	− 0.75	− 23	+ 16	− 11	+ 0.51
	März	23	− 0.72	− 27	+ 12	− 12	+ 0.61
		24	− 0.73	− 25	+ 14	− 13	+ 0.61
		25	− 0.73	− 24	+ 16	− 13	+ 0.59
	April	23	− 0.76	− 24	+ 17	− 09	+ 0.48
	Juni	18	− 0.79	− 23	+ 16	− 03	− 0.07
		19	− 0.81	− 24	+ 14	00	− 0.06
	Juli	19	− 0.84	− 28	+ 05	+ 03	− 0.36
		20	− 0.84	− 30	00	00	− 0.37
	Okt.	14	− 0.77	− 29	− 16	− 15	− 0.64
		15	− 0.75	− 29	− 19	− 15	− 0.64
		16	− 0.71	− 29	− 20	− 13	− 0.67
		19	− 0.66	− 33	− 17	00	− 0.85
		20	− 0.64	− 34	− 14	+ 04	− 0.91
1900	Mai	13	− 0.74	− 26	+ 13	+ 04	+ 0.52
	Juni	7	− 0.71	− 25	+ 16	− 03	+ 0.16
	Okt.	5	− 0.80	− 27	− 18	− 11	− 0.25

Tabelle 54. Messier A.

$d(\delta_2 - \delta) =$			$d h_2$	$d \lambda_2$	$d \beta_2$	$d I$	$d f$
1898	März	4	+ 0.10	+ 0.0006	+ 0.0044	− 0.0037	+ 0″.20
	Mai	2	+ 0.22	+ 15	+ 43	− 37	− 0.09
	Juni	1	+ 0.19	+ 15	+ 44	− 17	+ 0.03
	Sept.	26	− 0.22	− 12	+ 45	+ 44	− 0.22
	Okt.	28	− 0.21	− 15	+ 42	+ 23	− 0.42
		29	− 0.19	− 14	+ 42	+ 15	− 0.36

d ($\delta_s - \delta$) =			d h_s	d λ_s	d β_s	d I	d f
1898	Nov.	21	− 0.22	− 0.0015	+ 0.0043	+ 0.0042	− 0″.36
		23	− 0.22	− 16	+ 41	+ 32	− 0.38
		26	− 0.17	− 12	+ 42	+ 08	− 0.28
		28	− 0.10	− 06	+ 43	− 12	− 0.12
1899	Jan.	26	+ 0.09	+ 09	+ 42	− 41	− 0.18
		27	+ 0.13	+ 11	+ 42	− 41	− 0.22
	Febr.	19	− 0.06	− 02	+ 44	− 24	− 0.11
		27	+ 0.21	+ 15	+ 41	− 24	− 0.50
	März	23	+ 0.13	+ 12	+ 42	− 41	− 0.49
		24	+ 0.16	+ 13	+ 41	− 38	− 0.53
		25	+ 0.19	+ 15	+ 41	− 33	− 0.57
	April	23	+ 0.21	+ 15	+ 41	− 21	− 0.60
	Juni	18	+ 0.21	+ 14	+ 42	− 07	− 0.36
		19	+ 0.19	+ 13	+ 43	+ 03	− 0.35
	Juli	19	+ 0.05	+ 06	+ 47	+ 30	− 0.33
		20	− 0.02	+ 02	+ 48	+ 38	− 0.40
	Okt.	14	− 0.23	− 13	+ 45	+ 43	− 0.85
		15	− 0.26	− 15	+ 44	+ 37	− 0.93
		16	− 0.27	− 16	+ 44	+ 31	− 0.97
		19	− 0.22	− 14	+ 44	+ 03	− 0.94
		20	− 0.19	− 11	+ 44	− 07	− 0.85
1900	Mai	13	+ 0.18	+ 11	+ 42	+ 16	− 0.91
	Juni	7	+ 0.20	+ 15	+ 40	− 05	− 0.80
	Okt.	5	− 0.27	− 14	+ 45	+ 30	− 0.84

Tabelle 55. Kepler A.

cos δ d ($\alpha_s - \alpha$) =			d h_s	d λ_s	d β_s	d I	d f
1898	März	4	+ 0.54	− 0.0036	+ 0.0006	− 0.0002	+ 1″.23
	Mai	2	+ 0.47	− 38	+ 15	− 13	+ 1.18
	Juni	1	+ 0.50	− 39	+ 14	− 15	+ 0.78
	Sept.	26	+ 0.57	− 36	− 18	+ 04	− 0.98
	Okt.	3	+ 0.58	− 32	− 14	− 14	− 0.94
		28	+ 0.54	− 32	− 20	− 16	− 0.93
		29	+ 0.55	− 32	− 18	− 17	− 0.93
	Nov.	26	+ 0.56	− 32	− 16	− 16	− 0.70
		28	+ 0.59	− 33	− 10	− 11	− 0.68
1899	Jan.	26	+ 0.55	− 34	+ 07	− 03	+ 0.27
		27	+ 0.53	− 35	+ 10	− 06	+ 0.30
	Febr.	27	+ 0.48	− 36	+ 15	− 15	+ 0.73
	März	23	+ 0.54	− 35	+ 10	− 07	+ 0.77

$\cos\delta\, d(\alpha_s-\alpha)=$		dh_s	$d\lambda_s$	$d\beta_s$	dI	df
1899 Okt.	15	+ 0.51	− 0.0037	− 0.0020	− 0.0009	− 0".77
	16	+ 0.51	− 36	− 22	− 15	− 0.74
	19	+ 0.59	− 34	− 20	− 20	− 0.76
	20	+ 0.62	− 33	− 17	− 17	− 0.79
1900 Febr.	13	+ 0.59	− 33	+ 09	− 07	+ 0.29
Juli	14	+ 0.50	− 38	− 18	− 08	+ 0.20
	15	+ 0.50	− 37	− 21	− 14	+ 0.19
	18	+ 0.54	− 34	− 22	− 22	+ 0.07
Aug.	12	+ 0.51	− 36	− 22	− 18	− 0.22
	16	+ 0.62	− 33	− 18	− 18	− 0.39
Sept.	12	+ 0.62	− 34	− 19	− 19	− 0.52
Okt.	5	+ 0.45	− 39	− 20	− 14	− 0.45

Tabelle 56. Kepler A.

$d(\delta_s-\delta)=$		dh_s	$d\lambda_s$	$d\beta_s$	dI	df
1898 März	4	0.00	+ 0.0007	+ 0.0044	+ 0.0019	+ 0".11
Mai	2	− 0.17	+ 13	+ 44	− 25	− 0.16
Juni	1	− 0.17	+ 12	+ 46	− 43	− 0.05
Sept.	26	+ 0.36	− 10	+ 43	+ 01	− 0.35
Okt.	3	+ 0.32	− 06	+ 41	+ 41	− 0.27
	28	+ 0.43	− 10	+ 40	+ 36	− 0.43
	29	+ 0.39	− 09	+ 40	+ 39	− 0.39
Nov.	26	+ 0.36	− 08	+ 41	+ 41	− 0.36
	28	+ 0.24	− 04	+ 42	+ 39	− 0.29
1899 Jan.	26	− 0.06	+ 06	+ 43	+ 05	− 0.37
	27	− 0.11	+ 08	+ 42	− 05	− 0.40
Febr.	27	− 0.19	+ 12	+ 41	− 35	− 0.66
März	23	− 0.13	+ 09	+ 42	− 10	− 0.62
Okt.	15	+ 0.43	− 12	+ 43	+ 28	− 1.00
	16	+ 0.45	− 12	+ 42	+ 34	− 1.02
	19	+ 0.41	− 10	+ 42	+ 42	− 0.98
	20	+ 0.35	− 08	+ 43	+ 41	− 0.93
1900 Febr.	13	− 0.13	+ 07	+ 42	− 15	− 0.78
Juli	14	+ 0.40	− 10	+ 43	+ 29	− 0.67
	15	+ 0.43	− 12	+ 42	+ 35	− 0.67
	18	+ 0.43	− 12	+ 41	+ 41	− 0.71
Aug.	12	+ 0.45	− 13	+ 42	+ 39	− 0.80
	16	+ 0.36	− 10	+ 43	+ 38	− 0.81
Sept.	12	+ 0.38	− 11	+ 44	+ 39	− 0.85
Okt.	5	+ 0.41	− 12	+ 43	+ 37	− 0 78

Tabelle 57. Egede A.

$\cos\delta\, d(\alpha_4-\alpha) =$			dh_4	$d\lambda_4$	$d\beta_4$	dI	df
1898	März	4	+ 0.00	− 0.0026	+ 0.0014	− 0.0036	+ 1″.05
	Mai	1	+ 0.09	− 25	+ 22	− 31	+ 0.96
		2	+ 0.11	− 25	+ 23	− 26	+ 0.98
	Juni	1	+ 0.09	− 26	+ 22	− 02	+ 0.71
	Sept.	26	− 0.35	− 28	− 03	+ 21	− 0.68
	Okt.	3	− 0.25	− 27	− 03	− 27	− 0.69
	Nov.	21	− 0.37	− 27	− 06	+ 08	− 0.52
		23	− 0.38	− 26	− 07	− 09	− 0.51
		28	− 0.19	− 27	00	− 32	− 0.46
1899	Jan.	26	+ 0.05	− 26	+ 13	− 33	+ 0.30
	Febr.	19	− 0.10	− 27	+ 02	− 34	+ 0.56
		21	0.00	− 26	+ 10	− 34	+ 0.56
	März	23	+ 0.10	− 25	+ 16	− 29	+ 0.65
		25	+ 0.13	− 24	+ 20	− 20	+ 0.62
	April	22	+ 0.13	− 24	+ 21	− 16	+ 0.50
	Juni	18	+ 0.10	− 24	+ 22	+ 05	− 0.08
	Aug.	16	− 0.12	− 28	+ 13	+ 37	− 0.63
		26	− 0.26	− 27	− 06	− 32	− 0.55
	Okt.	14	− 0.41	− 27	− 01	+ 10	− 0.61
		15	− 0.45	− 27	− 03	− 01	− 0.58
	Nov.	16	− 0.32	− 27	− 05	− 32	− 0.47
	Dez.	14	− 0.28	− 27	− 04	− 34	− 0.25
1900	Febr.	8	− 0.15	− 28	− 02	− 35	+ 0.42
		9	− 0.08	− 28	+ 01	− 34	+ 0.37
	Mai	13	+ 0.10	− 25	+ 18	+ 26	+ 0.45
	Juli	14	− 0.42	− 27	− 01	00	+ 0.05
		15	− 0.44	− 27	− 03	− 09	+ 0.07
	Sept.	12	− 0.33	− 28	− 07	− 36	− 0.48
	Okt.	8	− 0.45	− 27	− 06	− 31	− 0.40

Tabelle 58. Egede A.

$d(\delta_4-\delta) =$			dh_4	$d\lambda_4$	$d\beta_4$	dI	df
1898	März	4	+ 0.77	+ 0.0005	+ 0.0026	− 0.0003	+ 0″.13
	Mai	1	+ 0.75	+ 11	+ 26	− 19	− 0.10
		2	+ 0.74	+ 12	+ 26	− 24	− 0.13
	Juni	1	+ 0.76	+ 11	+ 28	− 31	− 0.02
	Sept.	26	+ 0.79	− 09	+ 28	+ 28	− 0.20
	Okt.	3	+ 0.77	− 07	+ 25	− 09	− 0.17
	Nov.	21	+ 0.78	− 11	+ 25	+ 28	− 0.28
		23	+ 0.76	− 11	+ 24	+ 23	− 0.29
		28	+ 0.77	− 04	+ 26	+ 04	− 0.14

$d(\delta_4-\delta)=$		dh_4	$d\lambda_4$	$d\beta_4$	dI	df
1899 Jan.	26	+ 0.72	+ 0.0006	+ 0.0027	− 0.0011	− 0″25
Febr.	19	+ 0.77	− 01	+ 27	− 01	− 0.18
	21	+ 0.74	+ 04	+ 27	− 08	− 0.29
März	23	+ 0.71	+ 09	+ 26	− 18	− 0.52
	25	+ 0.69	+ 11	+ 26	− 25	− 0.60
April	22	+ 0.70	+ 11	+ 26	− 27	− 0.61
Juni	18	+ 0.72	+ 11	+ 26	− 28	− 0.44
Aug.	16	+ 0.81	+ 02	+ 29	+ 04	− 0.41
	26	+ 0.78	− 08	+ 26	+ 05	− 0.60
Okt.	14	+ 0.80	− 10	+ 28	+ 30	− 0.69
	15	+ 0.80	− 11	+ 27	+ 28	− 0.73
	16	+ 0.78	− 09	+ 27	+ 03	− 0.67
Dez.	14	+ 0.78	− 08	+ 27	00	− 0.59
1900 Febr.	8	+ 0.77	− 04	+ 28	− 06	− 0.50
	9	+ 0.76	− 01	+ 29	− 09	− 0.54
Mai	13	+ 0.74	+ 09	+ 25	− 17	− 0.80
Juli	14	+ 0.80	− 10	+ 27	+ 28	− 0.51
	15	+ 0.79	− 11	+ 26	+ 23	− 0.51
Sept.	12	+ 0.79	− 10	+ 28	− 03	− 0.72
Okt.	8	+ 0.78	− 12	+ 28	+ 04	− 0.74

Tabelle 59. Tycho.

$\cos\delta\, d(\alpha_5-\alpha)=$		dh_5	$d\lambda_5$	$d\beta_5$	dI	df
1898 März	4	− 0.04	− 0.0031	+ 0.0010	+ 0.0030	+ 0″98
Mai	1	− 0.23	− 31	+ 13	+ 10	+ 0.86
	2	− 0.25	− 31	+ 14	+ 02	+ 0.87
Juni	1	− 0.22	− 33	+ 14	− 18	+ 0.56
Sept.	26	+ 0.38	− 32	− 04	− 29	− 1.02
Okt.	3	+ 0.35	− 30	00	+ 14	− 1.00
Nov.	23	+ 0.45	− 29	− 06	− 14	− 0.80
1899 Febr.	19	+ 0.22	− 30	+ 07	+ 29	+ 0.37
	21	+ 0.05	− 31	+ 10	+ 28	+ 0.42
März	23	− 0.11	− 30	+ 14	+ 13	+ 0.59
	24	− 0.16	− 30	+ 14	+ 05	+ 0.58
April	22	− 0.22	− 30	+ 15	− 08	+ 0.54
Juni	18	− 0.24	− 30	+ 13	− 23	− 0.11
	19	− 0.21	− 31	+ 13	− 27	− 0.11
Juli	19	− 0.04	− 34	+ 08	− 33	− 0.48
	20	+ 0.06	− 35	+ 05	− 33	− 0.47
Aug.	16	0.00	− 34	+ 05	− 33	− 0.74
	24	+ 0.48	− 30	− 05	00	− 0.75
	26	+ 0.43	− 30	00	+ 17	− 0.86
Dez.	14	+ 0.39	− 31	00	+ 21	− 0.45

$\cos\delta\, d(\alpha_s-\alpha)=$		dh_s	$d\lambda_s$	$d\beta_s$	dI	df
1900 Febr.	8	+ 0.33	− 0.0031	+ 0.0005	+ 0.0029	+ 0.″26
	9	+ 0.25	− 31	+ 08	+ 30	+ 0.22
Juni	7	− 0.20	− 29	+ 16	− 26	+ 0.28
	10	− 0.12	− 31	+ 12	− 32	+ 0.40
Juli	14	+ 0.34	− 33	− 07	− 19	+ 0.22
	15	+ 0.39	− 32	− 08	− 14	+ 0.19
	18	+ 0.45	− 31	− 06	+ 08	+ 0.03
Sept.	12	+ 0.46	− 31	− 02	+ 20	− 0.55
	15	+ 0.29	− 31	+ 08	+ 30	− 0.79
Okt.	5	+ 0.32	− 33	− 10	− 15	− 0.27

Tabelle 6o. Tycho.

$d(\delta_s-\delta)=$		dh_s	$d\lambda_s$	$d\beta_s$	dI	df
1898 März	4	− 0.70	+ 0.0006	+ 0.0030	− 0.0006	+ 0.″15
Mai	1	− 0.74	+ 12	+ 27	− 27	− 0.09
	2	− 0.75	+ 13	+ 26	− 29	− 0.12
Juni	1	− 0.79	+ 12	+ 27	− 25	0.00
Sept.	26	− 0.60	− 10	+ 37	+ 07	− 0.32
Okt.	3	− 0.56	− 07	+ 35	+ 34	− 0.26
Nov.	23	− 0.48	− 12	+ 37	+ 31	− 0.47
1899 Febr.	19	− 0.65	− 01	+ 32	+ 14	− 0.26
	21	− 0.71	+ 04	+ 29	− 06	− 0.32
März	23	− 0.73	+ 09	+ 26	− 23	− 0.48
	24	− 0.73	+ 10	+ 25	− 26	− 0.52
April	22	− 0.73	+ 12	+ 24	− 26	− 0.54
Juni	18	− 0.74	+ 12	+ 26	− 19	− 0.39
	19	− 0.75	+ 11	+ 27	− 16	− 0.40
Juli	19	− 0.76	+ 05	+ 32	− 06	− 0.44
	20	− 0.75	+ 01	+ 34	− 02	− 0.51
Aug.	16	− 0.74	+ 03	+ 33	− 02	− 0.49
	24	− 0.51	− 12	+ 38	+ 39	− 0.95
	26	− 0.56	− 08	+ 36	+ 34	− 0.84
Dez.	14	− 0.59	− 08	+ 36	+ 30	− 0.81
1900 Febr.	8	− 0.65	− 05	+ 34	+ 16	− 0.62
	9	− 0.69	− 02	+ 32	+ 06	− 0.62
Juni	7	− 0.73	+ 12	+ 24	− 17	− 0.71
	10	− 0.72	+ 09	+ 28	− 05	− 0.74
Juli	14	− 0.58	− 11	+ 38	+ 30	− 0.68
	15	− 0.55	− 12	+ 37	+ 35	− 0.69
	18	− 0.54	− 12	+ 37	+ 44	− 0.72
Sept.	12	− 0.59	− 11	+ 37	+ 32	− 0.86
	15	− 0.71	− 03	+ 32	+ 03	− 0.61
Okt.	5	− 0.59	− 12	+ 37	+ 35	− 0.78

Die Tabellen 43 bis 60 gestatten nun ohne weiteres nach den Formeln 35, 36 und 37 die Beobachtungsgleichungen hinzuschreiben. Die Ableitung der Differentialformeln ist etwas umständlich und die Rechnung mühsam und zeitraubend, aber dieser bedeutende Aufwand an Arbeit lohnt sich sehr; denn die obigen Tafeln 51 bis 60 lassen außerordentlich bequem und klar den direkten Zusammenhang zwischen den Beobachtungen und den einzelnen Elementen erkennen.

VIII. Kapitel.

Zunächst folgen nun die Beobachtungsgleichungen, welche die Verbindungen zwischen Mösting A und Mondrand liefern. Um diese Gleichungen in bezug auf die Koeffizienten der Unbekannten homogen zu machen, ist es nur nötig für die 3 selenozentrischen Winkel λ, β, I als Einheit 100″ anzunehmen und dementsprechend die Koeffizienten von $d\lambda$, $d\beta$, dI mit 100 zu multiplizieren.

I. Erster Rand.

		dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	$df(0.0)$	$df(+0.25)$	$df(+0.4)$	dR	$(B-R)\cos\delta$
1898	März 3	+0.04	−0.44	+0.05	+0.03	+1″.04	+1″.88	+1″.43	+1.00	+0″.37
	4	+0.01	−0.43	+0.09	+0.02	+1.12	+1.95	+1.50		+2.28
	Mai 1	−0.09	−0.42	+0.16	−0.12	+1.09	+1.73	+1.37		+0.97
	2	−0.09	−0.43	+0.18	−0.15	+1.08	+1.73	+1.37		+1.92
	Juni 1	−0.08	−0.44	+0.17	−0.17	+0.64	+1.23	+0.93		+1.46
	28	−0.11	−0.43	+0.17	−0.17	+0.17	+0.68	+0.46		+1.01
	Sept. 26	+0.13	−0.45	−0.14	−0.09	−1.48	−1.32	−1.28		+0.34
	27	+0.14	−0.44	−0.16	−0.13	−1.48	−1.33	−1.28		+1.42
	Okt. 28	+0.16	−0.42	−0.16	−0.16	−1.34	−1.38	−1.26		+0.65
	Nov. 21	+0.16	−0.43	−0.17	−0.14	−0.97	−1.18	−1.01		+0.90
	23	+0.16	−0.41	−0.18	−0.18	−0.93	−1.15	−0.99		+1.39
	26	+0.17	−0.42	−0.13	−0.10	−0.89	−1.13	−0.96		+0.89
	Dez. 27	+0.12	−0.43	+0.01	+0.02	−0.08	−0.56	−0.34		+0.84
1899	Jan. 22	+0.17	−0.43	−0.05	0.00	+0.60	−0.06	+0.18		+0.98
	26	+0.05	−0.42	+0.10	−0.02	+0.77	+0.09	+0.33		+1.08
	Febr. 19	+0.17	−0.43	−0.02	+0.02	+1.27	+0.43	+0.68		+0.82
	21	+0.09	−0.43	−0.06	+0.01	+1.32	+0.48	+0.73		+2.33
	März 23	+0.02	−0.41	+0.13	−0.08	+1.58	+0.65	+0.92		+1.63
	23	+0.02	−0.41	+0.13	−0.08	+1.58	+0.65	+0.92		+1.59
	24	−0.01	−0.41	+0.15	−0.12	+1.60	+0.67	+0.94		+0.82
	25	−0.03	−0.41	+0.17	−0.15	+1.60	+0.66	+0.94		+0.13

			dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	$df(0.0)$	$df(+0.25)$	$df(+0.4)$	dR	$(B-R)\cos\delta$
1899	April	22	−0.05	−0.41	+0.17	−0.17	+1″.46	+0″.49	+0″.78	+1.00	+1″.03
		22	−0.05	−0.41	+0.17	−0.17	+1.46	+0.49	+0.78		+0.51
		23	−0.06	−0.41	+0.18	−0.18	+1.49	+0.49	+0.81		+1.34
		25	−0.05	−0.43	+0.16	−0.14	+1.57	+0.51	+0.85		+0.69
	Juni	18	−0.09	−0.42	+0.17	−0.16	+0.49	−0.52	−0.12		+0.68
		19	−0.08	−0.43	+0.15	−0.13	+0.51	−0.53	−0.12		+0.65
	Juli	19	−0.03	−0.47	+0.07	−0.04	−0.06	−1.10	−0.63		−0.78
		20	0.00	−0.48	+0.02	−0.03	−0.03	−1.10	−0.62		−1.32
	Aug.	14	−0.07	−0.44	+0.12	−0.08	−0.56	−1.47	−1.02		+1.30
		16	−0.03	−0.47	+0.04	−0.03	−0.52	−1.48	−1.00		−0.22
	Okt.	14	+0.05	−0.45	−0.15	−0.14	−0.71	−1.45	−1.04		−0.81
		15	+0.07	−0.45	−0.17	−0.17	−0.69	−1.41	−1.02		−0.06
		15	+0.07	−0.45	−0.17	−0.17	−0.69	−1.41	−1.02		+0.47
		16	+0.09	−0.44	−0.19	−0.19	−0.69	−1.39	−1.00		−0.15
		17	+0.12	−0.44	−0.19	−0.18	−0.71	−1.42	−1.03		+0.23
1900	Jan.	15	+0.13	−0.43	+0.07	−0.01	+0.06	−0.39	−0.22		+1.85

II. Zweiter Rand.

			dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	$df(0.0)$	$df(+0.25)$	$df(+0.4)$	dR	$(B-R)\cos\delta$
1898	Okt.	3	+0.17	−0.42	−0.10	−0.07	−1″.43	−1″.32	−1″.26	−1.00	−0″.98
		29	+0.16	−0.42	−0.15	−0.13	−1.32	−1.37	−1.25		−0.61
	Nov.	2	+0.12	−0.43	−0.01	+0.01	−1.23	−1.31	−1.18		−1.15
		28	+0.15	−0.43	−0.06	−0.02	−0.86	−1.12	−0.94		−0.94
		28	+0.15	−0.43	−0.06	−0.02	−0.86	−1.12	−0.94		−0.94
1899	Jan.	26	+0.05	−0.42	+0.10	−0.02	+0.77	+0.09	+0.33		−0.68
		27	+0.01	−0.41	+0.13	−0.06	+0.81	+0.14	+0.37		−1.38
	Febr.	27	−0.06	−0.41	+0.17	−0.18	+1.45	+0.63	+0.88		−1.16
	April	25	−0.05	−0.43	+0.16	−0.14	+1.57	+0.51	+0.85		−0.65
	Aug.	24	+0.20	−0.43	−0.18	−0.17	−0.54	−1.39	−0.96		−0.98
		25	+0.20	−0.43	−0.15	−0.11	−0.62	−1.47	−1.03		−0.98
		26	+0.23	−0.43	−0.13	−0.08	−0.66	−1.50	−1.08		−1.34
		26	+0.22	−0.43	−0.12	−0.06	−0.69	−1.54	−1.11		−1.04
		27	+0.23	−0.43	−0.09	−0.03	−0.73	−1.58	−1.14		−1.45
	Okt.	19	+0.18	−0.44	−0.16	−0.12	−0.82	−1.50	−1.12		−0.96
		20	+0.21	−0.44	−0.13	−0.07	−0.89	−1.58	−1.19		−0.94
	Nov.	21	+0.14	−0.43	+0.06	0.00	−0.87	−1.47	−1.14		−0.70
1900	Jan.	15	+0.13	−0.43	+0.07	−0.01	+0.06	−0.39	−0.22		−0.38
	Juni	13	+0.01	−0.46	0.00	−0.02	+0.50	+0.90	+0.70		−1.49
	Juli	15	+0.07	−0.44	−0.18	−0.18	−0.22	+0.40	+0.18		+0.81
		18	+0.15	−0.43	−0.18	−0.14	−0.41	+0.22	0.00		−0.32
	Sept.	15	+0.24	−0.44	−0.03	+0.03	−1.79	−0.81	−1.10		+0.06

III. Nördlicher Rand.

			dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	$df(0.0)$	$df(+0.25)$	$df(+0.4)$	dR	$B-R$
1898	März	3	−0.05	+0.05	+0.44	+0.06	+0″.35	+0″.25	+0″.34	−1.00	−2″.22
		4	−0.08	+0.09	+0.43	−0.05	+0.26	+0.09	+0.21		−1.51
	Mai	1	−0.14	+0.17	+0.42	−0.34	−0.06	−0.32	−0.15		−2.06
		2	−0.15	+0.18	+0.42	−0.39	−0.08	−0.36	−0.36		−1.78
	Juni	1	−0.18	+0.17	+0.44	−0.42	+0.05	−0.17	−0.08		−2.21
		28	−0.17	+0.17	+0.43	−0.42	+0.16	−0.04	+0.06		−1.76
	Okt.	3	+0.05	−0.10	+0.43	+0.36	−0.36	−0.34	−0.32		−1.72
		28	+0.11	−0.16	+0.42	+0.42	−0.59	−0.61	−0.57		−0.55
		29	+0.09	−0.14	+0.43	+0.41	−0.54	−0.56	−0.52		−0.83
	Nov.	2	−0.04	−0.01	+0.43	+0.14	−0.11	−0.11	−0.12		−1.28
		28	+0.01	−0.06	+0.43	+0.26	−0.27	−0.31	−0.30		−1.18
		28	+0.01	−0.06	+0.43	+0.26	−0.27	−0.31	−0.30		−1.23
	Dez.	27	−0.06	+0.01	+0.44	+0.08	−0.22	−0.21	−0.23		−1.25
1899	Febr.	21	−0.11	+0.06	+0.43	−0.08	−0.51	−0.40	−0.46		−2.01
	März	23	−0.16	+0.13	+0.41	−0.30	−0.92	−0.63	−0.73		−2.05
		23	−0.16	+0.13	+0.41	−0.30	−0.92	−0.63	−0.73		−2.17
		24	−0.17	+0.15	+0.40	−0.35	−1.02	−0.68	−0.80		−2.03
		25	−0.17	+0.17	+0.40	−0.39	−1.10	−0.72	−0.85		−2.10
	April	22	−0.17	+0.17	+0.40	−0.40	−1.14	−0.71	−0.88		−1.62
		23	−0.17	+0.18	+0.40	−0.40	−1.17	−0.74	−0.89		−1.97
	Juni	18	−0.15	+0.17	+0.41	−0.36	−0.84	−0.41	−0.61		−2.05
		19	−0.15	+0.16	+0.43	−0.32	−0.82	−0.44	−0.62		−2.32
	Juli	19	−0.10	+0.07	+0.47	−0.10	−0.67	−0.51	−0.62		−1.48
		20	−0.08	+0.02	+0.48	+0.01	−0.68	−0.64	−0.71		−0.49
	Aug.	14	−0.12	+0.12	+0.44	−0.21	−0.55	−0.29	−0.47		−0.87
		16	−0.08	+0.04	+0.47	−0.02	−0.68	−0.60	−0.68		−1.93
		24	+0.12	−0.17	+0.44	+0.43	−0.99	−1.33	−1.20		−1.24
		25	+0.09	−0.14	+0.44	+0.37	−0.96	−1.25	−1.14		−0.63
		26	+0.06	−0.12	+0.44	+0.33	−0.93	−1.17	−1.09		−1.28
		27	+0.02	−0.09	+0.44	+0.26	−0.87	−1.05	−1.00		−1.91
	Okt.	19	+0.08	−0.15	+0.45	+0.37	−1.14	−1.39	−1.30		−0.82
		20	+0.05	−0.12	+0.45	+0.30	−1.08	−1.27	−1.20		−1.72
1900	Juni	13	−0.03	0.00	+0.46	+0.17	−0.86	−0.87	−0.92		−0.66
	Juli	14	+0.06	−0.15	+0.45	+0.43	−0.98	−0.77	−0.90		−0.78

IV. Südlicher Rand.

			dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	$df(0.0)$	$df(+0.25)$	$df(+0.4)$	dR	$B-R$
1898	Sept.	26	+0.04	−0.14	+0.45	+0.23	−0″.45	−0″.41	−0″.39	+1.00	+1″.47
		27	+0.07	−0.16	+0.44	+0.30	−0.53	−0.48	−0.46		+1.03
	Nov.	2	−0.04	−0.01	+0.43	+0.14	−0.11	−0.11	−0.12		+1.47
		21	+0.10	−0.16	+0.44	+0.33	−0.52	−0.60	−0.54		+1.18

			dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	$df(0.0)$	$df(+0.25)$	$df(+0.4)$	dR	$B-R$
898	Nov.	23	+0.12	−0.17	+0.42	+0.41	−0″.53	−0″.52	−0″.56	+1.00	+0″.96
		26	+0.07	−0.12	+0.43	+0.38	−0.41	−0.49	−0.44		+2.11
	Dez.	27	−0.06	+0.01	+0.44	+0.08	−0.22	−0.21	−0.23		+1.55
899	Jan.	22	0.00	−0.05	+0.44	+0.21	−0.22	−0.29	−0.28		+0.59
		26	−0.13	+0.09	+0.42	−0.18	−0.45	−0.31	−0.38		+1.41
		27	−0.15	+0.12	+0.41	−0.27	−0.54	−0.34	−0.42		+1.84
	Febr.	19	−0.03	−0.02	+0.44	+0.14	−0.28	−0.32	−0.33		+1.00
		27	−0.17	+0.18	+0.40	−0.40	−1.00	−0.63	−0.77		+1.98
	Okt.	14	+0.05	−0.15	+0.46	+0.38	−1.08	−1.32	−1.24		+1.40
		15	+0.07	−0.17	+0.45	+0.42	−1.12	−1.40	−1.30		+0.98
		15	+0.07	−0.17	+0.45	+0.42	−1.12	−1.40	−1.30		+0.97
		16	+0.09	−0.18	+0.44	+0.44	−1.17	−1.46	−1.35		+1.15
		17	+0.10	−0.19	+0.44	+0.44	−1.19	−1.49	−1.38		+1.18
	Nov.	21	−0.15	+0.05	+0.43	−0.16	−0.67	−0.60	−0.68		−0.77

V. Messier A — Mösting A (Rektaszension).

			dh_2	$d\lambda_2$	$d\beta_2$	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	$(B-R)\cos\delta$
898	März	4	−0.75	−0.27	+0.07	−0.01	+0.43	−0.09	−0.08	−0″.54	−0″.18
	Mai	2	−0.80	−0.23	+0.17	+0.09	+0.43	−0.18	0.00	−0.56	−0.74
	Juni	1	−0.82	−0.25	+0.16	+0.08	+0.44	−0.17	+0.10	−0.35	−0.67
	Sept.	26	−0.71	−0.31	−0.15	−0.13	+0.45	+0.14	−0.06	+0.34	+0.25
	Okt.	28	−0.63	−0.30	−0.18	−0.16	+0.42	+0.16	+0.07	+0.29	−0.50
		29	−0.63	−0.31	−0.16	−0.16	+0.42	+0.15	+0.09	+0.29	−0.24
	Nov.	21	−0.65	−0.31	−0.18	−0.16	+0.43	+0.17	−0.03	+0.22	−0.99
		23	−0.63	−0.30	−0.19	−0.16	+0.41	+0.18	+0.04	+0.21	−0.26
		26	−0.63	−0.31	−0.14	−0.17	+0.42	+0.13	+0.09	+0.22	−1.21
		28	−0.66	−0.31	−0.08	−0.15	+0.43	+0.06	+0.05	+0.25	−0.34
		28	−0.66	−0.31	−0.08	−0.15	+0.43	+0.06	+0.05	+0.25	+0.49
899	Jan.	26	−0.70	−0.28	+0.09	−0.05	+0.42	−0.10	−0.06	−0.09	+0.17
		27	−0.72	−0.26	+0.11	−0.01	+0.41	−0.13	−0.05	−0.12	−0.26
	Febr.	19	−0.66	−0.32	−0.03	−0.17	+0.43	+0.02	+0.01	−0.17	−0.14
		27	−0.75	−0.23	+0.16	+0.06	+0.41	−0.17	+0.07	−0.37	+1.55
	März	23	−0.72	−0.27	+0.12	−0.02	+0.41	−0.13	−0.04	−0.31	−0.19
	Okt.	14	−0.77	−0.29	−0.16	−0.05	+0.45	+0.15	−0.01	+0.40	−1.10
		15	−0.75	−0.29	−0.19	−0.07	+0.45	+0.17	+0.02	+0.38	−0.25
		15	−0.75	−0.29	−0.19	−0.07	+0.45	+0.17	+0.02	+0.38	+0.54
		16	−0.71	−0.29	−0.20	−0.09	+0.44	+0.19	+0.06	+0.33	+0.33
		19	−0.66	−0.33	−0.17	−0.18	+0.44	+0.16	+0.12	+0.27	+0.38
		20	−0.64	−0.34	−0.14	−0.21	+0.44	+0.13	+0.11	+0.28	+0.32
900	Mai	13	−0.74	−0.26	+0.13	+0.01	+0.42	−0.14	+0.13	−0.37	+0.96
	Juni	7	−0.71	−0.25	+0.16	+0.01	+0.40	−0.18	+0.13	−0.15	+0.12
	Okt.	5	−0.80	−0.27	−0.18	0.00	+0.45	+0.17	+0.06	+0.30	−0.23

VI. Messier A — Mösting A (Deklination).

			dh_2	$d\lambda_2$	$d\beta_2$	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	$B-R$
1898	März	4	+0.10	+0.06	+0.44	+0.08	−0.09	−0.43	−0.32	−0″.01	0″.00
	Mai	2	+0.22	+0.15	+0.43	+0.15	−0.18	−0.42	+0.02	+0.27	+0.42
	Juni	1	+0.19	+0.15	+0.44	+0.18	−0.17	−0.44	+0.25	+0.11	+0.87
	Sept.	26	−0.22	−0.12	+0.45	−0.04	+0.14	−0.45	+0.21	+0.17	−0.27
	Okt.	28	−0.21	−0.15	+0.42	−0.11	+0.16	−0.42	−0.19	+0.15	+0.03
		29	−0.19	−0.14	+0.42	−0.09	+0.14	−0.43	−0.26	+0.16	−0.06
	Nov.	21	−0.22	−0.15	+0.43	−0.10	+0.16	−0.44	+0.09	+0.18	−0.62
		23	−0.22	−0.16	+0.41	−0.12	+0.17	−0.42	−0.09	+0.18	+0.09
		26	−0.17	−0.12	+0.42	−0.07	+0.12	−0.43	−0.30	+0.16	+0.12
		28	−0.10	−0.06	+0.43	−0.01	+0.06	−0.43	−0.38	+0.18	−0.28
		28	−0.10	−0.06	+0.43	−0.01	+0.06	−0.43	−0.38	+0.18	−0.22
1899	Jan.	26	+0.09	+0.09	+0.42	+0.13	−0.09	−0.42	−0.23	+0.20	+0.47
		27	+0.13	+0.11	+0.42	+0.15	−0.12	−0.41	−0.14	+0.20	−0.09
	Febr.	19	−0.06	−0.02	+0.44	+0.03	+0.02	−0.44	−0.38	+0.22	+0.05
		27	+0.21	+0.15	+0.41	+0.17	−0.18	−0.40	+0.16	+0.27	+0.09
	März	23	+0.13	+0.12	+0.42	+0.16	−0.13	−0.41	−0.11	+0.24	+0.08
	Okt.	14	−0.23	−0.13	+0.45	−0.05	+0.15	−0.46	+0.05	+0.29	−0.22
		15	−0.26	−0.15	+0.44	−0.07	+0.17	−0.45	−0.05	+0.37	−0.13
		15	−0.26	−0.15	+0.44	−0.07	+0.17	−0.45	−0.05	+0.37	+0.10
		16	−0.27	−0.16	+0.44	−0.09	+0.18	−0.44	−0.13	+0.38	−0.43
		19	−0.22	−0.14	+0.44	−0.08	+0.15	−0.45	−0.34	+0.36	−0.50
		20	−0.19	−0.11	+0.44	−0.05	+0.12	−0.45	−0.37	+0.35	−0.25
1900	Mai	13	+0.18	+0.11	+0.42	+0.12	−0.14	−0.42	+0.36	+0.32	+1.43
	Juni	7	+0.20	+0.15	+0.40	+0.17	−0.17	−0.39	+0.28	+0.26	+0.11
	Okt.	5	−0.27	−0.14	+0.45	−0.05	+0.17	−0.45	−0.15	+0.52	−0.59

VII. Kepler A — Mösting A (Rektaszension).

			dh_2	$d\lambda_2$	$d\beta_2$	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	$(B-R)\cos\delta$
1898	März	4	+0.54	−0.36	+0.06	−0.01	+0.43	−0.09	−0.04	−0″.27	+0″.15
	Mai	2	+0.47	−0.38	+0.15	+0.09	+0.43	−0.18	+0.02	−0.19	−0.49
	Juni	1	+0.50	−0.39	+0.14	+0.08	+0.44	−0.17	+0.02	−0.15	−0.30
	Sept.	26	+0.57	−0.36	−0.18	−0.13	+0.45	+0.14	+0.13	+0.30	+0.63
	Okt.	3	+0.58	−0.32	−0.14	−0.17	+0.42	+0.10	−0.07	+0.32	−0.49
		28	+0.54	−0.32	−0.20	−0.16	+0.42	+0.16	0.00	+0.33	−0.21
		29	+0.55	−0.32	−0.18	−0.16	+0.42	+0.15	−0.04	+0.32	+0.96
	Nov.	26	+0.56	−0.32	−0.16	−0.17	+0.42	+0.13	−0.06	+0.26	−0.46
		28	+0.59	−0.33	−0.10	−0.15	+0.43	+0.06	−0.09	+0.26	+0.17
		28	+0.59	−0.33	−0.10	−0.15	+0.43	+0.06	−0.09	+0.26	+0.37
1899	Jan.	26	+0.55	−0.34	+0.07	−0.05	+0.42	−0.10	−0.01	−0.06	+0.83
		27	+0.53	−0.35	+0.10	−0.01	+0.41	−0.13	0.00	−0.07	+0.40

			$d h_2$	$d \lambda_2$	$d \beta_2$	$d h_1$	$d \lambda_1$	$d \beta_1$	dI	df	$(B-R)\cos\delta$
1899	Febr.	27	+0.48	−0.36	+0.15	+0.06	+0.41	−0.18	+0.03	−0″.15	+0″.56
	März	23	+0.54	−0.35	+0.10	−0.02	−0.41	−0.13	+0.01	−0.15	+0.29
	Okt.	15	+0.51	−0.37	−0.20	−0.07	+0.45	+0.17	+0.08	+0.25	+0.31
		15	+0.51	−0.37	−0.20	−0.07	+0.45	+0.17	+0.08	+0.25	−0.51
		16	+0.51	−0.36	−0.22	−0.09	+0.44	+0.19	+0.04	+0.26	+0.15
		19	+0.59	−0.34	−0.20	−0.18	+0.44	+0.16	−0.08	+0.36	−0.02
		20	+0.62	−0.33	−0.17	−0.21	+0.44	+0.13	−0.10	+0.40	−0.04
1900	Juli	14	+0.50	−0.38	−0.18	−0.05	+0.45	+0.15	+0.07	+0.02	−1.00
		15	+0.50	−0.37	−0.21	−0.07	+0.44	+0.18	+0.04	+0.01	−0.30
		18	+0.54	−0.34	−0.22	−0.15	+0.43	+0.18	−0.08	+0.07	+0.32
	Aug.	12	+0.51	−0.36	−0.22	−0.09	+0.45	+0.19	0.00	+0.11	+0.29
		16	+0.62	−0.33	−0.18	−0.21	+0.44	+0.14	−0.13	+0.23	−0.91
	Okt.	5	+0.45	−0.39	−0.20	0.00	+0.45	+0.17	+0.03	+0.10	−0.01

VIII. Kepler A — Mösting A (Deklination).

			$d h_2$	$d \lambda_2$	$d \beta_2$	$d h_1$	$d \lambda_1$	$d \beta_1$	dI	df	$B-R$
1898	März	4	0.00	+0.07	+0.44	+0.08	−0.09	−0.43	+0.24	−0″.10	+0″.96
	Mai	2	−0.17	+0.13	+0.44	+0.15	−0.18	−0.42	+0.14	+0.20	+0.93
	Juni	1	−0.17	+0.12	+0.46	+0.18	−0.17	−0.44	−0.01	+0.03	+0.90
	Sept.	26	+0.36	−0.10	+0.43	−0.04	+0.14	−0.45	−0.22	+0.04	+0.22
	Okt.	3	+0.32	−0.06	+0.41	−0.05	+0.10	−0.43	+0.05	+0.05	+0.90
		28	+0.43	−0.10	+0.40	−0.11	+0.16	−0.42	−0.06	+0.14	+0.20
		29	+0.39	−0.09	+0.40	−0.09	+0.14	−0.43	−0.02	+0.13	+0.77
	Nov.	26	+0.36	−0.08	+0.41	−0.07	+0.12	−0.43	+0.03	+0.08	+0.55
		28	+0.24	−0.04	+0.42	−0.01	+0.06	−0.43	+0.13	+0.02	+0.92
		28	+0.24	−0.04	+0.42	−0.01	+0.06	−0.43	+0.13	+0.02	+0.39
1899	Jan.	26	−0.06	+0.06	+0.43	+0.13	−0.09	−0.42	+0.23	+0.01	+0.84
		27	−0.11	+0.08	+0.42	+0.15	−0.12	−0.41	+0.22	+0.02	+0.43
	Febr.	27	−0.19	+0.12	+0.41	+0.17	−0.18	−0.40	+0.05	+0.11	+0.34
	März	23	−0.13	+0.09	+0.42	+0.16	−0.13	−0.41	+0.20	+0.11	+1.00
	Okt.	15	+0.43	−0.12	+0.43	−0.07	+0.17	−0.45	−0.14	+0.30	+0.59
		15	+0.43	−0.12	+0.43	−0.07	+0.17	−0.45	−0.14	+0.30	+0.60
		16	+0.45	−0.12	+0.42	−0.09	+0.18	−0.44	−0.10	+0.33	+0.26
		19	+0.41	−0.10	+0.42	−0.08	+0.15	−0.45	+0.05	+0.32	+0.33
		20	+0.35	−0.08	+0.43	−0.05	+0.12	−0.45	+0.11	+0.27	+0.73
1900	Juli	14	+0.40	−0.10	+0.43	−0.06	+0.15	−0.45	−0.14	+0.23	+0.51
		15	+0.43	−0.12	+0.42	−0.08	+0.17	−0.45	−0.09	+0.24	+0.93
		18	+0.43	−0.12	+0.41	−0.08	+0.18	−0.43	+0.04	+0.25	+0.46
	Aug.	12	+0.45	−0.13	+0.42	−0.08	+0.18	−0.45	−0.06	+0.32	+0.63
		16	+0.36	−0.10	+0.43	−0.03	+0.14	−0.45	+0.14	+0.30	+0.81
	Okt.	5	+0.41	−0.12	+0.43	−0.05	+0.17	−0.45	−0.08	+0.31	+0.32

IX. Egede A — Mösting A (Rektaszension).

			dh_4	$d\lambda_4$	$d\beta_4$	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	$(B-R)\cos\delta$
1898	März	4	0.00	−0.26	+0.14	−0.01	+0.43	−0.09	−0.38	−0″.45	+0″.23
	Mai	1	+0.09	−0.25	+0.22	+0.09	+0.42	−0.16	−0.19	−0.39	+0.80
		2	+0.11	−0.25	+0.23	+0.09	+0.43	−0.18	−0.11	−0.39	−0.39
	Juni	1	+0.09	−0.26	+0.22	+0.08	+0.44	−0.17	+0.15	−0.22	−0.66
	Sept.	26	−0.35	−0.28	−0.03	−0.13	+0.45	+0.14	+0.30	+0.60	+0.20
	Okt.	3	−0.25	−0.27	−0.03	−0.17	+0.42	+0.10	−0.20	+0.57	−0.48
	Nov.	21	−0.37	−0.27	−0.06	−0.16	+0.43	+0.17	+0.22	+0.49	−0.56
		23	−0.38	−0 26	−0.07	−0.16	+0.41	+0.18	+0.09	+0.48	+0.41
		28	−0.19	−0.27	0.00	−0.15	+0.43	+0.06	−0.30	+0.48	+0.35
		28	−0.19	−0.27	0.00	−0.15	+0.43	+0.06	−0.30	+0.48	+0.68
1899	Jan.	26	+0.05	−0.26	+0.13	−0.05	+0.42	−0.10	−0.31	−0.03	+0.40
	Febr.	19	−0.10	−0.27	+0.02	−0.17	+0.43	+0.02	−0.36	−0.12	−1.16
		21	0.00	−0.26	+0.10	−0.09	+0.43	−0.06	−0.35	−0.17	−0.85
	März	23	+0.10	−0.25	+0.16	−0.02	+0.41	−0.13	−0.21	−0.27	0.00
	April	22	+0.13	−0.24	+0.21	+0.05	+0.41	−0.17	+0.01	−0.28	+0.10
	Juni	18	+0.10	−0.24	+0.22	+0.09	+0.42	−0.17	+0.21	+0.04	+0.12
	Aug.	16	−0.12	−0.28	+0.13	+0.03	+0.47	−0.04	+0.40	+0.37	+0.45
		26	−0.26	−0.27	−0.06	−0.23	+0.43	+0 13	−0.24	+0.53	+0.09
	Dez.	14	−0.28	−0.27	−0 04	−0.19	+0.44	+0.12	−0.29	+0.29	−0.14
1900	Mai	13	+0.10	−0.25	+0.18	+0.01	+0.42	−0.14	+0.35	−0.44	−0.06
	Juli	14	−0.42	−0.27	−0.01	−0.05	+0.45	+0.15	+0.15	−0.13	+0.39
		15	−0.44	−0.27	−0.03	−0.07	+0.44	+0.18	+0.09	−0.11	−0.12
	Sept.	12	−0.33	−0.28	−0.07	−0.21	+0.44	+0.15	−0.29	+0.31	+0.16
	Okt.	8	−0.45	−0.27	−0.06	−0.12	+0.45	+0.19	−0.17	+0.21	+0.06

X. Egede A — Mösting A (Deklination).

			dh_4	$d\lambda_4$	$d\beta_4$	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	$B-R$
1898	März	4	+0.77	+0.05	+0.26	+0.08	−0.09	−0.43	+0.02	−0″.08	+0″.31
	Mai	1	+0.75	+0.11	+0.26	+0.14	−0.17	−0.42	+0.15	+0.05	+0.53
		2	+0.74	+0.12	+0.26	+0.15	−0.18	−0 42	+0.15	+0.23	+0.52
	Juni	1	+0.76	+0.11	+0.28	+0.18	−0.17	−0.44	+0.11	+0.06	−0.18
	Sept.	26	+0.79	−0.09	+0.28	−0.04	+0.14	−0.45	+0.05	+0.19	−0.28
	Okt.	3	+0.77	−0.07	+0.25	−0.05	+0.10	−0.43	−0.45	+0.15	−0.14
	Nov.	21	+0.78	−0.11	+0.25	−0.10	+0.16	−0.44	−0.05	+0.26	−0.36
		23	+0.76	−0.11	+0.24	−0.12	+0.17	−0.42	−0.18	+0.27	−0.03
		28	+0.77	−0.04	+0.26	−0.01	+0.06	−0.43	−0.22	+0.16	+0.28
		28	+0.77	−0.04	+0.26	−0.01	+0.06	−0.43	−0.22	+0.16	+0.08
1899	Jan.	26	+0.72	+0 06	+0.27	+0.13	−0.09	−0.42	+0.07	+0.13	+0.18
	Febr.	19	+0.77	−0.01	+0.27	+0.03	+0.02	−0.44	−0.15	+0.15	−0.12
		21	+0.74	+0.04	+0.27	+0.11	−0.06	−0.43	0.00	+0.17	+0.62

		dh_4	$d\lambda_4$	$d\beta_4$	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	$B-R$
1899	März 23	+0.71	+0.09	+0.26	+0.16	−0.13	−0.41	+0.12	+0″.21	+0″.20
	April 22	+0.70	+0.11	+0.26	+0.17	−0.17	−0.40	+0.13	+0.27	+0.88
	Juni 18	+0.72	+0.11	+0.26	+0.15	−0.17	−0.41	+0.08	+0.17	+0.84
	Aug. 16	+0.81	+0.02	+0.29	+0.08	−0.04	−0.47	+0.06	+0.27	+0.74
	26	+0.78	−0.08	+0.26	−0.07	+0.12	−0.44	−0.28	+0.49	+0.12
	Dez. 14	+0.78	−0.08	+0.27	−0.03	+0.12	−0.44	−0.27	+0.47	−0.11
1900	Juli 14	+0.80	−0.10	+0.27	−0.06	+0.15	−0.45	−0.15	+0.39	−0.40
	15	+0.79	−0.11	+0.26	−0.08	+0.17	−0.45	−0.21	+0.40	−0.39
	Sept. 12	+0.79	−0.10	+0.28	−0.04	+0.15	−0.45	−0.30	+0.44	−0.51
	Okt. 8	+0.78	−0.12	+0.28	−0.06	+0.19	−0.45	−0.33	+0.42	+0.33

Der 5. Hauptpunkt Tycho muß etwas anders behandelt werden als die 4 ersten Objekte auf Grund seiner durchaus anderen Beschaffenheit. Während nämlich jene 4 Objekte runde mit Wall umgebene Einsenkungen sind, deren Figurschwerpunkt eingemessen wurde, ist der an Tycho beobachtete Punkt die Kuppe eines Berges. Naturgemäß werden bei allen Punkten systematische Beobachtungsfehler eintreten, die von der Beleuchtungsphase abhängen, bei Tycho aber zeigte der direkte Augenschein, daß man vor und nach Vollmond in α einen ganz anderen Punkt fixierte. Es war daher durchaus notwendig bei Tycho schon in der ersten Ausgleichung eine systematische Korrektion $\Delta\alpha$ einzuführen, die vor Vollmond negativ und nach Vollmond positiv genommen werden soll.

XI. Tycho — Mösting A (Rektaszension).

		dh_5	$d\lambda_5$	$d\beta_5$	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	$\Delta\alpha$	$(B-R)\cos\delta$
1898	März 4	−0.04	−0.31	+0.10	−0.01	+0.43	−0.09	+0.28	−0″.52	−1.00	+0″.33
	Mai 1	−0.23	−0.31	+0.13	+0.09	+0.42	−0.16	+0.22	−0.49	−	+0.51
	2	−0.25	−0.31	+0.14	+0.09	+0.43	−0.18	+0.17	−0.50	−	+0.94
	Juni 1	−0.22	−0.33	+0.14	+0.08	+0.44	−0.17	−0.01	−0.37	−	+0.80
	Sept. 26	+0.38	−0.32	−0.04	−0.13	+0.45	+0.14	−0.20	+0.26	−	+0.09
	Okt. 3	+0.35	−0.30	0.00	−0.17	+0.42	+0.10	+0.21	+0.26	+	+0.30
	Nov. 23	+0.45	−0.29	−0.06	−0.16	+0.41	+0.18	+0.04	+0.19	−	+0.24
1899	Febr. 19	+0.22	−0.30	+0.07	−0.17	+0.43	+0.02	+0.27	−0.31	−	+0.53
	21	+0.05	−0.31	+0.10	−0.09	+0.43	−0.06	+0.27	−0.31	−	−0.24
	März 23	−0.11	−0.30	+0.14	−0.02	+0.41	−0.13	+0.21	−0.33	−	+0.99
	April 22	−0.22	−0.30	+0.15	+0.05	+0.41	−0.17	+0.09	−0.24	−	+1.30
	Juni 18	−0.24	−0.30	+0.13	+0.09	+0.42	−0.17	−0.07	+0.01	−	+0.63

		dh_5	$d\lambda_5$	$d\beta_5$	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	$\Delta\alpha$	$(B-R)\cos\delta$
1899 Aug.	16	0.00	−0.34	+0.05	+0.03	+0.47	−0.04	−0.30	+0″.26	−1.00	+1″.38
	26	+0.43	−0.30	0.00	−0.23	+0.43	+0.13	+0.25	+0.22	+	−1.05
Dez.	14	+0.39	−0.31	0.00	−0.19	+0.44	+0.12	+0.26	+0.09	−	+0.98
1900 Febr.	8	+0.33	−0.31	+0.05	−0.22	+0.44	+0.06	+0.28	−0.21	−	+0.84
Juni	7	−0.20	−0.29	+0.16	+0.01	+0.40	−0.18	−0.10	−0.03	−	+1.02
Juli	14	+0.34	−0.33	−0.07	−0.05	+0.45	+0.15	−0.04	+0.04	+	+1.33
	15	+0.39	−0.32	−0.08	−0.07	+0.44	+0.18	+0.04	+0.01	+	−0.07
	18	+0.45	−0.31	−0.06	−0.15	+0.43	+0.18	+0.22	+0.03	+	−1.61
Sept.	12	+0.46	−0.31	−0.02	−0.21	+0.44	+0.15	+0.27	+0.24	+	+1.07
	15	+0.29	−0.31	+0.08	−0.24	+0.44	+0.03	+0.27	+0.31	+	−0.39

XII. Tycho — Mösting A (Deklination).

		dh_5	$d\lambda_5$	$d\beta_5$	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	$B-R$
1898 März	4	−0.70	+0.06	+0.30	+0.08	−0.09	−0.43	−0.01	−0″.06	+0″.18
Mai	1	−0.74	+0.12	+0.27	+0.14	−0.17	−0.42	+0.07	+0.06	+0.60
	2	−0.75	+0.13	+0.26	+0.15	−0.18	−0.42	+0.10	+0.24	−0.05
Juni	1	−0.79	+0.12	+0.27	+0.18	−0.17	−0.44	+0.17	+0.08	+0.84
Sept.	26	−0.60	−0.10	+0.37	−0.04	+0.14	−0.45	−0.16	+0.07	+0.08
Okt.	3	−0.56	−0.07	+0.35	−0.05	+0.10	−0.43	−0.02	+0.06	−0.11
Nov.	23	−0.48	−0.12	+0.37	−0.12	+0.17	−0.42	−0.10	+0.09	−0.52
1899 Febr.	19	−0.65	−0.01	+0.32	+0.03	+0.02	−0.44	0.00	+0.07	+0.22
	21	−0.71	+0.04	+0.29	+0.11	−0.06	−0.43	+0.02	+0.14	+0.75
März	23	−0.73	+0.09	+0.26	+0.16	−0.13	−0.41	+0.07	+0.25	+0.25
April	22	−0.73	+0.12	+0.24	+0.17	−0.17	−0.40	+0.14	+0.34	+0.32
Juni	18	−0.74	+0.12	+0.26	+0.15	−0.17	−0.41	+0.17	+0.22	−0.10
Aug.	16	−0.74	+0.03	+0.33	+0.08	−0.04	−0.47	0.00	+0.19	+0.71
	26	−0.56	−0.08	+0.36	−0.07	+0.12	−0.44	+0.01	+0.25	+0.85
Dez.	14	−0.59	−0.08	+0.36	−0.03	+0.12	−0.44	+0.03	+0.25	+0.28
1900 Febr.	8	−0.65	−0.05	+0.34	+0.02	+0.06	−0.45	+0.04	+0.22	+1.41
Juni	7	−0.73	+0.12	+0.24	+0.17	−0.17	−0.39	−0.16	+0.35	+0.37
Juli	14	−0.58	−0.11	+0.38	−0.06	+0.15	−0.45	−0.13	+0.22	+1.13
	15	−0.55	−0.12	+0.37	−0.08	+0.17	−0.45	−0.09	+0.22	+0.89
	18	−0.54	−0.12	+0.37	−0.08	+0.18	−0.43	+0.07	+0.24	+0.04
Sept.	12	−0.59	−0.11	+0.37	−0.04	+0.15	−0.45	+0.05	+0.30	+0.39
	15	−0.71	−0.03	+0.32	+0.09	+0.04	−0.45	+0.07	+0.28	+0.66

Aus den angeführten Beobachtungsgleichungen ist ohne weiteres ersichtlich, daß einzelne Unbekannte sich nur aus diesem oder jenem Systeme bestimmen lassen. So können dh_1, $d\lambda_1$, $d\beta_1$ nur aus I bis IV, dieselben Größen mit dem Index 2 nur aus V und

VI etc. berechnet werden. Beiträge zur Bestimmung von dI liefern alle Systeme, während df am sichersten aus I bis IV gewonnen wird, wenig geeignet hierzu sind IX bis XII, ganz ungeeignet V bis VIII.

Die Größen $d\lambda_1$, $d\beta_1$ können aus I bis IV nur berechnet werden unter der Annahme, daß die Unbekannte dR für alle 4 Systeme den gleichen Wert hat, oder daß wenigstens dR für den I. und II. Rand denselben Wert besitzt, desgleichen für den nördlichen und südlichen Rand. Die letztere Annahme ist durchaus berechtigt, denn die Beobachtung des nördlichen Randes ist nicht wesentlich anders als die des südlichen. Hingegen ist der Antritt des I. Randes an die α-Fäden eine total andere Beobachtung als das Abgleiten des II. Randes von den Fäden. Ich habe bei den Beobachtungen stets das Gefühl gehabt, daß ich vom Antritt des I. Randes überrascht wurde, daß also die gegebenen Signale zu spät kamen.

Die Differentialquotienten, die oben 2-stellig gegeben wurden, sind 3-stellig berechnet worden. Die Bildung der Normalgleichungen konnte deshalb, völlig genau genug, mit dem Rechenschieber ausgeführt werden, wodurch die an sich sehr beträchtliche Arbeit wesentlich erleichtert wurde.

Aus den Gleichungssystemen I bis IV ergeben sich folgende Normalgleichungen unter der Annahme, daß der wahre Wert von f in der Nähe von 0.5 liegt.

I.

dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	dR	
+ 0.345	− 0.529	− 0.349	− 0.065	− 1.426	+ 1.220	= + 1.016
− 0.529	+ 6.907	− 0.351	+ 1.604	− 4.285	− 15.970	= − 12.292
− 0.349	− 0.351	+ 0.722	− 0.061	+ 4.321	+ 0.890	= + 1.779
− 0.065	+ 1.604	− 0.061	+ 0.565	− 0.583	− 3.750	= − 2.699
− 1.426	− 4.285	+ 4.321	− 0.583	+ 40.807	+ 10.670	= + 18.628
+ 1.220	− 15.970	+ 0.890	− 3.750	+ 10.670	+ 37.000	= + 29.230

II.

dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	dR	
+ 0.553	− 1.256	− 0.301	− 0.181	− 2.635	− 2.910	= − 2.402
− 1.256	+ 4.075	+ 0.456	+ 0.681	+ 3.822	+ 9.460	= + 7.802
− 0.301	+ 0.456	+ 0.332	+ 0.114	+ 1.929	+ 1.040	= + 0.635
− 0.181	+ 0.681	+ 0.114	+ 0.202	+ 0.216	+ 1.590	= + 1.175
− 2.635	+ 3.822	+ 1.929	+ 0.216	+ 20.612	+ 8.780	= + 6.000
− 2.910	+ 9.460	+ 1.040	+ 1.590	+ 8.780	+ 22.000	= + 18.200

III.

dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	dR	
+ 0.438	− 0.466	− 0.812	+ 1.029	+ 0.961	+ 1.940	= + 4.173
− 0.466	+ 0.548	+ 0.369	− 1.292	− 0.215	− 0.940	= − 2.974
− 0.812	+ 0.369	+ 6.382	+ 0.017	− 8.836	− 14.710	= − 22.197
+ 1.029	− 1.292	+ 0.017	+ 3.268	− 0.379	+ 0.190	= + 4.187
+ 0.961	− 0.215	− 8.836	− 0.379	+ 18.819	+ 20.510	= + 30.151
+ 1.940	− 0.940	− 14.710	+ 0.190	+ 20.510	+ 34.000	= + 51.710

IV.

dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	dR	
+ 0.163	− 0.195	+ 0.038	+ 0.440	− 0.199	+ 0.050	= + 0.077
− 0.195	+ 0.321	− 0.563	− 0.752	+ 1.048	− 1.240	= − 1.335
+ 0.038	− 0.563	+ 3.416	+ 1.491	− 5.068	+ 7.830	= + 9.314
+ 0.440	− 0.752	+ 1.491	+ 1.829	− 2.581	+ 3.310	= + 3.782
− 0.199	+ 1.048	− 5.068	− 2.581	+ 9.790	− 11.610	= − 13.646
+ 0.050	− 1.240	+ 7.830	+ 3.310	− 11.610	+ 18.000	= + 21.500

Nimmt man zunächst gleiches Gewicht für alle 4 Systeme an und ebenso nur einen Wert für dR, so erhält man die Lösungen

$$dh_1 = + 3''.4 \qquad dI = + 23''$$
$$d\lambda_1 = + 73'' \qquad df = + 0.26$$
$$d\beta_1 = + 12'' \qquad dR = + 1''.07.$$

Werden diese Größen in die Beobachtungsgleichungen eingesetzt, so folgen aus den übrigbleibenden Widersprüchen als Gewichte der 4 Systeme die Beträge:

1.0, 1.8, 2.8, 1.2.

Durchaus überraschend war das vorstehend angeführte Resultat bezüglich der Größen dh_1 und df, denn die gefundenen Werte widersprachen völlig allen bisherigen Annahmen. Um zu sehen, ob eine Gewichtserteilung hieran etwas Wesentliches ändern würde, wurden die 4 Systeme mit obigen Gewichten zusammengefaßt. Das Resultat war

$$dh_1 = + 2''.6 \qquad dI = + 49''$$
$$d\lambda_1 = + 42'' \qquad df = + 0.19$$
$$d\beta_1 = - 24'' \qquad dR = + 1''.07$$

also gegen vorhin zwar etwas modifiziert, aber doch im ganzen das erste Resultat bestätigend. Da nun zu vermuten war, daß f

in der Nähe von 0.7 und 0.8 liegen würde, mußten vor allem die Koeffizienten von df neu berechnet werden unter der Annahme $f = 0.75$. Diese Koeffizienten sind in den betreffenden Tabellen schon gegeben, damit ändern sich auch die Normalgleichungen, indem dann in jedem System die fünfte Gleichung lauten muß.

	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	dR	
I:	− 1.944	+ 3.340	+ 3.745	+ 1.292	+ 45.653	− 6.970	= + 11.037
II:	− 3.596	+ 7.126	+ 1.934	+ 0.914	+ 28.472	+ 16.580	= + 16.098
III:	+ 0.480	+ 0.309	− 8.472	− 1.604	+ 16.543	+ 19.500	= + 27.330
IV:	− 0.433	+ 1.404	− 5.440	− 3.452	+ 12.495	− 12.380	= − 14.199

Das mit oben genannten Gewichten neugebildete System der Normalgleichungen lieferte nun die Lösung

$$dh_1 = + 4''.7 \qquad dI = + 1''$$
$$d\lambda_1 = + 46'' \qquad df = + 0.42$$
$$d\beta_1 = + 31'' \qquad dR = + 1''.09.$$

Aus den Widersprüchen, die dieses Wertsystem in den Beobachtungsgleichungen übrig läßt, findet man neue Gewichte für die vier Gruppen, die abgerundet lauten

$$1.0, \quad 2.0, \quad 2.25, \quad 1.0.$$

Die Neuberechnung der Differentialquotienten von f vergrößert also die beiden Werte von dh_1 und df ganz bedeutend. Deswegen wurde noch eine dritte Annäherung ausgeführt unter der Annahme $f = 0.9$.

Damit nehmen die fünften Gleichungen der vier Systeme folgende Gestalt an:

	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	dI	df	dR	
I:	− 1.607	+ 0.319	+ 3.638	+ 0.499	+ 32.338	− 0.040	= + 12.728
II:	− 2.950	+ 5.324	+ 1.759	+ 0.573	+ 19.483	+ 12.350	= + 11.131
III:	+ 0.690	+ 0.097	− 8.738	− 1.111	+ 17.513	+ 20.140	= + 28.628
IV:	− 0.329	+ 1.259	− 5.333	− 3.109	+ 11.437	− 12.170	= − 13.938

Die vorläufige Annahme, daß dR in allen vier Systemen denselben Wert besitzt, muß nun vor allem fallen gelassen werden. In die Gleichungen für Rektaszension werde statt dR das Zeichen dR_{I} oder dR_{II} geschrieben, während für die δ-Gleichungen die Bezeichnung dR beibehalten werden soll. Es ist klar, daß aus dem so entstehenden System von Normalgleichungen $d\lambda_1$ nicht bestimmt werden kann. dI findet man aber auch aus den Be-

obachtungen der vier anderen Punkte; man wird daher die Elimination der Unbekannten in anderer Reihenfolge vornehmen und diejenigen, welche nur aus den Gleichungen I bis IV gefunden werden können als Funktionen von dI, $d\lambda_1$ und passenderweise auch von $d\beta_1$ darstellen. Diese definitiven Normalgleichungen heißen dann in abgekürzter Form geschrieben

dh_1	df	dR	dR_I	dR_{II}	$d\beta_1$	dI	$d\lambda_1$	
+2.595	− 6.284	+ 4.415	+ 1.220	− 5.820	− 2.740	+ 2.328	− 4.284	=+ 5.678
	+122.145	+33.145	− 0.040	+24.700	−17.837	− 3.964	+12.444	=+ 85.465
		+94.500	0.000	0.000	−25.267	+ 3.737	− 3.355	=+137.847
			+37.000	0.000	+ 0.890	− 3.750	−15.970	=+ 29.230
				+44.000	+ 2.080	+ 3.180	+18.920	=+ 36.400
					+19.161	+ 1.696	+ 0.828	=− 37.580
						+10.151	− 0.693	=+ 12.854
							+16.611	=− 4.714

Die Lösungen dieser Gleichungen sind

$$\left.\begin{array}{llll}
dI = +0.086 & +0.413\,d\lambda_1 & & \\
d\beta_1 = +0.416 & -0.563\,dI & +0.172\,d\lambda_1 & \\
dh_1 = +2''.84 & +1.314\,d\beta_1 & -1.730\,dI & +0.700\,d\lambda_1 \\
df = +0.31 & +0.168 & -0.009 & +0.002 \\
dR = +1''.22 & +0.147 & +0.044 & +0.002 \\
dR_I = +0''.70 & -0.067 & +0.158 & +0.408 \\
dR_{II} = +1''.03 & +0.032 & -0.296 & -0.339
\end{array}\right\} \quad (61)$$

wobei zu beachten ist, daß für dI, $d\lambda_1$, $d\beta_1$ die Einheit 100″ beträgt. Nimmt man an, daß $d\lambda_1 = 0$ bekannt wäre, dann sind die Unbekannten nebst ihren mittleren Fehlern:

$$\left.\begin{array}{ll}
dh_1 = +3''.17 \pm 1''.40 & dR = +1''.28 \pm 0''.09 \\
df = +0.37 \pm 0.10 & dR_I = +0''.69 \pm 0''.15 \\
d\beta_1 = +37'' \pm 37'' & dR_{II} = +1''.02 \pm 0''.20 \\
dI = +9'' \pm 50'' &
\end{array}\right\} \quad (62)$$

Die Unsicherheiten von dI und $d\beta_1$ sind etwas groß, was daher rührt, daß sich diese beiden Größen bei Verbindungen des Mondrandes mit Mösting A schwer voneinander trennen lassen. Diese Unsicherheit hat nach (61) wieder zur Folge, daß der mittlere Fehler von dh_1 ziemlich groß wird. Um zu sehen, ob die gefundenen Größen (62) die Beobachtungen gut darstellen, wurden die Widersprüche und ihre Quadratsumme gebildet. Wollte man

diese Summe direkt mit der Quadratsumme der absoluten Glieder der Beobachtungsgleichungen vergleichen, so würde man natürlich eine erhebliche Verbesserung erhalten, weil naturgemäß die drei Größen dR, dR_I, dR_{II} sicher bestimmt sind. Ob die Einführung der anderen Unbekannten die Darstellung wesentlich verbessert, wird sich zeigen, wenn man von den absoluten Gliedern jedes Systems erst den Mittelwert abzieht und dann die Quadratsumme bildet. Es ist

I	$[nn] = 23.74$	$[vv] = 17.63$
II	$= 5.80$	5.67
III	$= 10.40$	6.26
IV	$= 6.68$	7.93

d. h. also: Die beiden größeren Reihen I und III werden durch das gefundene Wertsystem gut dargestellt, während II unverändert bleibt und IV sogar verschlechtert wird.

Daß die Reihe II so wenig zur Bestimmung von dh_1, df und dI beiträgt, erklärt sich so ziemlich aus der Kürze der Reihe und der ungünstigen Beschaffenheit der Koeffizienten dieser 3 Unbekannten. Daß ferner Reihe IV durch die gefundenen Werte sogar verschlechtert wird, wird nicht mehr Wunder nehmen, wenn man das eigentümliche Verhalten des Südrandes des Mondes (siehe IX. Kapitel) in Betracht zieht. Es geht daraus hervor, daß Beobachtungen des Südrandes nicht ohne weiteres zu verwenden sind, da sie wegen der hohen Gebirge, welche zeitweilig den Rand bilden, zuvor verbessert werden müssen. Von solchen Korrektionen muß aber vorläufig in dieser Arbeit abgesehen werden, ebenso auch von systematischen Korrektionen der Beobachtungen, welche durch die Beleuchtungsphase hervorgerufen werden. Alles dies kann erst später (siehe letztes Kapitel) voll berücksichtigt werden, wenn wir über die Elemente f und h_1 nicht mehr im Zweifel sind. Das vorläufige und wichtigste Resultat der mikrometrischen Verbindungen zwischen Mösting A und dem Mondrande ist, daß der Radiusvektor von Mösting A um etwa 2″ bis 3″ größer ist als der mittlere Mondradius, wie er aus Sternbedeckungen folgt, und daß f jedenfalls nicht in der Nähe von 0.5, sondern etwa zwischen 0.8 und 0.9 liegt.

Nehmen wir an, daß λ_1, β_1, I anderweitig genau bekannt seien und zwar

$$\lambda_1 = -5^0\ 10'\ 17'', \quad \beta_1 = -3^0\ 10'\ 58'',$$
$$I = 1^0\ 32'\ 16'',$$

— bis auf weiteres die plausibelsten Werte —, dann wäre in (61) einzusetzen

$$d\lambda_1 = +2'', \quad d\beta_1 = +26'' \quad dI = +54'',$$

und wir würden folgendes Wertsystem mit den zugehörigen mittleren Fehlern erhalten:

$$\left.\begin{aligned} dh_1 &= +2''.26 \pm 0''.60 \\ df &= +0.35 \pm 0.07 \\ dR &= +1'.28 \pm 0''.08 \\ dR_I &= +0''.78 \pm 0''.12 \\ dR_{II} &= +0''.87 \pm 0''.13 \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

Die Sicherheit von dh_1 und df wäre dann zufriedenstellend, da dh_1 im Maximum auf $\frac{1}{4}$ seines Wertes verkürzt erscheint.

Aus den weiteren Systemen V bis XII lassen sich nur die Koordinaten der vier anderen Punkte und die Neigung I sicher bestimmen; Versuche, hieraus auch df abzuleiten, stellten sich als völlig illusorisch heraus. Ich habe mich daher darauf beschränkt, aus jedem zusammengehörenden Paare von Gleichungen die betreffenden drei Koordinaten und dI zu berechnen als Funktionen der Koordinaten von Mösting A und von df. Bei Tycho kommt als fünfte zu bestimmende Größe die systematische Korrektion $\Delta\alpha$ hinzu.

Messier A.

Die Anschlüsse von Messier A an Mösting A liefern, in abgekürzter Weise geschrieben die Normalgleichungen:

V. Rektaszension.

dh_2	$d\lambda_2$	$d\beta_2$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+12.538	+5.037	+0.789	−0.609	−0.775	+1.241	−7.575	−0.556	=+1.497
	+2.079	+0.438	−0.257	−0.558	+0.610	−3.083	−0.344	=+0.693
		+0.563	−0.062	−1.086	+0.330	−0.566	−0.547	=+0.576
			+0.129	+0.120	−0.082	+0.379	+0.049	=+0.156
				+2.517	−0.588	+0.647	+1.067	=−0.831
					+0.339	−0.825	−0.304	=+0.346
						+4.613	+0.424	=−0.966
							+0.536	=−0.551

VI. Deklination.

dh_2	$d\lambda_2$	$d\beta_2$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+0.946	+0.613	−0.774	+0.550	−0.580	+0.440	−0.690	+0.807	=+1.294
	+0.403	−0.390	+0.347	−0.299	+0.306	−0.451	+0.411	=+0.833
		+4.629	−1.065	+2.623	+0.130	+0.394	−4.641	=+0.036
			+1.471	−0.537	+0.196	−0.371	+1.076	=+1.102
				+1.769	+0.023	+0.319	−2.635	=−0.205
					+0.279	−0.349	−0.111	=+0.682
						−0.509	−0.415	=−0.960
							+4.659	=−0.014

Eine vorläufige Zusammenfassuug beider Gruppen mit den Gewichten 1 und 2 und Auflösung dieses Systems von Normalgleichungen ergab das Resultat, daß den Deklinationsgleichungen das Gewicht 3 zukommt. V und VI mit den Gewichten 1 und 3 vereinigt geben folgende Gleichungen

dh_2	$d\lambda_2$	$d\beta_2$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+15.376	+6.876	− 1.533	+1.041	−2.515	+2.561	−9.645	+ 1.865	=+5.379
	+3.288	− 0.732	+0.784	−1.455	+1.528	−4.436	+ 0.889	=+3.192
		+14.450	−3.257	+6.783	+0.720	+0.616	−14.470	=+0.684
			+4.542	−1.491	+0.506	−0.734	+ 3.277	=+3.462
				+7.824	−0.519	+1.604	− 6.838	=− 1.446
					+1,176	−1.872	− 0.637	=+2.392
						+6.140	− 0.821	=−3.846
							+14.513	=−0.593

Kepler A.

VII. Rektaszension.

dh_3	$d\lambda_3$	$d\beta_3$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+7.288	−4.701	−1.376	−0.181	+1.777	−1.228	+5.815	+0.918	=+0.383
	+3.089	+0.855	+0.056	−1.019	+0.712	−3.796	−0.564	=−0.193
		+0.704	+0.036	−0.833	+0.426	−1.104	−0.617	=+0.242
			+0.108	−0.109	+0.095	−0.096	−0.021	=+0.055
				+1.353	−0.623	+1.345	+0.717	=−0.031
					+0.366	−0.922	−0.346	=−0.005
						+4.691	+0.739	=+0.246
							+0.556	=−0.263

VIII. Deklination.

dh_3	$d\lambda_3$	$d\beta_3$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+2.832	−0.782	+2.536	−0.315	+1.417	−0.583	+1.147	−2.700	=+3.189
	+0.247	−0.443	+0.161	−0.349	+0.217	−0.362	+0.490	=−0.435
		+4.480	+0.298	+1.701	−0.028	+0.660	−4.606	=+6.595
			+0.435	−0.090	+0.190	−0.226	−0.276	=+0.828
				+1.047	−0.183	+0.508	−1.781	=+2.278
					+0.234	−0.320	+0.064	=+0.173
						+0.528	−0.727	=+0.662
							+4.737	=−6.733

Eine vorläufige Auflösung ergab die Gewichte 1 und 4. Mit diesen Gewichten zusammengefaßt geben die Gleichungen VII und VIII das System

dh_3	$d\lambda_3$	$d\beta_3$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+18.616	−7.829	+ 8.768	−1.441	+7.445	−3.560	+10.403	− 9.882	=+13.139
	+4.077	− 0.917	+0.700	−2.415	+1.580	− 5.244	+ 1.396	=− 1.933
		+18.624	+1.228	+5.971	+0.314	+ 1.536	−19.041	=+26.622
			+1.848	−0.469	+0.855	− 1.000	− 1.125	=+ 3.367
				+5.541	−1.355	+ 3.377	− 6.407	=+ 9.081
					+1.302	− 2.202	− 0.090	=+ 0.687
						+ 6.803	− 2.169	=+ 2.894
							+19.504	=−27.195

Egede A.

IX. Rektaszension.

dh_4	$d\lambda_4$	$d\beta_4$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+1.464	+0.928	+0.299	+0.149	−1.443	+0.602	−1.483	−0.692	=−0.198
	+1.670	−0.371	+0.462	−0.555	+0.465	−2.729	−0.091	=−0.004
		+0.390	−0.011	−0.607	+0.150	+0.635	−0.340	=+0.010
			+1.583	−0.015	+0.350	−0.720	−0.038	=+0.253
				+3.231	−0.773	+0.832	+0.861	=+0.617
					+0.368	−0.731	−0.296	=+0.153
						+4.467	+0.113	=+0.015
							+0.448	=+0.061

X. Deklination.

dh_4	$d\lambda_4$	$d\beta_4$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+13.409	−0.226	+4.655	−1.490	+4.172	+0.496	+0.324	−7.617	=+2.223
	+0.177	−0.063	+0.312	−0.229	+0.188	−0.274	+0.123	=+0.531
		+1.623	−0.488	+1.444	+0.193	+0.088	−2.648	=+0.827
			+0.874	−0.743	+0.265	−0.472	+0.839	=+0.598
				+1.746	−0.009	+0.352	−2.374	=+0.334
					+0.243	−0.287	−0.290	=+0.703
						+0.417	−0.177	=−0.817
							+4.326	=−1.280

Eine kurze Untersuchung über die Genauigkeit der Beobachtungen ergab für α und δ die Gewichte 1 und 1.5, somit die definitiven Normalgleichungen:

dh_4	$d\lambda_4$	$d\beta_4$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+21.557	+0.589	+7.281	−2.086	+4.815	+1.346	−0.997	−12.117	=+3.136
	+1.935	−0.465	+0.930	−0.898	+0.747	−3.140	+ 0.093	=+0.792
		+2.824	−0.743	+1.559	+0.439	+0.767	− 4.312	=+1.250
			+2.894	−1.129	+0.747	−1.428	+ 1.220	=+1.150
				+5.850	−0.786	+1.360	− 2.700	=+1.118
					+0.732	−1.161	− 0.731	=+1.207
						+5.092	− 0.152	=−1.210
							+ 6.937	=−1.859

Tycho.

XI. Rektaszension.

dh_5	$d\lambda_5$	$d\beta_5$	$\Delta\alpha$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+2.052	−0.938	−0.285	+ 2.400	+0.585	+0.917	−0.838	+1.334	+0.824	= − 0.664
	+2.110	−0.337	+ 2.450	−0.798	+0.428	+0.509	−2.935	−0.030	= − 3.108
		+0.198	− 1.410	+0.152	−0.381	+0.040	+0.465	−0.230	= + 0.985
			+22.000	−0.190	+3.610	−0.570	−3.380	+1.750	= −10.760
				+0.950	−0.486	−0.395	+1.116	+0.069	= + 0.253
					+1.754	−0.290	−0.568	+0.549	= − 1.624
						+0.410	−0.728	−0.279	= + 0.096
							+4.091	+0.055	= + 4.282
								+0.414	= − 0.927

XII. Deklination.

dh_5	$d\lambda_5$	$d\beta_5$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+9.615	−0.136	−4.507	−0.318	−2.682	−0.810	+0.195	+6.228	= −6.167
	+0.198	−0.114	+0.099	−0.006	+0.195	−0.282	+0.041	= −0.078
		+2.280	+0.061	+1.286	+0.207	+0.160	−3.044	= +2.973
			+0.200	+0.092	+0.121	−0.139	−0.141	= +0.133
				+0.992	+0.202	+0.010	−1.756	= +1.914
					+0.255	−0.283	−0.394	= +0.456
						+0.406	−0.061	= +0.091
							+4.125	= −4.065

Diese beiden Gruppen geben mit ihren Gewichten 1 und 3 vereinigt das folgende System:

dh_5	$d\lambda_5$	$d\beta_5$	$\Delta\alpha$	dI	df	dh_1	$d\lambda_1$	$d\beta_1$	
+30.897	−1.346	−13.806	+ 2.400	−0.369	−7.129	−3.268	+1.919	+19.508	= −19.165
	+2.704	− 0.679	+ 2.450	−0.501	+0.410	+1.094	−3.781	+ 0.093	= − 3.342
		+ 7.038	− 1.410	+0.335	+3.477	+0.661	+0.945	− 9.362	= + 9.904
			+22.000	−0.190	+3.610	−0.570	−3.380	+ 1.750	= −10.760
				+1.550	−0.210	−0.032	+0.699	− 0.354	= + 0.652
					+4.730	+0.316	−0.538	− 4.719	= + 4.118
						+1.175	−1.577	− 1.461	= + 1.464
							+5.309	− 0.128	= + 4.555
								+12.789	= −13.122

Die Lösungen der Gleichungen V bis XII sind folgende:

Messier A.

$$(64)\begin{cases} dI = +0.667 - 0.170\,df + 0.004\,dh_1 - 0.007\,d\lambda_1 + 0.003\,d\beta_1 \\ dh_2 = -1.301 + 0.603\,dI - 0.530\,df + 0.636\,dh_1 + 0.370\,d\lambda_1 - 0.008\,d\beta_1 \\ d\lambda_2 = +3.714 - 1.451 + 1.451 - 1.812 + 0.582 - 0.038 \\ d\beta_2 = +0.097 + 0.216 - 0.452 - 0.074 + 0.026 + 0.999 \end{cases}$$

Kepler A.

$$\left.\begin{array}{lllllll} dI = & +1.139 & -0.035\,df & -0.001\,dh_1 & -0.007\,d\lambda_1 & +0.007\,d\beta_1 \\ dh_3 = & -0.582 & +0.679\,dI & -0.811\,df & +0.852\,dh_1 & -0.216\,d\lambda_1 & +0.083\,d\beta_1 \\ d\lambda_3 = & -1.224 & +1.059 & -0.961 & +1.169 & +0.886 & +0.039 \\ d\beta_3 = & +1.644 & -0.334 & +0.014 & -0.360 & +0.063 & +0.986 \end{array}\right\} (65)$$

Egede A.

$$\left.\begin{array}{lllllll} dI = & +0.086 & -0.523\,df & -0.003\,dh_1 & -0.012\,d\lambda_1 & +0.001\,d\beta_1 \\ dh_4 = & -0.967 & +0.875\,dI & -1.304\,df & +0.531\,dh_1 & +0.068\,d\lambda_1 & +0.376\,d\beta_1 \\ d\lambda_4 = & +1.467 & -1.276 & +1.599 & -0.951 & +1.556 & -0.029 \\ d\beta_4 = & +3.176 & -2.202 & +3.073 & -1.680 & -0.190 & +0.554 \end{array}\right\} (66)$$

Tycho.

$$\left.\begin{array}{lllllll} dI = & -0.361 & +0.199\,df & -0.005\,dh_1 & -0.002\,d\lambda_1 & -0.002\,d\beta_1 \\ dh_5 = & -1.654 & +0.241\,dI & -0.090\,df & +0.723\,dh_1 & -0.027\,d\lambda_1 & -0.293\,d\beta_1 \\ d\lambda_5 = & -2.431 & +0.456 & -0.219 & +0.293 & +1.371 & +0.010 \\ d\beta_5 = & -2.106 & +0.461 & -0.728 & +1.351 & -0.055 & +0.757 \\ \Delta\alpha = & -0.173 & -0.039 & -0.176 & +0.001 & 0.000 & 0.000 \end{array}\right\} (67)$$

Die erste Aufgabe wird nun sein, den plausibelsten Wert von dI zu ermitteln. Da $d\lambda_1$ aus den vorliegenden Beobachtungen nicht zu bestimmen ist, soll $d\lambda_1 = 0$ gesetzt werden. Aus den Formeln (64) bis (67) ist zu ersehen, daß die vier Werte von dI fast unabhängig vom Orte des Punktes Mösting A sind; die Abhängigkeit von df ist kein besonderer Grund für irgend welche Unsicherheit, da df aus I bis IV einigermaßen sicher bestimmt zu sein scheint. Um zu erfahren, welche relative Genauigkeit die fünf Werte von dI besitzen, wird es genügen von der Annahme auszugehen, daß dI unabhängig von der Unsicherheit der anderen Unbekannten gefunden wird. Es ist

$$\begin{array}{rll} \text{nach I bis IV} & dI = & +0.09 + 0.41\,d\lambda_1 \pm 0.50 \\ \text{V und VI} & = & +0.68 - 0.17\,df \pm 0.34 \\ \text{VII „ VIII} & = & +1.14 - 0.03\,df \pm 0.45 \\ \text{IX „ X} & = & +0.08 - 0.52\,df \pm 0.36 \\ \text{XI „ XII} & = & -0.37 + 0.20\,df \pm 0.62 \end{array}$$

Die beigefügten mittleren Fehler sind also so zu verstehen, als haftete den Größen $d\lambda_1$ und df keinerlei Unsicherheit mehr an.

Diesen mittleren Fehlern würden der Reihe nach etwa die abgerundeten Gewichte 1.5, 3, 2, 3, 1 entsprechen. Die ersten drei Werte von dI sind aus Deklinationsbeobachtungen abgeleitet und deshalb nach einer früheren Bemerkung voraussichtlich frei von systematischen Fehlern, hingegen beruhen die beiden letzten Werte auf Rektaszensionsbeobachtungen von Egede A, Mösting A und Tycho und sind deshalb sicher von den bisher unbekannten Fehlern beeinflußt, mit denen diese Beobachtungen behaftet sind. Aus diesem Grunde soll diesen zwei Werten von dI nur das halbe Gewicht gegeben werden. Wir haben also

I bis IV	$dI = +\ 9''$	Gew. 1.5
V, VI	$+\ 62$	3
VII, VIII	$+\ 114$	2
IX, X	$-\ 10$	1.5
XI, XII	$-\ 30$	0.5

und somit das Resultat

$$dI = +\ 54''\quad \text{m. F.} \pm 24''. \tag{68}$$

Aus (61) wird dann gefunden

$$\begin{cases} d\beta_1 = +\ 11'', & dh_1 = +\ 2''.10, & df = +\ 0.33, \\ dR = +\ 1''.26, & dR_{\mathrm{I}} = +\ 0''.78, & dR_{\mathrm{II}} = +\ 0''.87, \end{cases} \tag{69}$$

ferner

	Messier A	Kepler A	Egede A	Tycho
dh	$+\ 0''.18$	$+\ 1''.31$	$+\ 0''.23$	$-\ 0''.07$
$d\lambda$	$-\ 40''$	$+\ 149''$	$-\ 69''$	$-\ 164''$
$d\beta$	$-\ 2''$	$+\ 82''$	$-\ 47''$	$+\ 82''$
$\Delta\alpha$ =				$-\ 0''.25$

(70)

Die vier Werte von dh in (70) geben trotz ihrer Unsicherheit eine Bestätigung dafür, daß dh_1 entschieden positiv ist, d. h. daß sich Mösting A über das mittlere Niveau des Mondrandes erhebt und zwar 2″ bis 3″. Der etwas größere Wert für Kepler A $dh_3 = +\ 1''.3$ erklärt sich ungezwungen aus dem Umstande, daß dieses Gebilde auf dem Abhange des Keplergebirges liegt. Die Größen unter (68), (69) und (70) bilden also unter der Annahme, daß $d\lambda_1 = 0$, das Resultat der vorliegenden Beobachtungsreihe. Über die Sicherheit der einzelnen Größen wird im letzten Kapitel noch einiges zu sagen sein.

IX. Kapitel.

Als die vorstehend erledigte Beobachtungsreihe in Angriff genommen wurde, lag die Absicht zugrunde, zu dem anscheinend sicher bestimmten Punkte erster Ordnung Mösting A eine Anzahl gut definierter anderer Objekte hinzuzufügen, deren scheinbarer Ort gegen die Mondmitte sich so genau berechnen lassen sollte, daß diese Punkte als sichere Grundlage bei weiteren selenographischen Arbeiten und Ortsbestimmungen des Mondes dienen konnten. Es bestand keineswegs der Plan, eine Beobachtungsreihe zu schaffen, aus der der Ort von Mösting A und die Rotationselemente des Mondes neu abgeleitet werden sollten. Die in der I. Abh. gegebene Theorie der physischen Libration entstand erst, als sich herausstellte, daß die bisherige Theorie mancherlei Ungenauigkeiten enthielt. Die Resultate der neuen Entwickelung ließen nun vermuten, daß die Konstanten der physischen Libration verbesserungsbedürftig sein könnten, und deshalb mußte die schon abgeschlossene Beobachtungsreihe, obwohl sie nicht zu dem Zwecke angestellt war und auch nicht die dazu geeignetste Gestalt besaß, zur neuen Ableitung der Elemente dienen, welche zur Berechnung einer genauen Ephemeride von Mösting A notwendig sind. Nur die Bestimmung einer Größe war direkt in den Beobachtungsplan aufgenommen, indem I möglichst einwandfrei abgeleitet werden sollte, was wohl auch gelungen sein dürfte; denn wenn auch der mittlere Fehler des Resultates nicht klein ist, so lassen doch die fünf ganz voneinander unabhängigen Bestimmungen den Schluß zu, daß eine Verbesserung des so gewonnenen Wertes von I nicht mehr erheblich sein kann. Als sich nun aber herausstellte, daß die Werte, auf welche die Ephemeride des Berliner Jahrbuches gestützt ist, unhaltbar geworden waren, weil in den früheren Arbeiten schädliche Vernachlässigungen begangen waren, so mußte darauf Bedacht genommen werden einen vorläufigen Ersatz zu schaffen. Vorläufig sollte der Ersatz insofern sein, als die zahlreichen älteren Beobachtungen von SCHLÜTER, WICHMANN und HARTWIG, wenn erst eine Neureduktion derselben vorliegt, wertvolle Beiträge zur Kenntnis der einzelnen Elemente liefern werden, wodurch die hier gefundenen Resultate noch etwas modifiziert werden können. Es mußte deshalb mein Bestreben sein, durch eine Zusatzreihe die Größen zu bestimmen, welche aus der ab-

geschlossenen Reihe nicht oder nur ungenau resultierten, nämlich $d\lambda_1$ und $d\beta_1$.

Es gibt kein anderes Mittel, die Länge und Breite eines Punktes auf der Mondoberfläche zu finden, als die Lage des Objektes gegen Punkte des Mondrandes zu messen. Man wird hierbei der Wahrheit um so näher kommen, je mehr Randpunkte man benutzt; denn nur so wird man die manchmal erheblichen Unebenheiten des Mondrandes eliminieren können. Nach dem Vorschlag von BESSEL ist früher von den Beobachtern Mösting A an 7 gleichmäßig verteilte Randpunkte angeschlossen worden. Bei diesen Beobachtungen, die mit dem Heliometer angestellt wurden, war es gleichgültig, ob das Instrument von dem Uhrwerke gleichförmig nachgeführt wurde; bei Beobachtungen mit dem Fadenmikrometer, wo bei größeren Distanzen eine gleichzeitige Einstellung beider Objekte nicht möglich ist, ist ein gutes Uhrwerk erste Bedingung. Die Untersuchung des Triebwerkes des Leipziger Refraktors, welche im I. Kapitel besprochen ist, ließ erkennen, daß es allen Anforderungen entsprach, wenn man die periodischen Fehler der Uhrschraube und den Gang in Rechnung zog. Daher wurde beschlossen, an einigen Abenden vor und nach Vollmond Mösting A durch Distanzmessungen an den Mondrand derart anzuschließen, daß nicht nur, wie früher, 7 Punkte, sondern etwa 18 Randstellen benutzt wurden. Ein vollständiger Satz sollte sich etwa so gestalten: Nahe an der Schattengrenze beginnend wird der Positionskreis von 20^0 zu 20^0 auf volle Grade eingestellt. Es wird eingestellt mit dem einen Faden der Rand, mit einem anderen Mösting A, sodann umgekehrt Mösting A und Rand. Diese Umkehrung gestattet nahezu den fortschreitenden Gang des Uhrwerkes zu eliminieren, gleichzeitig aber auch ihn aus den Beobachtungen zu ermitteln. Nachdem man so wieder bis zur Schattengrenze gelangt ist, wird in gleicher Weise von 20^0 zu 20^0 rückwärts gemessen, doch so, daß diese Punkte zwischen die vorigen fallen.

Auf diese Weise wurde an 9 Abenden beobachtet, wobei allerdings nicht jedesmal ein vollständiger Satz erhalten wurde. Das Uhrwerk wurde etwa 10^m vor Beginn der Beobachtung angelassen und dann bis zum Schluß nicht wieder angehalten. Die Zeiten der Einstellungen wurden registriert, desgleichen auch von Zeit zu Zeit die Momente, in denen die Uhrschraube den Nullpunkt passierte. Auf diese Weise kann man für jeden Moment die zugehörige Stellung der Uhrschraube, also auch die Korrektion

wegen periodischer Fehler finden. Hat man nun, wie in Kapitel I erläutert ist, die periodischen Fehler ermittelt, und nennt man den zu einer Beobachtungszeit gehörigen Fehler Δ, so ist (siehe I. Kapitel), wenn im Positionswinkel π gemessen wurde, die Korrektion der Mikrometerablesung

$$-\Delta \cos\delta \sin\pi.$$

Ferner mußte die gemessene Distanz wegen Bewegung des Mondes verbessert werden. Wie bei den weiter oben besprochenen Beobachtungen wurde auch hier für die in Betracht kommende Zeit in Intervallen von 10^m der scheinbare Ort des Mondes gerechnet. Hieraus findet man die Bewegung des Mondes in α und δ, woraus sich dann ganz einfach die Komponente der Bewegung berechnen läßt, deren Positionswinkel π ist. Auf solche Weise wurde die Einstellung von Mösting A auf den Moment der Beobachtung des Randes reduziert.

Nun ist noch die Refraktionsverbesserung zu berechnen. Mit dem Fadenmikrometer läßt sich nicht direkt die Distanz zwischen Mösting A und Rand messen, sondern nur ihre Projektion auf den Durchmesser des Randpunktes. Die Berechnung der Refraktion wurde deshalb in folgender Weise vorgenommen. Die Leipziger Sternwarte besitzt Refraktionstafeln, welche unter anderem auch den Betrag der Refraktion in α und δ direkt geben. Heißt nämlich für einen Punkt des Himmels die Refraktion in Zenithdistanz R, der zugehörige parallaktische Winkel Q, dann sind die Wirkungen der Refraktion auf α und δ beziehungsweise

$$R_\alpha = R \sin Q \sec\delta, \quad R_\delta = R \cos Q.$$

Diese beiden Größen sind Funktionen des Stundenwinkels t und der Deklinatiou δ; man findet demnach den Betrag der Refraktion für eine Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz $d\alpha$ und $d\delta$ durch die Formeln

$$dR_\alpha = -\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} d\alpha + \frac{\partial R_\alpha}{\partial \delta} d\delta,$$

$$dR_\delta = -\frac{\partial R_\delta}{\partial t} d\alpha + \frac{\partial R_\delta}{\partial \delta} d\delta.$$

Die hier auftretenden partiellen Differentialquotienten werden direkt aus den Differenzen der Tafeln gefunden. Nennt man diese Quotienten

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial t} = A_1, \quad \frac{\partial R_\alpha}{\partial \delta} = A_2, \quad \frac{\partial R_\delta}{\partial t} = D_1, \quad \frac{\partial R_\delta}{\partial \delta} = D_2$$

und die Korrektionen der beobachteten α- und δ-Differenzen A und D, dann ist

$$A = A_1 \mathrm{d}\alpha - A_2 \mathrm{d}\delta$$
$$D = D_1 \mathrm{d}\alpha - D_2 \mathrm{d}\delta,$$

und die Korrektion der gemessenen Strecke S ist dann

$$\mathrm{d}S = A \sin \pi \cos \delta + D \cos \pi.$$

Diese Korrektion ist wegen Temperatur und Druck der Luft in bekannter Weise noch mit einem Faktor zu multiplizieren.

Natürlich ist es nicht gestattet direkt in die Formeln für A und D die Rektaszensionsdifferenz $\mathrm{d}\alpha$ einzusetzen, sondern sie ist erst um die Zwischenzeit der beiden Einstellungen zu verbessern. In unserem Falle ist zu rechnen mit den Größen

$$\mathrm{d}\alpha + (t_2 - t_1) \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\alpha + (t_3 - t_4),$$

wo die Größen t die unten gegebene Bedeutung haben.

Jede beobachtete Größe S wäre somit fertig reduziert, wenn der Gang des Uhrwerkes richtig wäre. Es sei nun eingestellt worden

der Randpunkt	im	Augenblicke	t_1
Mösting A	„	„	t_2
„	„	„	t_3
der Randpunkt	„	„	t_4.

Wäre also $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$, so würde der Gang des Werkes völlig eliminiert. Nun ist das aber nur selten der Fall gewesen, und wenn der Gang auch immer klein gewesen ist, so wird doch die innere Übereinstimmung der beiden Werte von S durch den Gang verschlechtert. So empfehlenswert in der astronomischen Beobachtungskunst der Brauch ist die Beobachtungen so anzuordnen, daß gewisse Fehler sich eliminieren, so soll man doch, wenn möglich, sich nicht damit zufrieden geben, sondern die Fehler trotzdem zu bestimmen versuchen und dann in Rechnung bringen.

Es sei Δg die Abweichung der Umdrehungszeit der Uhrschraube vom normalen Werte 72 Sek. und positiv, wenn das Werk zu langsam geht. Stellt man dann das Fernrohr auf einen Stern und die Schraube des Mikrometers in die tägliche Bewegung, den Schraubenkopf rechts, d. h. $\pi = 90^0$, so nehmen dann

beim Leipziger Refraktor die Ablesungen der Einstellung auf den Stern ab. Will man also in unserem Falle die Einstellung von Mösting A auf die Beobachtungszeit des Randes reduzieren, so ist die Korrektion

$$c_1 = \frac{t_2 - t_1}{7^2} \Delta g \sin \pi \cos \delta$$

und im zweiten Falle

$$c_2 = -\frac{t_4 - t_3}{7^2} \Delta g \sin \pi \cos \delta.$$

Wären also keine Beobachtungsfehler vorhanden, dann müßte der Unterschied der beiden beobachteten Werte von S sich zusammensetzen aus c_1 und c_2.

Bei der vorliegenden Beobachtungsreihe wurde grundsätzlich so verfahren, daß die Mikrometertrommel stets auf der Seite des Randes sich befand. Infolgedessen war die beobachtete Strecke: Einstellung auf Rand minus Einstellung auf Mösting A plus Fadendistanz. Folglich findet man

$$S_2 - S_1 = -c_2 + c_1$$

und somit ein System von Gleichungen, aus denen sich Δg bestimmen läßt.

Man könnte natürlich Δg am einfachsten und sichersten finden, wenn die Uhrschraube mit Hilfe eines Kontaktes selbsttätig die Zeit einer Umdrehung registrierte. Zur Anbringung eines solchen Kontaktes war die Zeit zu kurz, deshalb mußte so, wie eben geschildert, verfahren werden.

Nunmehr sind die Beobachtungen fertig reduziert und können behufs Berechnung der Unbekannten direkt mit den berechneten Größen verglichen werden.

Zu dem Zwecke wurde genau wie früher für die Zeiten, für welche der scheinbare Ort des Mondes gerechnet war, $\alpha_1 - \alpha$ und $\delta_1 - \delta$ berechnet. Zugrunde wurden hierbei gelegt die Werte

$$I = 1^0\,32'.0 \qquad \lambda_1 = -5^0\,10'.3 \qquad \beta_1 = -3^0\,11'.4$$
$$f = 0.85,$$

und für h der Halbmesser des Nautical Almanac angenommen. Die gemessene Strecke ist nun die Differenz zwischen dem scheinbaren Halbmesser und einer Strecke, welche durch die Formel

$$r = (\alpha_1 - \alpha) \cos \delta \sin \pi + (\delta_1 - \delta) \cos \pi$$

gegeben ist. Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß in diesem Kapitel π der Positionswinkel der Strecke S ist, während früher π der Positionswinkel von Mösting A an der Mondmitte war. In der Rechnung trat für diese Größe π dann immer die verbesserte Größe π_m ein, die auch im folgenden in ihrer alten Bedeutung gebraucht wird, sodaß diese neue Bezeichnung wohl zu keinen Mißverständnissen führen wird. Nennt man nun die berechnete Größe S' und den scheinbaren Mondhalbmesser nach dem Nautical Almanac R', dann ist

$$\begin{aligned} S' &= R' - r \\ &= R' - (\alpha_1 - \alpha)\cos\delta \sin\pi - (\delta_1 - \delta)\cos\pi, \end{aligned}$$

was man auch schreiben kann

$$S' = R' - s\cos(\pi - \pi_m).$$

Jede Beobachtung liefert danach eine Gleichung von der Form

$$(71) \quad S - S' = \mathrm{d}R' - \cos\delta \sin\pi\, \mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha) - \cos\pi\, \mathrm{d}(\delta_1 - \delta),$$

und aus dem ganzen Beobachtungssatz eines Abends lassen sich dann die drei Unbekannten

$$\mathrm{d}R', \quad \mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha), \quad \mathrm{d}(\delta_1 - \delta)$$

bestimmen.

Aus den Größen $\mathrm{d}(\alpha_1 - \alpha)$ und $\mathrm{d}(\delta_1 - \delta)$ werden dann genau wie früher die Verbesserungen der Ausgangswerte gefunden.

In den folgenden Tabellen ist nun gegeben

1) die Beobachtungszeit,
2) der Positionswinkel der Beobachtung,
3) unter n die Größe $S - S'$,
4) der Widerspruch v zwischen der Beobachtung und den Resultaten einer ersten Ausgleichung,
5) der Positionswinkel Π des Randpunktes gegen die Richtung: Mondmitte—Mondnordpol,
6) unter n' die verbesserte Größe $S - S'$ — wie diese Verbesserung erhalten wurde, wird später erläutert — und schließlich
7) die Widersprüche v' zwischen n' und den Werten der zweiten Ausgleichung.

1903 Sept. 1.

MEZ	π	n	v	Π	n'	v'
$7^h\ 6^m$	$180^0\ 52'$	$-1''.5$	$-1''.0$	$185^0.4$	$-0''.2$	$-0''.4$
10	190	+1.0	+1.4	195.	+1.5	+1.3
13	200	−0.5	−0.2	205.	−0.5	−0.6
15	210	+0.2	+0.5	215.	+0.5	+0.4
18	220	−1.0	−0.8	225.	−0.6	−0.6
21	240	−0.6	−0.4	245.	−0.6	−0.5
23	260	0.0	+0.1	265.	−0.2	+0.1
26	280	0.0	+0.2	285.	−0.1	+0.4
29	300	−0.8	−0.6	305.	−1.3	−0.7
34	320	−0.9	−0.6	325.	−1.4	−0.6
38	340	−0.6	−0.2	345.	−1.2	−0.4
42	350	0.0	+0.5	355.	−0.2	+0.7
45	330	−0.8	−0.4	335.	−0.7	+0.1
47	310	+0.6	+0.9	315.	0.0	+0.7
52	290	−0.8	−0.6	295.	−0.7	−0.2
59	270	−0.2	−0.1	275.	−0.1	+0.3
8 4	250	+1.6	+1.7	255.	+0.7	+0.9
7	210	−1.2	−0.9	215.	−0.9	−1.0

1903 Sept. 2.

MEZ	π	n	v	Π	n'	v'
$7^h\ 19^m$	$179^0\ 52'$	$-1''.6$	$+0''.1$	$190^0.5$	$-0''.3$	$+0''.7$
22	199	−1.2	0.0	210.	−1.1	−0.5
25	219	−1.1	−0.3	230.	−0.8	−0.4
27	239	+0.7	+1.1	250.	+0.3	+0.5
30	259	+0.1	+0.3	270.	+0.1	+0.2
32	279	−0.6	−0.5	290.	−0.7	−0.5
35	299	−1.1	−0.9	310.	−0.6	−0.2
37	319	−1.7	−1.3	330.	−0.6	0.0
40	339	−1.1	−0.3	350.	−1.2	−0.2
45	349	−0.7	+0.3	0.	−1.1	0.0
47	329	+0.7	+1.3	340.	+0.3	−1.1
49	309	0.0	+0.3	320.	−0.2	+0.3
53	289	+0.1	+0.2	310.	−0.4	−0.1
54	269	+0.1	+0.2	290.	0.0	+0.2
58	249	+0.4	+0.7	270.	+0.4	+0.5
8 1	229	−1.2	−0.6	250.	−0.8	−0.5
4	209	−1.7	−0.7	220.	−1.2	−0.7
6	189	−1.4	+0.1	200.	−1.2	−0.4

1903 Sept. 6.

MEZ	π	n	v	Π	n'	v'
$8^h\ 29^m$	$189^0\ 57'$	− 0".2	+ 0".3	$213^0.5$	+ 0".1	+ 0".2
32	209	− 1.1	− 0.5	233.	− 0.4	− 0.1
35	229	− 0.1	+ 0.6	253.	− 0.7	+ 0.2
37	249	− 1.7	− 1.0	273.	− 1.6	− 1.0
39	269	− 0.2	+ 0.4	293.	− 0.1	+ 0.6
42	289	− 0.1	+ 0.4	313.	− 0.6	+ 0.1
44	309	− 0.6	− 0.2	333.	− 0.2	+ 0.4
47	329	− 0.5	− 0.2	353.	− 0.6	− 0.1
50	349	0.0	+ 0.1	13.	0.0	+ 0.3
53	9	+ 0.2	+ 0.2	33.	− 0.4	− 0.3
56	19	− 0.2	− 0.3	43.	+ 0.1	+ 0.1

1903 Sept. 8.

MEZ	π	n	v	II	n'	v'
$10^h\ 8^m$	$339^0\ 56'$	+ 0".5	+ 0".7	$4^0.7$	0".0	− 0".3
11	359	− 0.4	− 0.3	24.	+ 0.2	0.0
13	19	− 0.4	− 0.3	44.	− 0.1	− 0.2
16	39	− 0.6	− 0.5	64.	− 0.2	− 0.2
20	59	− 0.3	− 0.2	84.	− 0.5	− 0.4
22	79	− 0.6	− 0.3	104.	+ 0.3	+ 0.5
24	99	+ 1.1	+ 1.5	124.	0.0	+ 0.2
27	119	− 0.7	− 0.1	144.	+ 0.1	+ 0.4
29	139	− 0.5	+ 0.3	164.	− 0.4	− 0.1
31	149	− 1.8	− 0.9	174.	− 1.3	− 1.1

1903 Sept. 29.

MEZ	π	n	v	Π	n'	v'
$6^h\ 32^m$	$179^0\ 52'$	− 2".0	− 0".6	$187^0.8$	− 0".6	− 0".2
35	199	+ 0.3	+ 1.3	207.	+ 0.2	+ 0.6
37	219	− 0.2	+ 0.4	227.	0.0	+ 0.3
40	239	− 0.2	+ 0.1	247.	− 0.7	− 0.4
43	259	+ 0.2	+ 0.3	267.	+ 0.1	+ 0.5
45	279	− 0.5	− 0.4	287.	− 0.6	− 0.2
48	299	+ 0.1	+ 0.3	307.	− 0.4	+ 0.1
51	319	− 2.4	− 2.0	327.	− 1.3	− 0.8
55	339	− 0.3	+ 0.5	347.	− 0.5	+ 0.1
58	349	+ 0.1	− 1.1	357.	− 0.1	+ 0.5
7 1	179 58	− 2.3	− 0.9	187.	− 0.9	− 0.5

1903 Sept. 30.

MEZ	π	n	v	Π	n'	v'
$7^h\ 3^m$	$174^0\,54'$	$-1''.7$	$-0''.3$	$187^0.6$	$-0''.3$	$+0''.4$
5	194	−0.8	+0.3	207.	−0.9	−0.2
7	214	−1.0	−0.2	227.	−0.8	−0.2
10	234	−0.5	0.0	247.	−1.0	−0.4
12	254	−0.2	+0.2	267.	−0.3	+0.2
15	274	−0.3	0.0	287.	−0.4	+0.1
17	294	+0.6	+0.9	307.	+0.1	+0.6
20	314	−2.3	−1.9	327.	−1.2	−0.7
23	334	0.0	+0.6	347.	−0.2	+0.4
27	348	−0.5	+0.3	1.	−0.9	−0.3

1903 Nov. 5.

MEZ	π	n	v	Π	n'	v'
$7^h\ 34^m$	$187^0\,56'$	$-0''.3$	$-0''.7$	$204^0.2$	$-0''.3$	$-0''.3$
37	167	+1.2	+0.7	184.	+0.2	0.0
40	147	+1.8	+1.3	164.	+1.8	+1.5
43	127	0.0	−0.4	144.	+0.9	+0.5
45	107	+0.6	+0.3	124.	−0.4	−0.8
47	87	−0.6	−0.8	104.	+0.3	−0.1
50	67	+0.9	+0.8	84.	+0.6	+0.3
53	47	0.0	0.0	64.	+0.4	+0.2
56	27	−1.0	−0.9	44.	−0.7	−0.7
58	7	−0.8	−0.6	24.	−0.3	−0.2
8 3	17	+1.0	+1.2	34.	+0.4	+0.4
6	37	−0.1	0.0	54.	+0.3	+0.2
8	57	+0.8	+0.8	74.	+0.5	+0.3
12	77	+0.2	−0.1	94.	+0.3	0.0
14	97	−1.3	−1.6	114.	−0.4	−0.8
16	117	+0.2	−0.2	134.	+0.2	−0.2
19	137	+1.1	+0.7	154.	+0.5	+0.2
22	157	−1.0	−0.5	174.	−0.6	−0.8
24	177	+1.1	+0.7	194.	+0.2	+0.1

1903 Nov. 5.

MEZ	π	n	v	Π	n'	v'
$9^h\ 10^m$	$189^0\ 56'$	$-0''.8$	$-0''.9$	$206^0.2$	$-0''.9$	$-0''.9$
12	169	+1.1	+1.1	186.	0.0	+0.1
15	149	+0.3	+0.4	166.	+0.4	+0.6
18	129	−1.7	−1.4	146.	−0.9	−0.6
21	109	+0.8	−1.3	126.	−0.3	+0.1
24	89	−2.0	−1.4	106.	−1.0	−0.5
26	69	−0.1	+0.9	86.	−0.3	+0.3
29	49	−1.4	−0.5	66.	−1.0	−0.4
31	29	−0.7	+0.2	46.	−0.4	+0.2
34	9	−1.4	−0.5	26.	−0.8	−0.2
36	19	−0.2	+0.7	36.	−0.7	−0.1
39	39	−1.2	−0.3	56.	−0.7	−0.1
42	59	−0.9	−0.1	76.	−1.2	−0.6
45	79	−0.1	+0.6	96.	+0.2	+0.7
48	99	−0.7	−0.1	116.	+0.1	+0.5
51	119	−0.9	−0.5	136.	−0.7	−0.4
53	139	+0.8	+1.0	156.	+0.1	+0.3
56	159	−0.8	−0.8	176.	−0.2	−0.1
58	179	+0.7	+0.6	196.	0.0	+0.1

1903 Dez. 3.

MEZ	π	n	v	Π	n'	v'
$6^h\ 32^m$	$154^0\ 58'$	$-0''.2$	$-0''.2$	$168^0.7$	$0''.0$	$0''.0$
35	174	+0.7	+0.9	188.	−0.4	−0.1
37	194	−0.5	−0.1	208.	−0.6	−0.1
40	214	−0.8	−0.3	228.	−0.5	+0.1
43	234	+0.4	+0.9	248.	0.0	+0.7
46	254	−1.7	−1.2	268.	−1.8	−1.1
48	274	−1.3	−0.8	288.	−1.2	−0.6
53	294	+0.8	−1.1	308.	+0.3	+0.7
56	314	−1.2	−1.0	328.	−0.1	+0.1
59	324	+0.1	+0.2	338.	−0.3	−0.2
7 2	304	+0.2	+0.4	318.	−0.1	+0.2
4	284	+0.1	+0.5	298.	0.0	+0.5
7	264	−0.6	−0.1	278.	−0.6	+0.1
11	244	−0.2	+0.3	258.	−1.0	−0.3
14	224	−0.7	−0.2	238.	−0.2	+0.5
16	204	−0.5	−0.1	218.	0.0	+0.6
18	184	−0.3	0.0	198.	0.0	+0.4
21	164	−0.6	−0.5	178.	−0.6	−0.4

1903 Dez. 4.

MEZ	π	n	v	Π	n'	v'
$6^h\,41^m$	$74^0\,59'$	+ 0".3	+ 0".5	83°.0	0".0	+ 0".1
44	94	− 1.4	− 1.4	103.	− 0.5	− 0.4
47	114	− 0.2	− 0.3	123.	− 1.1	− 1.1
49	134	− 2.0	− 2.2	143.	− 1.2	− 1.2
52	154	+ 0.1	− 0.2	163.	− 0.3	− 0.4
55	174	+ 1.2	+ 0.8	183.	+ 0.3	+ 0.1
7 0	194	+ 0.1	− 0.3	203.	+ 0.1	− 0.2
2	214	+ 0.1	− 0.3	223.	+ 0.8	+ 0.5
5	234	0.0	− 0.3	243.	+ 0.2	− 0.1
9	254	0.0	− 0.2	263.	− 0.3	− 0.6
12	244	+ 0.9	+ 0.6	253.	+ 0.4	+ 0.1
15	224	− 0.7	− 1.1	233.	0.0	− 0.3
18	194	+ 1.1	− 0.7	203.	+ 1.1	+ 0.8
22	174	+ 1.1	− 0.7	183.	+ 0.2	0.0
24	154	+ 2.2	+ 1.9	163.	+ 1.7	+ 1.6
27	144	+ 0.4	+ 0.1	153.	0.0	− 0.1
30	124	+ 1.0	+ 0.8	133.	+ 0.8	+ 0.8
33	104	− 1.0	− 1.0	113.	− 0.1	− 0.1
35	84	+ 0.1	+ 0.2	93.	− 0.1	0.0
38	64	+ 1.0	+ 1.2	73.	+ 0.7	+ 0.9

Wenn man die Größen $n = S - S'$ nach Formel (71) ausgleicht, erhält man die nachstehenden Resultate. Hinter jeder Größe ist ihr mittlerer Fehler gegeben, in der letzten Kolumne der mittlere Fehler einer Gleichung.

Tabelle 72.

	$\cos\delta\, d(\alpha_1 - \alpha)$	m. F.	$d(\delta_1 - \delta)$	m. F.	dR'	m. F.	m. F. e. G.
1903 Sept. 1	+ 0".40	0".66	+ 0".05	0".29	− 0".52	0".43	0".82
2	+ 1.44	0.57	− 0.23	0.23	− 1.49	0.39	0.71
6	− 0.37	0.39	− 0.21	0.23	− 0.27	0.26	0.53
8	− 0.25	0.69	− 0.46	0.42	− 0.60	0.49	0.77
29	+ 1.33	0.99	− 0.12	0.43	− 1.33	0.60	1.05
30	+ 0.91	0.82	− 0.18	0.38	− 1.16	0.53	0.86
Nov. 5	− 0.11	0.60	+ 0.34	0.28	+ 0.11	0.39	0.84
5	+ 0.28	0.62	+ 0.48	0.29	− 0.38	0.41	0.88
Dez. 3	− 0.50	0.49	− 0.26	0.32	0.00	0.37	0.68
4	+ 0.12	0.38	+ 0.39	0.57	+ 0.04	0.41	1.02

Werden die Größen n mit diesen Werten dargestellt, so bleiben die unter v angeführten Widersprüche übrig, die im Sinne

Beobachtung minus Rechnung angesetzt sind. Die einzelnen Werte haben außerordentlich verschiedene Genauigkeit, wie man aus den mittleren Fehlern sieht. Dies rührt außer von der Zahl der Messungen und der Güte der Bilder wesentlich mit her von der Lage der Schattengrenze. Naturgemäß ist $d(\delta_1 - \delta)$ am genauesten bestimmt, weil diese Größe in der Hauptsache aus Messungen gegenüberliegender Randstellen gefunden wird. Dez. 4 war dies z. B. umgekehrt; da war der Positionswinkel der Schattengrenze nahezu 90°, infolgedessen ist an diesem Abende die Rektaszension genauer bestimmt. Wählt man die Gewichtseinheit so, daß ihr der mittlere Fehler 1″.00 entspricht, so erhält man die Gewichte, welche weiter unten neben den Bedingungsgleichungen gegeben sind. Diese enthalten nur die vier Unbekannten dh_1, $d\lambda_1$, $d\beta_1$, dI, weil f hier als bekannt vorausgesetzt wird. Die Größen dh_1 und dI sind mit aufgenommen worden, nicht um sie hieraus zu bestimmen, sondern weil für h und I als Ausgangswerte nicht die aus (68) und (69) folgenden genommen worden sind. $d\lambda_1$, $d\beta_1$, dI sind wieder in der Einheit 100″ ausgedrückt.

Rektaszensionen.

1903	Sept.	1	+ 0.14 dh_1	− 0.43 $d\lambda_1$	− 0.03 $d\beta_1$	− 0.03 dI	= + 0″.40
		2	+ 0.11	− 0.42	− 0.07	− 0.06	= + 1.44
		6	+ 0.04	− 0.40	− 0.17	− 0.06	= − 0.37
		8	+ 0.04	− 0.40	− 0.19	+ 0.01	= − 0.25
		29	+ 0.12	− 0.43	− 0.06	− 0.05	= + 1.33
		30	+ 0.10	− 0.42	− 0.09	− 0.08	= + 0.91
	Nov.	5	+ 0.06	− 0.45	− 0.13	+ 0.12	= − 0.11
		5	+ 0.06	− 0.45	− 0.13	+ 0.12	= + 0.28
	Dez.	3	+ 0.04	− 0.46	− 0.11	+ 0.10	= − 0.50
		4	+ 0.05	− 0.47	− 0.06	+ 0.07	= + 0.12

Deklinationen.

1903	Sept.	1	+ 0.06 dh_1	− 0.03 $d\lambda_1$	+ 0.43 $d\beta_1$	+ 0.43 dI	= + 0″.05
		2	+ 0.06	− 0.07	+ 0.42	+ 0.40	= − 0.23
		6	0.00	− 0.17	+ 0.40	+ 0.21	= − 0.21
		8	− 0.06	− 0.19	+ 0.40	+ 0.02	= − 0.46
		29	+ 0.06	− 0.05	+ 0.43	+ 0.43	= − 0.12
		30	+ 0.06	− 0.09	+ 0.42	+ 0.41	= − 0.18
	Nov.	5	− 0.14	− 0.13	+ 0.44	− 0.30	= + 0.34
		5	− 0.14	− 0.13	+ 0.44	− 0.30	= + 0.48
	Dez.	3	− 0.15	− 0.11	+ 0.45	− 0.36	= − 0.26
		4	− 0.17	− 0.07	+ 0.46	− 0.43	= + 0.39

Führt man nun den Übergang von den Ausgangswerten dieser Rechnung zu den Resultaten (68) und (69) aus, so erhält man folgende Gleichungen.

Rektaszensionen.

1903	Sept.	1	$-0.43\,d\lambda_1$	$-0.03\,d\beta_1$	$=+0''.35$	Gew. 2.3
		2	-0.42	-0.07	$=+1.41$	3.1
		6	-0.40	-0.17	$=-0.38$	6.6
		8	-0.40	-0.19	$=-0.26$	2.1
		29	-0.43	-0.06	$=+1.31$	1.0
		30	-0.42	-0.09	$=+0.89$	1.5
	Nov.	5	-0.45	-0.13	$=-0.15$	2.8
		5	-0.45	-0.13	$=+0.24$	2.6
	Dez.	3	-0.46	-0.11	$=-0.53$	4.2
		4	-0.47	-0.06	$=+0.10$	7.0

Deklinationen.

1903	Sept.	1	$-0.03\,d\lambda_1$	$+0.43\,d\beta_1$	$=-0''.05$	Gew. 11.9
		2	-0.07	$+0.42$	$=-0.32$	18.9
		6	-0.17	$+0.40$	$=-0.25$	18.9
		8	-0.19	$+0.40$	$=-0.44$	5.7
		29	-0.05	$+0.43$	$=-0.22$	5.4
		30	-0.09	$+0.42$	$=-0.27$	6.9
	Nov.	5	-0.13	$+0.44$	$=+0.43$	12.8
		5	-0.13	$+0.44$	$=+0.57$	11.9
	Dez.	3	-0.11	$+0.45$	$=-0.16$	9.8
		4	-0.07	$+0.46$	$=+0.52$	3.1

Die Beobachtungen Sept. 1, 2, 6, 29, 30, Dez. 3 sind vor, die übrigen nach Vollmond angestellt. Da anzunehmen ist, daß diese 2 Arten von Beobachtungen systematisch verschiedene Resultate geben, weil doch in der Hauptsache hier der östliche, dort der westliche Rand beobachtet wird, sind die Gleichungen nach diesem Gesichtspunkte geteilt worden, und wir erhalten die Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
\text{vor Vollmond:}\quad & +4.19\,d\lambda_1 - 1.97\,d\beta_1 = +0.40\\
& -1.97 + 13.01 = -5.17\\
\text{nach Vollmond:}\quad & +3.62\,d\lambda_1 - 1.27\,d\beta_1 = -1.36\\
& -1.27 + 6.56 = +5.07
\end{aligned}$$

und hieraus die Lösungen:

$$\begin{aligned}
\text{vor Vollmond:}\quad & d\lambda_1 = -10'', \quad d\beta_1 = -41''\\
\text{nach Vollmond:}\quad & = -11'', \quad = +75''.
\end{aligned}$$

Es bleibt vorläufig nichts anderes übrig als hieraus das Mittel zu nehmen, nämlich

$$d\lambda_1 = -10'', \quad d\beta_1 = +17''.$$

Das Verhalten der beiden Arten von Beobachtungen zeigt deutlich, daß die Beobachtungen des Randes teilweise stark von systematischen Fehlern beeinflußt sind, deshalb wurde ein Versuch gemacht diese Fehler zu bestimmen.

Zu dem Zwecke wurden mit

$$d\lambda_1 = -10'', \quad d\beta_1 = +17''$$

für jeden Beobachtungsabend $\cos\vartheta\, d(\alpha_1 - \alpha)$ und $d(\vartheta_1 - \vartheta)$ gerechnet und mit diesen Werten dann die Größen n dargestellt; die übrigbleibenden Widersprüche im Sinne Beobachtung minus Rechnung würden, wenn keine Beobachtungsfehler vorhanden wären, in erster Annäherung die Abweichung des Mondes von der strengen Kreisform darstellen. Die einzelnen Abende gehören zwar verschiedener optischer Libration an, doch muß zunächst dieser Umstand unberücksichtigt bleiben. Um zu erfahren, welchen Punkten des Mondrandes obige Abweichungen entsprechen, wurde zunächst nach Formel (3) und (6) der Ort des Mondnordpols gerechnet, indem $\beta = 90^0$ und $\lambda = 0^0$ gesetzt wurde. Somit wurden für die 9 Abende die Positionswinkel des Mondnordpoles gegen die Mondmitte und der selenozentrische Winkelabstand K von der Mondmitte erhalten.

			π_n	K
1903	Sept.	1	$-4^0\ 32'$	$95^0\ 53'$
		2	$-9\ 37$	$95\ 39$
		6	$-23\ 35$	$92\ 8$
		8	$-24\ 50$	$89\ 16$
(73)		29	$-7\ 56$	$95\ 51$
		30	$-12\ 45$	$95\ 25$
	Nov.	5	$-16\ 18$	$84\ 36$
		5	$-16\ 18$	$84\ 36$
	Dez.	3	$-13\ 42$	$83\ 59$
		4	$-7\ 59$	$83\ 10$

Ist K größer als 90^0, so liegt der Nordpol auf der von uns abgewendeten Seite des Mondes. Mit diesen Größen π_n wurde dann zu jedem n der zugehörige Positionswinkel gegen die Richtung Mondmitte — Nordpol berechnet. Diese Werte Π sind in den

Tabellen gegeben. Die Abweichungen eines Abends enthalten aber noch einen konstanten Teil, das ist der Abendwert von dR'. Diesen wird man dadurch eliminieren, daß man von den einzelnen Abweichungen das Abendmittel abzieht. Die so gefundenen Größen wurden nun mit dem Positionswinkel Π als Abszisse aufgetragen und graphisch ausgeglichen. Diese Ausgleichung enthält die als Anhang gegebene Tafel I. Aus je drei benachbarten Werten wurden Mittel gebildet und die so gefundenen Punkte durch eine sich anschließende Kurve verbunden. Die unterhalb der Kurve gezogenen geraden Linien veranschaulichen, welche Teile des Mondrandes an den einzelnen Abenden zur Messung gedient haben. Das Übereinandergreifen der einzelnen Abende ist im allgemeinen genügend, nur bei 0^0 etwa ist der Anschluß nicht sehr sicher hergestellt.

Die Ordinaten sind in 160mal größerem Maßstab gezeichnet als die Abszissen. Um zu entscheiden, wie das Profil des Mondes sich mit wechselnder optischer Libration ändert, dazu ist die Anzahl der 154 Abweichungen zu klein. Nur an einer sehr wichtigen Stelle ist es gelungen eine solche Änderung sicher nachzuweisen, das ist zwischen 180^0 und 200^0. Hier teilt sich die Kurve in zwei Äste. Der obere Teil gehört ausschließlich den Abenden an, wo der Nordpol sichtbar, demnach der Südpol unsichtbar war. Unter solchen Umständen tritt an den Rand ein mächtiges Gebirge, das wohl nach NEISON mit dem Leibnizgebirge identisch ist, nur stimmt dann nicht die Bemerkung des genannten Autors, daß dieses Gebirge der abgewandten Mondhälfte angehört; im Gegenteil muß bei entgegengesetzter Libration in Breite das Gebirge diesseits liegen. Die Erhöhung bei 125^0 ist das Rookgebirge, die bei 160^0 das Dörfelgebirge, die Senkung zwischen 210^0 bis 240^0 entspricht dem Mare australe, die tiefe Einsenkung bei 330^0 ist das Mare Humboldtianum. Die langgestreckte Welle bei 255^0 ist mir bei den Beobachtungen sehr oft aufgefallen, sie ist besonders schön zu sehen auf Pl. XXVII des Pariser Mondatlas. Ein wertvolles Material werden zur Lösung dieser Frage die älteren Beobachtungen liefern. Soviel läßt sich aber mit Sicherheit auf Grund unseres Materials aussprechen, daß der Mondrand von mächtigen Gebirgen und Senkungen gebildet wird von 2000 m Höhe oder Tiefe, deren Längsausdehnung oft sich über 10^0 bis 20^0 der Peripherie erstreckt. Einzelne hohe Berge habe ich bei der Beobachtung

dadurch unschädlich zu machen gesucht, daß ich den Mikrometerfaden den idealen Mondrand tangieren ließ. Aber die hier gefundenen Abweichungen von der Kreisform lassen sich durch keine Beobachtung unschädlich machen, solche Fehler müssen bei Präzissionsmessungen in Rechnung gezogen werden; es wäre sonst schade um das Beobachtungsmaterial und die viele aufgewandte Zeit und Arbeit. Die Ermittelung der nötigen Korrektionen wird naturgemäß wieder etwas umständlich, doch darf man bei selenographischen Arbeiten davor nicht zurückschrecken.

Das vorläufige Resultat der Zusatzreihe war $d\lambda_1 = -10''$, $d\beta_1 = +17''$. Mit Zugrundelegung dieser Werte wurden die Abweichungen der Tafel I berechnet. Verbessert man die Beobachtungen nun mit den Korrektionen, die man dieser Kurve entnimmt, so werden vermutlich nahezu dieselben Werte resultieren. Um etwas wird man sich durch solches Näherungsverfahren aber doch der Wahrheit nähern, und deshalb wurde diese 2. Ausgleichung durchgeführt. Vor allem aber wurde die Rechnung mit diesen Korrektionen wiederholt, um an diesem Beispiel zu zeigen, welcher Steigerung die Genauigkeit der Beobachtungen fähig ist.

Die weiter oben tabulierten Größen n' sind aus den Größen n gebildet, indem von n die betr. Ordinaten der Kurve abgezogen wurden. Die Ausgleichung mit Hilfe der Formel (71) ließ die Fehler v' übrig. In der folgenden Zusammenstellung sind zur Vergleichung die Summen $[vv]$ und $[v'v']$ gegeben.

		$[vv]$	$[v'v']$
1903	Sept. 1	10.19	6.95
	2	7.54	4.02
	6	2.24	1.82
	8	4.21	2.00
	29	8.83	2.10
	30	5.13	1.55
	Nov. 5	11.29	5.56
	5	12.35	3.52
	Dez. 3	6.90	3.95
	4	17.42	8.42

Analog Tabelle 72 wird im folgenden das Resultat der Ausgleichung der Werte n' gegeben.

Tabelle 74.

	$\cos\delta\, d(\alpha_1-\alpha)$	m. F.	$d(\delta_1-\delta)$	m. F.	dR'	m. F.	m. F. e. G.
1903 Sept. 1	− 0".03	0".55	+ 0".53	0".24	− 0".34	0".36	0".68
2	+ 1.04	0.42	+ 0.18	0.17	− 1.15	0.29	0.52
6	− 0.56	0.35	+ 0.10	0.21	− 0.14	0.23	0.48
8	+ 0.27	0.47	− 0.18	0.29	+ 0.04	0.34	0.53
29	+ 0.16	0.48	+ 0.12	0.21	− 0.53	0.29	0.51
30	+ 0.17	0.45	− 0.03	0.21	− 0.68	0.29	0.47
Nov. 5	− 0.42	0.42	+ 0.15	0.20	− 0.05	0.28	0.59
5	+ 0.16	0.33	+ 0.25	0.15	− 0.32	0.22	0.47
Dez. 3	− 0.68	0.37	− 0.36	0.24	+ 0.01	0.28	0.51
4	+ 0.18	0.25	+ 0.16	0.37	+ 0.07	0.27	0.70

Während also früher der m. F. einer Gleichung, die auf je 2 Einstellungen von Rand und Mösting A beruht, durchschnittlich o".82 war, ist er jetzt o".55. Das würde heißen, daß eine Einstellung den mittleren Fehler o".55 besitzt. Aus der inneren Übereinstimmung der Beobachtungen, die zu einer Gleichung vereinigt sind, folgt als m. F. einer Einstellung o".52, woraus hervorgeht, daß die angewandten Korrektionen eine wesentliche Annäheruug an die Wirklichkeit bedeuten. Man ist jedenfalls berechtigt, hieraus den Schluß zu ziehen, daß unsere Methode, mit Hilfe des Uhrwerks größere Distanzen zu messen, gute Resultate liefert. Eine Vergleichung mit den Heliometermessungen von SCHLÜTER und HARTWIG, bei denen nach BESSELS Vorschlag Mösting A an 7 Randpunkte angeschlossen wurde, zeigt sogar, daß obige Methode genauere Resultate liefert. Vergleicht man nämlich die mittleren Fehler der Abendwerte von dR', so findet man für diese durchschnittlich folgende Größen:

SCHLÜTER: $\pm$ o".52, HARTWIG: $\pm$ o".60,

während Tabelle 72 hierfür $\pm$ o".43 gibt, Tabelle 74 sogar nur $\pm$ o".28. Nun sind hier zwar oft 18 Randpunkte beobachtet worden, wodurch natürlich die Genauigkeit von dR' etwas erhöht wird, aber auch die vier Abende, an denen nur 10 und 11 Randstellen eingemessen sind, geben noch $\pm$ o".47. Dabei hat auch der längste Beobachtungssatz nicht die Dauer einer Stunde überschritten, während selbst bei dem Straßburger Heliometer die Beobachtung der 7 Punkte oft 1$\frac{1}{2}$ Stunde in Anspruch genommen hat.

Die Beobachtungsgleichungen für $d\lambda_1$ und $d\beta_1$ sind nun folgende:

Rektaszensionen.

1903 Sept.	1	$-0.43 d\lambda_1$	$-0.03 d\beta_1$	$= -0''.08$	Gew. 0.8
	2	-0.42	-0.07	$= +1.01$	1.4
	6	-0.40	-0.17	$= -0.57$	2.0
	8	-0.40	-0.19	$= +0.26$	1.1
	29	-0.43	-0.06	$= +0.14$	1.1
	30	-0.42	-0.09	$= +0.15$	1.2
Nov.	5	-0.45	-0.13	$= -0.46$	1.4
	5	-0.45	-0.13	$= +0.12$	2.3
Dez.	3	-0.46	-0.11	$= -0.71$	1.8
	4	-0.47	-0.06	$= +0.16$	4.3

Deklinationen.

1903 Sept.	1	$-0.03 d\lambda_1$	$+0.43 d\beta_1$	$= +0''.43$	Gew. 4.3
	2	-0.07	$+0.42$	$= +0.09$	8.6
	6	-0.17	$+0.40$	$= +0.06$	5.7
	8	-0.19	$+0.40$	$= -0.16$	3.0
	29	-0.05	$+0.43$	$= +0.02$	5.7
	30	-0.09	$+0.42$	$= -0.12$	5.7
Nov.	5	-0.13	$+0.44$	$= +0.24$	6.2
	5	-0.13	$+0.44$	$= +0.34$	11.1
Dez.	3	-0.11	$+0.45$	$= -0.26$	4.3
	4	-0.07	$+0.46$	$= +0.29$	1.9

Um für die Gewichte nicht zu große Zahlen zu erhalten, ist hier für einen mittleren Fehler von $0''.5$ das Gewicht 1 festgesetzt worden. Die Normalgleichungen lauten

$$\begin{aligned} +4.10 d\lambda_1 &- 1.74 d\beta_1 &&= -0.47 \\ -1.74 &+ 10.67 &&= +3.46 \end{aligned}$$

und die Lösungen

$$(75) \qquad d\lambda_1 = +2'' \pm 29'', \quad d\beta_1 = +33'' \pm 18''.$$

X. Kapitel.

Die Zusatzreihe bestätigt die frühere Annahme $d\lambda_1 = 0$, ohne daß allerdings dieses Resultat eine besondere Sicherheit besäße; in Übereinstimmung mit der Hauptreihe findet sich für β_1 eine positive Korrektion. Das wesentlichste Resultat aber besteht in der Ermittelung der systematischen Randkorrektionen. Wie schon gesagt ist das vorliegende Material aber nicht genügend, diese Korrektionen

völlig einwandfrei zu bestimmen. Die Beobachtungen der Zusatzreihe erstrecken sich zwar über sehr verschiedene Werte der Libration in Breite (siehe 73), hingegen variiert die Libration in Länge zu wenig, um die Randkorrektionen bestimmen zu können, welche den verschiedenen Phasen der Libration entsprechen. Herr Dr. v. FLOTOW, Assistent der Leipziger Sternwarte, hat die Neureduktion zunächst der HARTWIGschen Beobachtungen übernommen. Wenn diese Rechnung abgeschlossen ist, wird man auf Grund dieser und der vorliegenden Arbeit vermutlich bessere Werte der Größen f, I, h_1, λ_1, β_1 besitzen, aus denen man dann rückwärts die Randkorrektionen berechnen kann. Die HARTWIGsche Reihe bezieht sich etwa auf 290 Randpunkte, unsere Zusatzreihe auf etwa 150, dazu kommen dann noch aus der Hauptreihe 100 Randstellen, die sich allerdings nur auf die Gegenden der Pole und des Äquators verteilen, insgesamt jedoch Material genug liefern, um die systematischen Randkorrektionen ableiten zu können.

Es ist selbstverständlich, daß die Beobachtungen der Hauptreihe genauere Resultate liefern würden, wenn die nötigen Verbesserungen des Randes berücksichtigt werden könnten. Wie gesagt muß aber diese Verbesserung vorläufig unterbleiben. Weiter bedürfen alle Rektaszensionsdifferenzen zweifelsohne systematischer, von der Beleuchtungsphase abhängiger Korrektionen. Die von Mösting A werden aber durch die viel größeren Randfehler entstellt, und da die persönlichen Fehler bei Beobachtung der anderen Hauptpunkte wieder vermischt mit denen von Mösting A auftreten, so muß auch diese Verbesserung der Beobachtungen vorläufig unterbleiben. Die Form der Beobachtungsgleichungen, welche den direkten Zusammenhang zwischen den beobachteten Größen und den Unbekannten angeben, ermöglicht es, ohne allzu große Arbeit alle möglichen Korrektionen an die Beobachtungen anzubringen, ohne daß dann etwas anderes von neuem auszuführen wäre, als die Neubildung der bekannten Summen $[an]$, $[bn]$ usw.

Wir kommen nun zu den definitiven Resultaten dieser Abhandlung. Aus den Gleichungen I bis IV war $d\beta_1 = +\,11''$ mit einem mittleren Fehler von etwa 40″ gefunden worden. Nach (75) ist $d\beta_1 = +\,33'' \pm 18''$. Hiernach würden die Gewichte der beiden Werte sich wie 1 zu 4 verhalten. Da jedoch die Randkorrektionen noch nicht einwandfrei sind, soll dem zweiten Werte nur das Gewicht 2 erteilt werden. Es ist demnach

(76a) $d\lambda_1 = + 2'', \quad d\beta_1 = + 26''$

und nach (68):

(76b) $dI = + 54'',$

somit nach (61)

(77a) $dh_1 = + 2''.26, \quad df = + 0.35,$

(77b) $dR = + 1''.28, \quad dR_I = + 0''.78, \quad dR_{II} = + 0''.87.$

Aus (64) bis (67) findet man ferner

(78)

	Messier A	Kepler A	Egede A	Tycho
$dh =$	$+ 0''.27$	$+ 1''.45$	$+ 0''.33$	$0''.00$
$d\lambda =$	$- 67''$	$+ 166''$	$- 81''$	$- 159''$
$d\beta =$	$+ 15''$	$+ 91''$	$- 59''$	$+ 114''$
$\Delta\alpha =$				$- 0''.25$

Wie diese Wertsysteme die Beobachtungen darstellen, ist aus den Tabellen 43 bis 50 zu ersehen. Die Kolumnen Σ und v geben diese Darstellung und die Widersprüche im Sinne Beobachtung minus Rechnung. Die Tabellen 38 bis 42 geben in den Kolumnen „Korr." die Verbesserungen, welche an die dort enthaltenen Koordinaten auf Grund unserer Resultate anzubringen sind.

Die Frage nach der Sicherheit der einzelnen Größen läßt sich nicht ohne weiteres beantworten, da eine Berechnung von mittleren Fehlern bei der Kompliziertheit des Zusammenhanges zwischen den einzelnen Größen auf Schwierigkeiten stößt. Wohl lassen sich aber schätzungsweise die Größen angeben, innerhalb deren die mit obigen Wertsystemen berechneten scheinbaren Örter der fünf Hauptpunkte schwanken können.

Was zunächst die Sicherheit der Beobachtungen anbetrifft, so sind die Quadratsummen der Fehler bei den einzelnen Reihen

(79)

I:	16.40	m. F. einer Gleichung $\pm 0''.70$
II:	5.79	± 0.49
III:	6.62	± 0.47
IV:	8.24	± 0.70

Die mittleren Fehler einer Gleichung ergeben sich aus dem mittleren Fehler $\pm 0''.70$ einer Gleichung vom Gewichte 1, da die Gewichte der Reihe nach waren 1, 2, 2.25, 1. Eine Gleichung besteht im allgemeinen aus 8×3 Vergleichungen in α oder 8 Ver-

gleichungen in δ. Infolge der Randfehler des Mondes sind natürlich die mitgeteilten mittleren Fehler zu groß. Aus der inneren Übereinstimmung eines Abendes, welche naturgemäß durch diese Randfehler nicht beeinflußt wird, erhält man folgende mittlere Fehler einer Gleichung

$$\begin{aligned} &\text{I: } \pm 0''.28, \quad \text{II: } \pm 0''.35, \\ &\text{III: } \pm 0.36, \quad \text{IV: } \pm 0.23, \end{aligned} \tag{80}$$

d. h. in Wirklichkeit sind die Gleichungen I und IV sicherer als die anderen, aber die Fehler des Randes verdunkeln diese Tatsache vollkommen, trotzdem hat man logischerweise vorläufig mit den genannten Gewichten zu rechnen.

Der Unterschied zwischen den beiden Systemen von mittleren Fehlern (79) und (80) erklärt sich nur zum Teil aus den Unebenheiten des Randes, zum anderen Teil wirkt hier die von Abend zu Abend wechselnde Auffassung des Randes mit, welche sich wiederum zusammensetzt aus persönlichen Fehlern und der durch die Luftverhältnisse hervorgerufenen Bildbeschaffenheit.

Was nun zunächst die selenographischen Koordinaten von Mösting A betrifft, so ist aus den Tabellen 51 und 52 ersichtlich, daß ein kleiner Fehler in Länge und Breite die scheinbare Rektaszension und Deklination des Objektes nur um eine fast konstante Größe fälscht. Die Sicherheit von Ortsbestimmungen des Mondes mit Hilfe von Mösting A erleidet also dadurch keine Einbuße. Der mittlere Fehler von $d\lambda_1$ ist von der Erde gesehen etwa $\pm 0''.13$, derjenige von $d\beta_1$ etwa $\pm 0''.08$. Wenn man $d\lambda_1$, $d\beta_1$, dI nach (76) als genau bekannt voraussetzt, folgt nach (63) aus den Gleichungen I bis IV

$$dh_1 = +2''.26 \pm 0''.60, \quad df = +0.35 \pm 0.07.$$

Tatsächlich ist die Unsicherheit etwas größer; da nun aber dh_1 stets stark verkürzt erscheint, so kann man sagen: Möglicherweise kann Mösting A im Maximum infolge fehlerhaften Wertes von h_1 um $0''.2$ in α und δ scheinbar hin und her schwanken. I hat nach (68) einen mittleren Fehler von 24″, von der Erde gesehen $0''.11$. Dies kann hauptsächlich in δ periodische Schwankungen hervorrufen von $0''.1$ Größe. Die Unsicherheit von f kann nach (33) ebenfalls periodische Schwankungen von $0''.1$ bis $0''.2$ hervorrufen, wobei naturgemäß diese verschiedenen Abweichungen von der

Wirklichkeit sich zum Teil kompensieren werden, so daß man sagen kann:

Nach den Resultaten dieser Arbeit ist es nicht ausgeschlossen, daß der mit den gefundenen Größen berechnete scheinbare Ort von Mösting A in α und δ stellenweise um eine Viertelbogensekunde von der Wirklichkeit abweicht.

Für die 4 anderen Hauptpunkte kann man sich ein Urteil über die erlangte Genauigkeit bilden, wenn man annimmt, daß der Ort von Mösting A bekannt ist. Dann folgen aus den Gleichungen V bis XII die unten gegebenen mittleren Fehler, die daneben geozentrisch gegeben sind, d. h. so wie sie bei mittlerer Libration von der Erde aus erscheinen. Die Quadratsummen der übrigbleibenden Fehler, die angenommenen Gewichte und der mittlere Fehler einer Gleichung sollen zunächst aufgeführt werden.

(81)

V:	9.60	1	0".59
VI:	2.17	3	0.34
VII:	6.03	1	0.50
VIII:	1.43	4	0.25
IX:	5.51	1	0.43
X:	1.89	1.5	0.35
XI:	8.88	1	0.72
XII:	4.00	3	0.42

Es geht hieraus hervor, daß die Gewichte nicht überall richtig gewählt sind, doch lohnt sich vorläufig eine weitere Auflösung mit richtigen Gewichten nicht, da die hier angeführten mittleren Fehler duch systematische Fehler noch gefälscht erscheinen.

Mittlere Fehler.

(82)

	selenozentrisch			geozentrisch		
	dh	$d\lambda$	$d\beta$	dh	$d\lambda$	$d\beta$
Messier A	0".63	136"	17"	0".46	0".62	0".08
Kepler A	0.51	96	22	0.30	0.44	0.10
Egede A	0.45	55	127	0.35	0.25	0.58
Tycho	0.77	160	97	0.53	0.73	0.44

Auffallend ist hier zunächst, wie schon oben aus den m. F. einer Gleichung zu sehen war, die Unsicherheit der Rektaszensionsbestimmung von Tycho, der allerdings schwer zu beobachten war, und entsprechend die große Unsicherheit von $d\lambda$. Weiterhin würden die verhältnismäßig großen m. F. von dh und bei Messier A und Kepler A von $d\lambda$, bei Egede A und Tycho von $d\beta$ auffallen,

wenn diese scheinbare Unsicherheit nicht dadurch erklärt würde, daß bei den beiden ersteren sich dh schwer von $d\lambda$, bei den letzteren sich schwer von $d\beta$ trennen läßt, was durch die Lage dieser Punkte bedingt ist. Es ist unmöglich, sich ein Urteil aus (82) darüber zu bilden, wie genau nun etwa die berechnete α- und δ-Differenz eines dieser vier Hauptpunkte gegen die Mondmitte ist. Nehmen wir den Ort von Mösting A als richtig an, dann geben die m. F. in (81) an, wie genau das α und das δ eines Punktes durch die Beobachtungen eines Abendes bestimmt sind. Dividiert man diese Fehler durch die Quadratwurzel aus der Anzahl der Abendwerte, so findet man Größen, die zwar nicht in aller Strenge ein Maß für die erlangte Genauigkeit geben, aber doch annähernd ein Urteil über die erzielte Genauigkeit ermöglichen. Wir finden nämlich die Größen

	α	δ
Messier A	$\pm$ 0.″12	$\pm$ 0.″07
Kepler A	$\pm$ 0.10	$\pm$ 0.05
Egede A	$\pm$ 0.09	$\pm$ 0.07
Tycho	$\pm$ 0.21	$\pm$ 0.09

(83)

Es ergibt sich auch hieraus wieder die große Unsicherheit der Länge von Tycho, während im übrigen die Genauigkeit zufriedenstellend ist. Obige Größen lassen also erkennen, daß die scheinbaren Örter dieser vier Hauptpunkte, die durch Anschluß an Mösting A gewonnen sind, noch um 0.″1 bis 0.″2 unsicherer sind als die von Mösting A. Die Ortsbestimmungen der vier Punkte würden wesentlich genauer geworden sein, wenn α nicht durch Antritte, sondern mit Uhrwerk und Schraube gemessen worden wäre.

Die Rotationselemente des Mondes und die selenographischen Koordinaten der fünf Punkte erster Ordnung sind nun folgende:

$$I = 1^\circ 32'.3 \qquad f = 0.85$$

	λ	β	h
Mösting A	$-$ 5° 10′.3	$-$ 3° 11′.0	15′ 34″.61
Messier A	+ 46 53.9	$-$ 1 59.7	15 32.62
Kepler A	$-$ 36 2.2	+ 7 8.5	15 33.80
Egede A	+ 10 28.6	+ 51 29.0	15 32.68
Tycho	$-$ 11 17.6	$-$ 43 25.1	15 32.35

(84)

Die unter h gegebenen Mondradien gelten für die Konstante der HANSENschen Parallaxe 57′ 2.″27. Der Ausgangswert nach SCHLÜTER-

FRANZ war 15′ 32″.35, der Mondradius des Nautical Almanac ist 15′ 34″.21. Den wahren mittleren Radius der Mondperipherie kann man nur aus Sternbedeckungen finden; der BATTERMANNsche Wert 15′ 32″.50, aus einer schönen großen Beobachtungsreihe abgeleitet, dürfte wohl der Wahrheit sehr nahe kommen. Es liegt also Möting A 2″.1 über dem mittleren Niveau des Randes, Kepler A 1″.3 darüber, während die drei anderen Punkte nahezu im mittleren Niveau liegen.

In den Tafeln II bis IV sind die fünf Punkte erster Ordnung mit ihrer näheren Umgebung abgebildet, um eine anschauliche Vorstellung von ihrer Umgebung und einen Anhalt für spätere Beobachtungen zu geben. Diese Bilder sind photographische Verkleinerungen nach 6 besonders schönen Blättern des Pariser Mondatlas, und zwar sind es Kopien von Pl. IX, XXXIII, XXXVIII, XV, XIII, VII in solchem Maßstabe, daß etwa 1 mm = 2″ und der Durchmesser des ganzen Mondes 93 cm ist. Um eine Schätzung der Höhendifferenzen aus den Schattenlängen nach diesen Abbildungen zu ermöglichen, ist unter jeder Karte die Höhe der Sonne über dem Horizonte des betr. Hauptpunktes gegeben. Mösting A würde also eine Höhe von etwa 4000 m, Kepler A eine solche von 2400 m über dem mittleren Niveau des Randes haben. Sollte der Wert von Mösting A durch die älteren Beobachtungen bestätigt werden, so müßte man annehmen, daß der Mond um einen Betrag von beiläufig 1″ oder 2000 m nach der Erde zu verlängert ist, das wäre etwa rund ein Tausendstel des Radius. Denn wenn auch Mösting A in einer gebirgigen Gegend liegt, so scheint gegen eine Höhe von 4000 m über dem mittleren Niveau der Augenschein zu sprechen. Nach den Pariser Photographien kann Mösting A etwa 1″ = 1900 m über den Ebenen seiner Umgebung liegen. Im allgemeinen scheinen aber die größeren Ebenen des Mondes eher unter als über dem mittleren Niveau zu liegen. Kepler A liegt auf den Ausläufern des Keplergebirges, außerdem von allen anderen Punkten dem ersten Radius am nächsten, so daß seine Höhe von 1″.3 erklärlich scheint. Messier A und Egede A sind augenscheinlich derartig gelegen, daß der Kamm ihres Walles nicht erheblich vom mittleren Niveau abweichen dürfte. Tycho endlich liegt in der gebirgigsten Gegend des Mondes, das Ringgebirge selbst ist sehr hoch, jedoch befindet sich der Gipfel des Zentralberges tief unter dem Kamme des Wallgebirges (nach MÄDLER 3000 bis 4000 m),

so daß auch hier der beobachtete Punkt nahezu im mittleren Niveau liegen dürfte. Wenn auch die Abstände vom Mondschwerpunkt für die fünf Punkte nicht sehr sicher bestimmt sind, so scheint mir doch soviel aus den eben angestellten Betrachtungen hervorzugehen, daß sie mit der Wirklichkeit nirgends in Widerspruch stehen. Der größere Radius vector von Mösting A, der aus den Gleichungen I bis IV abgeleitet worden ist, wird also durch die Lösungen der Gleichungen V bis XII bestätigt; denn wollte man $dh_1 = 0$ annehmen, dann würden alle vier anderen Punkte nach den Formeln (64) bis (67) unter das mittlere Niveau sinken, was nicht sehr plausibel ist.

Wir kommen nun zu dem wichtigsten Punkte der ganzen Untersuchung, zu der Größe f. Die früheren Arbeiten hatten Werte von f ergeben, die in der Nähe von 0.5 lagen. Die Folge davon ist (Abh. I Seite 912 und 913), daß in der physischen Libration in Länge als Hauptglied $+ 130'' \sin g'$ auftritt, wo g' die mittlere Anomalie der Sonne ist, d. h. das Hauptglied der physischen Libration hat eine Periode von einem Jahre. Die Gründe, warum man bisher immer diesen Wert von f gefunden hat, sind folgende. In allen Arbeiten über Mösting A ist bisher der Radius vector dieses Gebildes niemals besonders berücksichtigt worden, d. h. man hat nie versucht seine Größe zu bestimmen, sondern dafür den Radius gesetzt, den die betr. Beobachtungsreihe für die Mondperipherie ergab. Sowohl von WICHMANN, HARTWIG wie auch von FRANZ ist deshalb mit einem Radius vector von Mösting A gerechnet worden, der zu klein war. Die optische Libration allein ermöglicht es diese Größe zu bestimmen, indem infolge derselben Mösting A bald rechts oder links, oberhalb oder unterhalb der Mondmitte erscheint. Die Beobachtungen des Kraters gruppieren sich naturgemäß um die Zeiten des Vollmondes, der Vollmond aber durchläuft alle Phasen der optischen Libration etwa im Zeitraum eines Jahres. Wir sehen daraus, daß eine fehlerhafte Annahme für h_1, wenn man immer nur in der Nähe des Vollmondes beobachtet, eine scheinbare Schwankung von Mösting A hervorrufen muß, deren Periode etwa ein Jahr beträgt. Eine fehlerhafte Annahme von h_1 entstellt also das Hauptglied der physischen Libration, die Folge davon ist ein unrichtiges f. Nun hat es der Zufall gewollt, daß die Beobachtungen von HARTWIG ziemlich genau 35.5 Jahr oder 4 Umläufe der Apsidenlinie nach den SCHLÜTER-

schen Beobachtungen angestellt wurden, so daß hier wie dort genau dieselben Verhältnisse gegeben waren. Die Folge davon war, daß dieselbe Rechnungsmethode dasselbe f lieferte, nämlich nach SCHLÜTER $f = 0.49$ nach HARTWIG $f = 0.47$. Die Vernachlässigung der Korrektion des Radius vector von Mösting A ist in der Hauptsache schuld daran, daß man stets einen falschen Wert für f fand, aber andererseits war auch die Theorie der physischen Libration ungenügend. So konnte früher infolge der unvollständigen Entwickelungen der Differentialquotient $d\tau : df$ (siehe 31) nie richtig berechnet werden, infolgedessen auch kein richtiges f resultieren.

Die Vernachlässigung von dh_1 ist wieder ein Beispiel dafür, daß man bei komplizierten Problemen, bei denen es sich überhaupt nur um kleine Größen handelt, kleine Größen nicht vernachlässigen darf, ohne sich vorher überzeugt zu haben, daß diese Vereinfachung gestattet ist. Auffallend ist die begangene Vernachlässigung besonders deshalb, weil nach der Hypothese von HANSEN ein sehr großer Wert von dh_1 nicht ausgeschlossen war.

Durch den nunmehr gefundenen Wert $f = 0.85$ ist auch ein Widerspruch beseitigt, der zwischen den HANSENschen Mondstörungen und den Arbeiten über die physische Libration bestand. HANSEN findet nämlich aus der Bahnbewegung des Mondes $f = 0.9$. Dieser Wert ist gegeben in „Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen von P. A. HANSEN", I. Abhandlung, Seite 479. HANSEN spricht an dieser Stelle über die von LAPLACE, NICOLLET und WICHMANN gefundenen Werte von f und sagt am Schluß des betr. Paragraphen im Hinblick auf den unaufgeklärten Widerspruch: „Es scheint in der Theorie der Rotation des Mondes noch etwas verborgen zu liegen, worüber von der Zukunft Aufklärung erwartet werden muß."

Die Ephemeride des Berliner Jahrbuchs ist gerechnet mit den Größen

$$\lambda_1 = -5^0\ 10'\ 19'', \quad \beta_1 = -3^0\ 11'\ 24'',$$

$$I = 1^0\ 31'\ 22'',$$

$$u = \tau = +133'' \sin g' - 22'' \sin g + 18'' \sin 2\omega,$$

$$w \sin I = \sigma \sin I = -95'' \sin g, \quad w'' = \varrho = -95'' \cos g,$$

$$h = 15'\ 32''.35.$$

Bis genauere Werte vorliegen, wird man dafür anzunehmen haben:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -5^0\ 10'.3, \quad \beta_1 = -3^0\ 11'.0, \\ I &= 1^0\ 32'.3, \\ \tau &= -6''\sin g + 34''\sin g' + 5''\sin 2\omega + 8''\sin(n - 5^0), \\ \sigma \sin I &= -117''\sin g + 48''\sin(g + 2\omega) - 11''\sin(2g + 2\omega) \\ \varrho &= -115''\cos g + 48\cos(g + 2\omega) - 11''\cos(2g + 2\omega), \\ h &= 15'\ 34''.61. \end{aligned}\right\} (85)$$

Rechnet man nach den Vorschriften Kapitel VIA, so hat man

$$d\lambda_1 = -6''\sin g + 34''\sin g' + 5''\sin 2\omega + 8''\sin(n - 5^0).$$

$$d\beta_1 = -115''\sin(\omega + \lambda_1) - 48''\sin(\omega - \lambda_1) + 11''\sin(g + \omega - \lambda_1).$$

Aus Tabelle 38 sieht man, daß der scheinbare Ort von Mösting A, gerechnet mit den FRANZschen Werten, stellenweise um Beträge korrigiert werden muß, die größer sind als die Wirkungen der physischen Libration. Denn geozentrisch ist etwa

$$d\lambda_1 = +0''.15\sin g',$$

$$d\beta_1 = -0''.52\sin(\omega + \lambda_1) - 0''.22\sin(\omega - \lambda_1),$$

während die Summen der in Tabelle 38 gegebenen Korrektionen

in α zwischen $+0''.78$ und $-0''.37$

in δ zwischen $+0''.48$ und $-0''.94$

liegen.

Es sei mir zum Schluß gestattet einiges über die Wege und Ziele weiterer selenographischer Arbeiten zu sagen und das hervorzuheben, was notwendigerweise zu geschehen hat.

Das Wünschenswerteste ist zunächst eine Neureduktion der Beobachtungen von Mösting A. Die Bearbeitung der HARTWIGschen Beobachtungen hat jetzt, wie schon erwähnt, die Leipziger Sternwarte übernommen, es wären demnach noch neu zu bearbeiten die SCHLÜTERsche und WICHMANNsche Reihe. Als wünschenswert ist dabei zu bezeichnen, daß die Beobachtungsgleichungen in einer Form aufgestellt werden, welche den unmittelbaren Zusammenhang zwischen den Unbekannten und den beobachteten Größen darstellt, weil es dann möglich ist, ohne allzu große Arbeit nach Einführung von Korrektionen der Beobachtungen die

Gleichungen neu aufzulösen. Die bisher übliche BESSELsche Form dieser Gleichungen, welche von der Gestalt

$$dl = \frac{\partial l}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial l}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial l}{\partial I} dI + \frac{\partial l}{\partial f} df,$$

sind, gestattet dies nicht. Hier ist l die selenozentrische Ekliptikallänge von Mösting A. Die Gleichung für db lautet analog. Diese Form ist gewählt worden, weil die Berechnung der partiellen Differentialquotienten sehr einfach ist, dafür müssen aber erst die beobachteten Größen auf das System der selenozentrischen Ekliptik transformiert werden. Wenn man also die Beobachtungen korrigiert, muß man diese Transformation immer von neuem durchführen. Die von mir gewählte Form der Bedingungsgleichungen ist

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial h} dh + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \alpha}{\partial I} dI + \frac{\partial \alpha}{\partial f} df,$$

wo α die scheinbare Rektaszension von Mösting A ist. Hier ist die Berechnung der partiellen Differentialquotienten komplizierter, dafür aber die Möglichkeit gegeben, ohne große Arbeit alle möglichen Verbesserungen anzubringen, anderweitig gut bestimmte Werte dieser oder jener Unbekannten einzuführen usw., und schließlich die übrigbleibenden Beobachtungsfehler zu untersuchen auf etwa vorhandene Glieder der „willkürlichen Libration" und möglicherweise existierende Polhöhenschwankungen.

Diese zuletzt genannten Untersuchungen haben aber nur Aussicht auf Erfolg, wenn über die Werte von I, f, λ_1, β_1, h_1 kein Zweifel mehr besteht, und wenn man in der Lage ist, die wesentlichsten systematischen Korrektionen in Rechnung zu ziehen. Die Reihenfolge der vorzunehmenden Arbeiten würde demnach sein:

1. Ableitung der Werte für I, f, λ_1, β_1, h_1.
2. Darstellung der Beobachtungen mit diesen Werten, hieraus Berechnung der Randkorrektionen und sonstiger systematischer Verbesserungen.
3. Erneute Auflösung nach Anbringung dieser Reduktionen.
4. Untersuchungen über „willkürliche Libration und Polhöhenschwankung".

Es ist zu hoffen, daß schon aus den HARTWIGschen Beobachtungen und den vorliegenden die Randkorrektionen in brauchbarer Form hervorgehen werden. Mein Plan ist für je 2 bis höchstens 3 Werte der optischen Libration in Länge und in Breite Korrektionstabellen

aufzustellen. Es wird dann nicht schwer sein, in Form einer Ephemeride die Lage des Mondnordpoles und des ersten Radius bis auf $0^{\circ}.1$ genau gegen die Mondmitte für jeden Tag zu geben, sodaß man dann sofort in der Lage ist, wenn nur der Positionswinkel der beobachteten Randstelle bekannt ist, aus der passenden Korrektionstabelle die gewünschte Verbesserung zu entnehmen. Solche Verbesserungen würden nicht nur die Genauigkeit unserer Beobachtungen wesentlich steigern, sondern auch bei Meridianbeobachtungen des Mondrandes und Sternbedeckungen von großem Nutzen sein. Erfolgt die Bedeckung gerade durch einen einzelnen Berg oder verschwindet der Stern in einem Taleinschnitt, so lassen sich derartige Entstellungen der Beobachtungen natürlich nicht unschädlich machen, weil so detaillierte Korrektionen sich nicht aufstellen lassen. Es ist aber wohl nicht von der Hand zu weisen, daß der Wert der Sternbedeckungen hierdurch ein noch größerer werden würde.

Untersuchungen über Niveauverhältnisse auf dem Monde werden sich am einfachsten und sichersten mit Hilfe von guten Mondphotographien ausführen lassen, welche möglichst extremen Werten der optischen Libration angehören. Durch die Verwendung von Photographien wird einerseits die Menge der Rechnungen bedeutend reduziert, andererseits ist aber auch die Sicherheit der Pointierung größer als bei direkten Beobachtungen. Solche Untersuchungen können jedoch einwandfreie Resultate erst dann liefern, wenn die Rotationselemente des Mondes sicher bekannt sind. Der Maßstab der Platten dürfte sich genau genug und einwandfrei aus den drei Punkten Egede A, Mösting A und Tycho bestimmen lassen, während andererseits Messier A. Mösting A und Kepler A die Orientierung liefern.

Während man bei absoluten Ortsbestimmungen darauf Bedacht nehmen wird, alle, also auch die Beleuchtungsverhältnisse möglichst zu variieren, würde es bei solchen differentiellen Messungen vorteilhaft sein die einzelnen Objekte unter derselben Beleuchtung zu beobachten. Da nach Neureduktion der älteren Librationsbeobachtungen Mösting A derjenige Punkt der Mondoberfläche sein dürfte, dessen Abstand vom Mondschwerpunkt am genauesten bekannt sein wird, würden Höhendifferenzen gegen diesen Krater zu messen sein, denn Messungen gegen den Rand sind, wie wir gesehen haben, viel zu unsicher.

Auf diese Weise ließen sich viele interessante Fragen lösen, von denen hier nur die folgenden noch erwähnt sein mögen. Die große Menge von kleinen, sehr regelmäßigen Kratern, wie der Kürze halber diese Objekte genannt werden sollen, auf den Flächen der Mare werden ein sehr gutes Mittel darbieten, die für die Erklärung der Mare sehr wichtige Frage zu lösen, ob letztere demselben Niveau angehören, oder ob hier und da bedeutende Höhenunterschiede auftreten. Ist die Zahl der so untersuchten Punkte erst eine große, dann ist auch Aussicht vorhanden, die Frage nach der Verlängerung des Mondes in der Richtung der Erde in bündiger Weise beantworten zu können.

Verbesserungen zur I. Abhandlung.

Es muß heißen auf Seite 877, Zeile 6 v. u.:

$$-412''\sin(2g+2\omega) \quad \text{statt} \quad -654''\sin(2g+2\omega),$$

ferner Seite 878, Tabelle 6, Kolumne L:

$$-413''\sin(2g+2\omega) \quad \text{statt} \quad -655''\sin(2g+2\omega).$$

Die weiteren Entwicklungen werden von diesen Fehlern nicht berührt.

Inhalt.

I. Kapitel.

Seite

Beschreibung des Leipziger Refraktors 5
Die Aufstellungskonstanten 9
Das Fadenmikrometer 9
Die periodischen Fehler der Schraube 12
Die fortschreitenden Fehler der Schraube 16
Die Fadenabstände 18
Bestimmung des Schraubenwertes 23
Die Winkel des Fadennetzes 28
Beobachtungen mit dem Mikrometer und ihre Reduktion 31
Das Triebwerk 33
Frühere Arbeiten mit dem Refraktor 35

II. Kapitel.

Die der Abhandlung zugrunde liegende Beobachtungsreihe und ihre Reduktion 36

III. Kapitel.

Die Formeln der Koordinatentransformationen 40

IV. Kapitel.

Die Differentialformeln der Transformationen 43

V. Kapitel.

Die Transformation vom wahren auf den mittleren Mondäquator 48
Abhängigkeit dieser Transformation von den Trägheitsmomenten des Mondes 50

VI. Kapitel.

Zusammenstellung der Rechnungsvorschriften 52
A. Transformation der selenographischen Koordinaten in die scheinbare Rektaszension und Deklination 53
B. Transformation der scheinbaren Rektaszension und Deklination in die selenographischen Koordinaten 54
C. Differentialformeln, welche die Abhängigkeit der scheinbaren Rektaszension und Deklination von den einzelnen Elementen darstellen. . 54
D. Aufstellung der Beobachtungsgleichungen 56

VII. Kapitel.

Seite

Berechnung der scheinbaren Örter von Mösting A mit den Elementen nach Franz 59

Berechnung der scheinbaren Örter der 4 anderen Hauptpunkte mit genäherten Koordinaten 60

Die mikrometrischen Anschlüsse Mösting A — Mondrand und ihre Darstellung durch die Rechnung 71

Die mikrometrischen Verbindungen zwischen Mösting A und den 4 anderen Hauptpunkten nebst Darstellung durch die Rechnung 76

Die numerischen Werte der Differentialformeln

$$d\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial h}\,dh + \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\,d\lambda + \frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\,d\beta + \frac{\partial\alpha}{\partial I}\,dI + \frac{\partial\alpha}{\partial f}\,df$$

$$d\delta = \frac{\partial\delta}{\partial h}\,dh + \frac{\partial\delta}{\partial\lambda}\,d\lambda + \frac{\partial\delta}{\partial\beta}\,d\beta + \frac{\partial\delta}{\partial I}\,dI + \frac{\partial\delta}{\partial f}\,df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 81$$

VIII. Kapitel.

Die Beobachtungsgleichungen 91

Die Normalgleichungen und ihre Lösungen aus den Beobachtungen Mösting A — Rand unter der Annahme, daß f nahezu 0.5 ist 100

Dasselbe in der Annahme $f = 0.75$ 102

Dasselbe in der Annahme $f = 0.9$ 102

Die Normalgleichungen und ihre Lösungen aus den mikrometrischen Verbindungen zwischen Mösting A und den 4 anderen Hauptpunkten . . 105

Die plausibelsten Werte der gesuchten selenographischen Koordinaten und Rotationselemente aus der vorliegenden Beobachtungsreihe 109

IX. Kapitel.

Zusatzreihe zur besseren Bestimmung der Länge und Breite von Mösting A; Distanzmessungen zwischen Mösting A und Mondrand 111

Reduktionsmethode dieser Beobachtungen 112

Darstellung dieser Beobachtungen durch vorläufige Werte der Unbekannten 115

Erste Ausgleichung der gefundenen Widersprüche 121

Abweichungen des Mondrandes von der Kreisform 124

Zweite Ausgleichung unter Berücksichtigung der gefundenen Randkorrektionen 126

X. Kapitel.

Ableitung der definitiven Resultate 129

Die Sicherheit der gefundenen Werte 130

Die Resultate der Abhandlung 133

Die Ephemeride des Berliner Jahrbuches 136

Wege und Ziele fernerer selenographischer Arbeiten 137

Erläuterungen zu den Tafeln finden sich für Taf. I auf Seite 125, für Taf. II bis IV auf Seite 134.

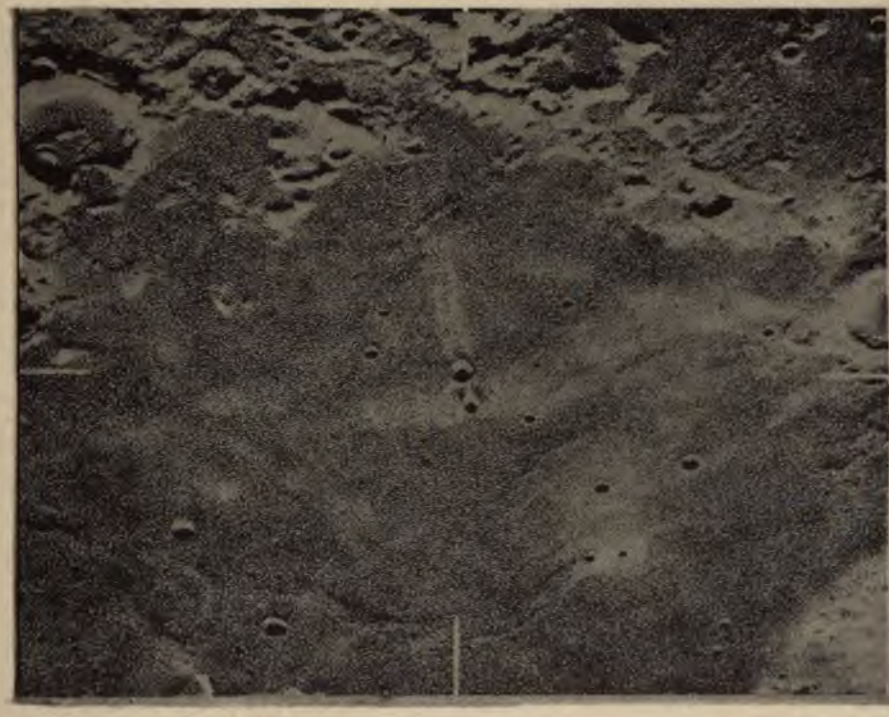
Das Profil des Mondes.

UNCONTROLLED COPY

Mösting A
Höhe der Sonne 11°

Mösting A
Höhe der Sonne 25°

Kepler A
Höhe der Sonne 6°.



Messier A
Höhe der Sonne 14°

Copyright Library

Tycho
Höhe der Sonne 19°

Egede A
Höhe der Sonne 13°

STANFORD LIBRARY

ZUR WEITEREN KENNTNIS DER NERVENENDFÜSSE UND ZUR STRUKTUR DER SEHZELLEN.

VON

HANS HELD.

DES XXIX. BANDES
DER ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

N° II.

MIT EINER DOPPELTAFEL.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1904.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 4. Juli 1904.
Das Manuskript eingeliefert am 26. Juli 1904.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 8. September 1904

ZUR WEITEREN KENNTNIS DER NERVENENDFÜSSE UND ZUR STRUKTUR DER SEHZELLEN.

VON

HANS HELD.

I. 1. Zur Geschichte und Kritik der Nervenendfüsse.

Für die Frage nach dem *morphologischen Zusammenhange der Nervenelemente* bei Wirbeltieren haben die *Endfüße der Neuriten* unzweifelhaft eine große Bedeutung. Das geht wohl jetzt mit Sicherheit aus vielen Beobachtungen der letzten Jahre hervor. Nur die feinere Art und Weise, mit der die Nervenendfüße die räumlich getrennten Zellelemente zur Einheit verknüpfen, ist von den einzelnen Beobachtern sehr verschieden gesehen, ja entgegengesetzt gedeutet worden. Die verschiedenen Meinungen zu kritisieren und auf neue Beobachtungen zu stellen, ist der Zweck der folgenden Untersuchung.

Ich kann hierfür an meine älteren Beobachtungen, die ich 1897 veröffentlicht habe (1, 2) anknüpfen, in denen ich zuerst für eine *bestimmte Stelle der Nervenfasern* das Wort *Endfuß* gebraucht habe. Mit besonderen Färbungsmethoden konnte ich damals (1. S. 270 u. 275) nachweisen, daß *feine und marklose Nervenfäserchen der grauen Substanz* sich aus dem übrigen Fasergewirr loslösen und mit einer *fußartig verbreiterten Fläche sich den Neuriten, dem Neuritenhügel und dem Zellleib fremder Nervenzellen verbinden.* Die *Nervenendfüße* erschienen als *letztes Verbindungsstück* räumlich getrennter Nervenzellen auf dem Wege ihrer Neuritenfortsätze. Auf dieser Grundlage habe ich dann eine neue Deutung der Silberbilder der Golgischen Methode versucht. Was an den schwarzen Silhouetten der zentralen Nervenzellen als kurze Auswüchse ihres Protoplasmas erschien und insbesondere den sogenannten Dornenbesatz ihrer Dendriten bildete, waren nicht eigene Seitensprossen, wie angenommen wurde, sondern die Summe der ihr angehefteten Endfüße. Was Deiters bereits vereinzelt als sein zweites und feineres System von Axencylinderfortsätzen gesehen, waren nicht entspringende sondern endende Nervenfäserchen; nur daß durch seine Mazerations- und Isolationsmethode nur spärliche Reste von jenen zahlreichen Endfüßen erhalten geblieben, welche an zentralen

Ganglienzellen ihre nervöse Axencylinderendfläche netzartig zusammensetzen. Zum Unterschied von dem Begriff eines freien Endbäumchens, eines perizellulären Faserkorbes oder einer die Dendriten frei umrankenden Nervenfaser, Anordnungen, die durch R. y CAJAL erkannt worden waren, mußte also dieses System der Nervenendfüsse als eine feinere Einrichtung gelten, die nicht nur eine präzisere Formanpassung an die jeweilige Oberfläche der verästelten Zellen darbot, sondern auch eine wichtigere Stelle in der Reizumleitung von Zelle zu Zelle anzeigte. Will man jene weitere Ordnung der Nervenfasern im Umkreis der verzweigten Ganglienzelle mit dem Epheugeflecht am Baumstamm vergleichen, wie das damals zur Zeit ihrer Entdeckung geschah, so würde das System der jener Zelle angepaßten und ihr aufsitzenden Endfüße erst den Saugwürzelchen jenes Rankwerkes an die Seite zu stellen sein. Wie aus der gröberen Begleitfaser der Nervenzellen im einzelnen *axiale und kollaterale Endfüße* gebildet werden, habe ich näher 1902 (3) gezeigt. Außer durch seine fußartig gestaltete Form erschien bei meiner Methode der Nervenendfuß noch durch einen gleichmäßigeren Reichtum an Neurosomen ausgezeichnet, ein struktureller Beweis, daß die auf Schnitten von ihrer Stammfaser meist abgeschnittenen Endfüsse nicht kurze und eigene Seitensprossen der Ganglienzelle waren.

Nach mir hat dann AUERBACH (4. 5) mit einer eigenen Färbmethode, die gleiche Einrichtung an der Oberfläche zentraler Nervenzellen dargestellt. Er nennt jene Gebilde an der Ganglienoberfläche *Endknöpfe* und erblickt auch in ihnen *typische Nervenendigungen*. Das war also eine Bestätigung meiner Angaben. In einer zweiten Frage, die mit der morphologischen Auffassung jenes Oberflächenbesatzes der Ganglienzelle zusammenhängt, aber eine Hauptfrage für die Lehre vom Zusammenhang der Ganglienzellen bedeutet, hat AUERBACH dagegen einen anderen Standpunkt begründet. Er läßt zum Unterschied von mir, der ich eine *wirkliche und feste Verbindung zwischen Nervenendfuß und der betreffenden Ganglienzelloberfläche* behauptet hatte, nur eine einfachere *Berührung*, wie es die Neuronlehre angenommen, bestehen. Nicht eine Verwachsung, wie ich im Sinne der HISSchen Neuroblastenlehre für jene Stelle der Verbindung angenommen, sondern nur ein inniger Kontakt soll nach AUERBACH zwischen den beiderseitigen aneinander geschmiegten Oberflächen bestehen. Zu entscheiden,

welche von beiden Ansichten richtig, wäre also die Lösung einer prinzipiellen Frage, die auf den Vorgang der Umleitung einer Nervenerregung von Ganglienzelle auf Ganglienzelle, allgemein gesagt also auf die Ausbreitung nervöser Reize in einem zentralen System von Ganglienelementen einiges Licht werfen müßte. In dem einen Fall des Kontaktes wäre das ein Überspringen des Reizes, dem Funken einer Leydener Flasche z. B. vergleichbar, bei dem anderen Modus einer festeren Verbindung dagegen das Fortschreiten einer Erregung in einem kontinuierlichen Leiter.

Bei den folgenden Beobachtungen werde ich nur stellenweise auf die früheren gegenseitigen Gründe und Angaben zurückgreifen. Den Streit der Meinungen auf eine neue Unterlage zu stellen, ermöglicht heute eine neue Färbungsmethode, die von R. y Cajal[6]) geschaffen worden ist. Unstreitig stellt diese Methode, die im frischen oder vorfixierten Gewebsblock eine Silberimprägnierung mit nachfolgender Reduktion der von gewissen Teilen des nervösen Gewebes vorwiegend absorbierten Lösung von salpetersaurem Silber herbeiführt, einen wichtigen Fortschritt in der Technik der Gehirnuntersuchung dar. Die Methode ist leicht, ziemlich sicher und gibt klare und auch elegante Bilder. Sie wird sicherlich eine gewisse Epoche in der Gehirnforschung eröffnen. Trotzdem ist sie nicht fundamental, weil der Umfang ihrer Resultate nicht so breit ist, daß er immer einen sicheren Schluß auf eine vollständige Darstellung von wesentlichen Teilen zuläßt. Es gibt diese Methode leider an zahlreichen und vor allem wichtigen Stellen unvollständige Färbungen, sodaß es als eine methodische Aufgabe der nächsten Zeit erscheint, durch eine modifizierte Art der Fixierung vielleicht eine umfassendere Art der Färbung herbeizuführen, und damit den Hauptfehler der Cajalschen Methode, eine gewisse Einseitigkeit ihrer Ergebnisse zu beseitigen. Die Resultate dieser Abhandlung, die mit den von R. y Cajal selber gegebenen in zwei fundamentalen Fragen nicht übereinstimmen, werden dieses Urteil im einzelnen beweisen. Cajal selber bekämpft mit seiner Methode meine Lehre von der morphologischen Verbindung der Ganglienzellen durch ihre Nervenendfüße, da er wie Auerbach an jenen Stellen nur einen Kontakt findet. Zweitens richtet Cajal seine Befunde auch gegen die Lehre Apathys, nach der die Neurofibrillen ein die sonstigen Zellgrenzen durchsetzendes und also geschlossenes Leitungssystem bilden. Einen dritten Punkt in den neuen An-

gaben CAJALS bilden seine gegen BETHE gerichteten Beobachtungen, wonach die einzelnen Neurofibrillen in den zentralen Ganglienzellen der Wirbeltiere nicht unabhängig im Zellinnern laufen, sondern im Sinne APATHYS zusammenhängende Gitter oder Netze bilden. Der letzteren Angaben CAJALS kann ich zustimmen, seine beiden ersten dagegen muß ich als unrichtig bezeichnen.

Dies im einzelnen nachzuweisen, vermögen meine folgenden Beobachtungen. Eine Prioritätsfrage muß ich zuvor entscheiden. Ich bin dazu durch die Art und Weise gezwungen, wie CAJAL einige der Hauptbefunde seiner neueren Methode eingekleidet hat. Zur Darstellung der Neurofibrillen und der AUERBACHschen Endknöpfe oder Endknospen (letztere Bezeichnungsweise in d. Zeitschrift f. wiss. Mikr. 1904) empfiehlt CAJAL diese seine neue Methode. In seiner Abhandlung (6. S. 153) bemerkt er zu seiner Fig. 8 „disposicion ya vista por AUERBACH", um dann später in einer Literaturzusammenstellung (S. 155—157) auszuführen: „entre los que ricientemente y con ayda de métodos nuevos han confirmado esta disposicion en el adulto, debemos citar à AUERBACH" (Neurolog. Zentralbl. 1897. 1898) und später „HELD . . . ha descrito y figurado también en una de suis ultimas memorias (1902) los botones de AUERBACH bastante alterados y en continuación con fibrillas nerviosas". Das muß bei Literaturunkundigen den Eindruck erwecken, als ob letztere Gebilde zuerst von AUERBACH entdeckt und gewürdigt worden sind. Aber auch bei Forschern, die sonst in der Literatur der Gehirnanatomie nicht unbewandert sind, hat diese einseitige CAJALsche Darstellung verwirrend gewirkt. So spricht M. v. LENHOSSÉK in seinem Referat über die CAJALsche Methodik (Neurolog. Zentralblatt 1904) von „AUERBACHschen Endfüßchen", ein besonderer Schritt von literarischer Ungenauigkeit. Dabei hatte ich bereits in einer früheren Arbeit (3. S. 208) Gelegenheit genommen, zu erklären, daß AUERBACH das, was ich als Endfüße der zentralen Neuriten beschrieben, später Endknöpfe genannt habe. Ich fühlte mich damals zu dieser ausdrücklichen Bemerkung veranlaßt, weil AUERBACH selber in seinen späteren Arbeiten (4. 5) an keiner Stelle erwähnt hatte, daß seine Endknöpfe, die er als typische Nervenendigung hinstellte, schon von mir als Endfüße markloser Nervenfäserchen an den Ganglienzellen der grauen Substanz erkannt und bezeichnet worden waren. Sein auf der Frankfurter Versammlung deutscher Naturforscher und

Ärzte (1896) gehaltener Vortrag „Zur Anatomie und Physiologie der Nervenfasern" kann ihm nach meiner Meinung in dieser Sache keine Priorität bringen, ebenso wie in der anderen der perizellulären nervösen Terminalnetze, welche, wie ich 1897 gezeigt (2), durch netzartige Verbindung der Neurosomenhaufen oder der Endfüsse entsteht. Ich finde in diesem Vortrag (s. Verhandl. d. Ges. deutsch. Naturf. u. Ärzte. 68. Vers. zu Frankfurt 1896), der sich sonst auf gegensätzliche Unterschiede in der Konstitution markloser und markhaltiger Nervenfaserabschnitte ergeht, nur folgende hierher gehörige Angaben (S. 311), daß „überall da, wo graue Massen lagern, sich ein ganz unglaublich feines Geflecht abhebt, das insbesondere die Ganglienzellen und deren protoplasmatische Ausläufer mit allerfeinsten, Knötchen tragenden Fäserchen umspinnt", und weiter: „Es ist durch den Vergleich mit Golgischen Präparaten unschwer festzustellen, daß dieses feinste Maschenwerk, das wir in solchen Präparaten überall da, wo Ganglienzellen lagern, in überraschender Zartheit, einem dichten Gewebe gleich, schauen, nur zum Teil aus protoplasmatischen Fortsätzen sich bilden kann, die ja an die Ganglienzellen nicht wie ein Gespinnst sich anzuschmiegen pflegen, sondern daß dieses umspinnende Geflecht zum großen Teil wenigstens aus Nervenfasern bestehen muß". Diese Angaben schließt die Bemerkung, daß „auch im völlig entwickelten Zustand die letzten Endverzweigungen der Axencylinder, mit welchen wir es hier zu tun haben, auf der ursprünglichen Stufe verbleiben, auf welcher die Nervenfasern keine Markscheide besitzen". Zu diesen Ausführungen Auerbachs meine ich, daß ebensowenig wie in dem „feinsten Maschenwerk", dem „unglaublich feinen Geflecht" die Beobachtung und der Begriff eines geschlossenen nervösen perizellulären Terminalnetzes, so auch in den „Knötchen tragenden Fäserchen", welche als „letzte Endverzweigungen der Axencylinder" marklos sind, die klare Vorstellung eines Endfusses nicht enthalten sind. Die Auerbachsche Bezeichnungsweise „Endknopf" findet sich erst in seiner Arbeit vom Jahre 1898; jene „Knötchen" erweckten noch keine neue Anschauung, die von der bekannten Erscheinung dicht gedrängter feinster variköser Nervenfäserchen der grauen Substanz irgendwie abwich, ebenso wie jene „marklosen letzten Endverzweigungen" seines perizellulären Geflechtes sich noch nicht von den Bildern begrifflich entfernten, die R. y Cajal als besondere perizelluläre Endbäumchen kennen gelehrt hatte. Daß sie aber

eine umfangreiche Erweiterung solcher Kenntnisse bedeuten, will ich damit in keiner Weise bezweifeln. Mit diesem Urteil über den Frankfurter Vortrag glaube ich die damalige Ausdrucksweise AUERBACHS von dieser allgemeinen Einrichtung in der grauen Substanz richtig und objektiv wiedergegeben zu haben. Wenigstens kann ich aus seinen Worten nicht mehr heraus lesen. Ich führe dafür noch einen kurzen Aufsatz AUERBACHS an, der kurz vor meinen betr. Arbeiten erschienen („Färbung für Axencylinder und ihre Endbäumchen", Neurol. Zentralblatt 1897 IV, 60). Der Aufsatz gibt außer der Methode auch ihre Resultate kurz an: „jedenfalls gewährt die Methode einen überraschenden Einblick in die Verteilung der marklosen Endbäumchen innerhalb der grauen Massen der Zentralorgane und vermittelt uns erst eine wahre Anschauung von dem unendlich dichten, stellenweise unentwirrbaren Faserfilze, der im erwachsenen wie im unentwickelten Organismus sämtliche Nervenzellen, von den größten bis zu den kleinsten, umspinnt".

Erst in den beiden AUERBACHschen Arbeiten von 1898 (4 u. 5) finden sich jene Begriffe erörtert und auf Grund seiner eigenen Methodik aufgenommen, die ich zuvor aus meinen Beobachtungen gewonnen hatte. So erscheint in der ersten von beiden das Wort „Endknopf" für dieselbe Sache, die ich „Endfuß" genannt, jenes „unglaublich feine Geflecht" ist zu einem *wahrscheinlich* vorhandenen „wirklichen Netze" geworden, „das stellenweise die Zellen umspinnt". In folgenden Arbeiten (5 u. 6) wird erst die Bezeichnung „terminales Nervennetz" für das gewählt, was ich in seiner die Ganglienzellen einhüllenden Gestalt als „perizelluläres nervöses Terminalnetz" beschrieben. Wenn also AUERBACH in der betreffenden Arbeit (5. S. 201) schreibt „in seiner vollen und für den ersten Eindruck höchst überraschenden Ausdehnung ward das terminale Nervennetz sonach weder von GOLGI noch von einem anderen Forscher vor mir gewürdigt", so ist das keine objektive Darstellung der einschlägigen Literatur. Den diesen Satz begründen sollenden Hinweis auf den Frankfurter Vortrag vom Jahre 1896, kann man nicht als solchen gelten lassen, weil in dem wie gezeigt jene Anschauungen und Begriffe noch nicht enthalten sind. Passen etwa die Worte von marklosen Endbäumchen, Faserfilz, Geflecht und Maschenwerk, mögen diese noch so unglaublich fein und unentwirrbar erscheinen, zu der Vorstellung und dem Begriff eines wirklichen Netzes?

Für die Kenntnis der Verbindungsweise von zentralen Ganglienzellen durch Nervenendfüße und ihre netzartige Verbindung[1]) muß ich also hier nochmals ausdrücklich meine Priorität hervorheben. Oder sollte Cajal zu jener so wenig objektiven Bezeichnungsweise dadurch veranlaßt sein, daß Auerbach von den Endknöpfen einen Nervenkontakt, ich dagegen vom Endfuß eine Nervenverbindung behauptet hatte, die Cajal an seinen früheren wie neueren Präparaten nicht finden konnte? Dann wäre immer noch gänzlich unberücksichtigt gelassen, daß beide doch morphologisch identische Gebilde sind, deren Fußflächen allein nur eine entgegengesetzte Deutung erfahren.

Nach diesen einleitenden literarischen Bemerkungen kann ich jetzt auf das vorliegende Problem näher eingehen, um zunächst einige Einwände zu berühren, die direkt oder indirekt meiner Behauptung von der verbindenden Natur jener Nervenendfüsse gemacht worden sind.

Ich beginne mit einigen Ausführungen v. Köllikers (Erinnerungen aus meinem Leben. 1899, II. Abschnitt S. 241—264). Die Frage, ob die „Neurodendren oder Neuren als anatomisch selbstständige, für sich bestehende isolierte Bildungen" zu betrachten sind, beantwortet v. Kölliker damit, daß er vorläufig keinen Grund finde, von der Hypothese abzugehen, wonach die „Neurodendren nur durch Kontakt und nicht durch Verschmelzung auf einander wirken". Meine Beobachtungen schienen ihm eher in seinem Sinne zu sprechen. Die Kürze dieser Begründung läßt mich vermuten, daß v. Kölliker hierbei diejenigen meiner Abbildungen gemeint hat, auf denen der neurosomenreiche Endfuß scharf vom neurosomenarmen Protoplasma der betreffenden Ganglienzelle wie abgesetzt erscheint. Abgesehen davon, daß bei den ebenfalls neurosomenreichen Zellexemplaren dieser äußere Gegensatz verschwindet, meine ich aber, daß eine zirkumskripte Granulierung einer weiter reichenden protoplasmatischen Masse überhaupt keine Grenze für letztere angeben kann: das „Verbindende" sind außerdem nicht die Neurosomen, sondern die ihre Zwischenräume aus-

1) Die literarische Angabe Bethes (Allgemeine Anatomie und Physiologie des Nervensystems. 1903): „Der erste, der einen Zusammenhang dieser Netze (gemeint sind die Golgimetze) mit Nervenfasern (Neuriten, nackten Axencylindern) annahm, war Semi Meyer (1897)", ist ebenfalls nicht richtig. Ich verweise hierzu auf meine Darstellung in der Arbeit von 1902 (3).

füllende Masse. In einem anderen Kapitel „Sind der Spitzenbesatz der Dendriten der Neurodendren normale Bildungen oder ein Kunstprodukt?“ geht v. KÖLLIKER auf die verschiedenen Meinungen hierüber ein. Die Ansicht CAJALS, der sie für natürliche Bildungen hält und zwar für freie Seitenäste der Dendriten mit einer ganz unbekannten Funktion, kann v. KÖLLIKER nicht teilen. Er hält die Dornen der Dendriten allgemein für Kunstprodukte, womit auch meine Auffassung der Silberbilder und die Lehre vom Dendritenbesatz durch Nervenendfüsse abgelehnt erscheint. Vier Gründe führt v. KÖLLIKER für seine Erklärung an. Zwei von ihnen kann ich von vorn herein nicht als zwingend gelten lassen. Daß „das Vorkommen, die Menge und Größe der Spitzen und auch das Aussehen des Spitzenbesatzes so ungemein wechselnd“ ist, gibt keinen absoluten Grund dafür, daß die Methode mit ihren Fehlern derartiges erst geschaffen. Wechselnde Zustände zwischen dem Dendritenprotoplasma und dem der Endfüße bedingen schon allein für sich auch wechselnde Imprägnationsbreiten. Das gleiche gilt von den Gliazellen, die ebenfalls bald glatt, bald moosig an ihren Ausläufern aussehen, nur daß es hier sich um Differenzen zwischen Gliafasern und ihren Protoplasmaresten handeln wird. Daß außerdem noch die Methode gelegentliche Niederschläge liefern kann, will ich damit nicht in Abrede stellen. Von den beiden anderen Gründen, ist der eine der, daß auch die *Axonen „oft eine höckerige Oberfläche* und nie *Knötchenbelag* zeigen“. Nun haben nach meinen Beobachtungen außer Zelleib und Dendriten nur der Ursprungshügel der Neuriten noch Endfüße, sodaß es möglich erscheint, derartige Besätze eher auf Niederschläge oder Kunstprodukte zurückzuführen. Aber eines darf dabei nicht außer Acht gelassen werden; es haben nach meinen Beobachtungen, die ich allerdings nur vereinzelt und ungleichmäßig bei Anwendung der BETHEschen Molybdänmethode erhalten habe, die *marklosen Fäserchen an ihrem Ende ebensowohl wie die noch nicht markumhüllten Anfangsstücke der Neuriten feinere GOLGInetze, die sie einscheiden.* Vor allem an den Faserkörben der PURKINJEschen Zellen sah ich derartige Scheiden, in denen außerdem noch derbere Gliaschnürringe ausgeprägt waren. Durch abstehende Spitzen hingen diese Scheiden der marklosen Neuritenendverzweigungen mit dem allgemeinen aber außerordentlich feinen Gliareticulum zusammen. Es erscheint somit wahrscheinlich, daß die zuweilen auf GOLGI-

präparaten ausgeprägten Seitenzäckchen der Axonen nur eine gleichzeitige Imprägnation der Nervenfasern und der Golginetze mit ihren Übergangsfäden in jenes Reticulum bedeuten. Andererseits wird verständlich, wie die Golgische Silberimprägnation mitunter einen scheinbaren Übergang von mitgefärbten Neuriten in die perizellulären derberen Golginetze schafft, eine Mitfärbung, die ich auch bei der Betheschen Molybdänmethode gefunden habe, und die es so aussehen läßt, als ob die Enden von Neuritenzweigen direkt in die Balken des Golginetzes sich fortsetzten.

Nun zu dem Hauptgrund v. Köllikers, wonach die Seitenzacken der Dendriten Kunstprodukte sein sollen: die frisch oder nach Mazeration isolierten Ganglienzellen zeigen „*nie* auch nur eine Spur von Exkreszenzen". v. Kölliker führt eigene Beobachtungen und solche von Max Schultze, Deiters, Ranvier, Vignal hierzu an. Deiters möchte ich gleich aus dieser Reihe herausnehmen, da er nicht nur an seinen Isolationspräparaten *vereinzelte kegelförmig zugespitzte Seitenstücke an den Dendriten* gesehen hat, sondern sie sogar auch öfters in *feine Fäden verlängert* gefunden, die teilweise *markumhüllt* werden. Ein Grund für ihn, eine Lehre aufzustellen, wonach die „Ganglienzellen als Zentralpunkte für *zwei Systeme echter Nervenfasern*, einer meist breiteren, immer einfachen und ungeteilten Faser, und eines zweiten ausgedehnten Systems von kleinsten Fäserchen, die an die Protoplasmafortsätze angeheftet sind". Ich unterscheide mich von Deiters, dessen Beobachtungen ich im übrigen wieder gemacht habe, nur dadurch, daß ich, wie ich 1897 begründet, die Ursprungsstellen seines zweiten Systems für Nervenendfüsse halte und zwar für Endfüsse, die den Dendriten verbunden sind. Das letztere ist auch Deiters nicht entgangen; läßt er sie doch sogar aus jenem Protoplasma entspringen. Merkwürdig aber ist, daß man jenen Deitersschen Satz, den man auch heute noch trotz der veränderten Auffassung als einen Hauptsatz in der Lehre von den zentralen Ganglienzellen bezeichnen kann, so wenig beachtet hat. Ich habe ihn nur noch von Bethe gewürdigt gefunden. Weiter unten werde ich nochmals auf diesen Satz zurückkommen.

Wenn also v. Kölliker bei seinen Isolationen die Dendriten stets glatt bekommen hat, so kann dies also nach den von mir bestätigten älteren Beobachtungen von Deiters nicht schwer ins Gewicht fallen. Ich füge hinzu, daß ich neuerdings in Fortsetzung

meiner früheren Mazerationsversuche im wolframsauren Ammonium ein Mittel gefunden habe, durch nachträgliches und vorsichtiges Schütteln Ganglienzellen isoliert zur Beobachtung zu bringen, die in der gleichen Weise, wie es meine früheren Schnittfärbungen getan haben, die Ganglienzellen von einem granulär gebauten Mantel, mit den noch vereinzelt feinste und variköse Nervenfäserchen zusammenhängen, bedeckt zeigen. Als isolierbare *morphologische Einheiten der nervösen grauen Substanz* erscheinen danach die *Ganglienzellen mit ihrer nervösen Hülle,* die sie gleichsam wie eine *periphere Zone* auf sich tragen Als *zentraler Abschnitt* dieser Einheiten würde also das gelten, was man bisher als *glatt verästelte Ganglienzellen* gesehen hat. Damit scheint mir ein Gesichtspunkt gewonnen, die WUNDTsche Theorie von der zentralen Innervation in einer morphologisch veränderten Fassung wieder aufzunehmen und eine diesen Formanschauungen entsprechende Erklärung zu versuchen, warum in der grauen Substanz eine einseitige Leitungsrichtung vorwiegend resultiert.

Die Einwände, die SEMI MEYER und AUERBACH gegen mich erhoben haben, sind etwas anderer Art; sie gehen von *Färbungsdifferenzen* aus, die sich zwischen dem *Nervenendfuß und dem Protoplasmastück der betreffenden Ganglienzellen* zeigen. So sagt SEMI MEYER (7. S. 491): „Freilich lehren HELDS Untersuchungen wie ja auch die meinigen, daß die Kontakte weit inniger sind, als man es sich bisher vorgestellt hat ... — aber die chemisch differenzierende Methylenblaumethode zeigt doch unzweideutig, daß, so dicht die Elemente auch vorhanden sind, ihre Substanzen sich nicht vermindern, sonst wäre eine so reinliche Scheidung bei der vitalen Methylenblaureaktion nicht denkbar. Meine Ansicht geht mithin dahin, daß ich zwar HELDS Angaben nicht bestreite, nach denen histologisch nicht zu erkennen ist, wo der eine Bestandteil anfängt und der andere aufhört ... — daß aber beide Elemente noch soweit gesondert bleiben, daß sie in ihrem Chemismus voneinander unabhängig sind. Hiernach sprechen meine Beobachtungen im Gegensatze zu HELD mehr für die Richtigkeit der Kontaktlehre." Ähnliche Gründe hat AUERBACH. Er findet „stets eine haarscharfe Linie als Grenze zwischen markloser Nervenfaser und Ganglienzelle", sodaß man nie bei seinen Präparaten im Zweifel sein könne, „wo die eine aufhört und die andere anfängt". Deshalb hält er an der Konktaktlehre fest. Aber er schränkt sie,

wie auch SEMI MEYER, doch etwas ein (4 S. 9): „Wie ich diese Lehre auffasse, wirken die Endbäumchen und das Polster ihrer sich aufs engste an die Zelloberfläche anlehnenden Endknöpfchen, ohne Vermittelung einer ferneren Zwischensubstanz, jedoch als differente Gebilde, auf das Protoplasma der Ganglienzellen in mir noch unbekannter Weise ein. Daß nebenbei während des Lebens in funktionellem Sinne eine innigere Verbindung bestimmter Zellen oder Zellterritorien sich ausbildete, ist möglich, vielleicht wahrscheinlich. Ich denke aber bei den funktionellen Zuständen weder an eine amöboïde Bewegungstätigkeit, denn die Endbäumchen finden sich, soweit wir untersuchen, unausgesetzt innig an die Zellen und deren Dendriten angeschmiegt — noch kann ich auf der anderen Seite eine Vermischung, ein Ineinanderfließen, eine dauernde Verwachsung der Protoplasmamassen anerkennen."

Also das wenigstens wird mir von beiden Forschern zugegeben, daß der *reine Kontakt nicht vorhanden* ist, den die Neuronlehre seinerzeit behauptete. Daß aber damals wirklich die Vorstellung einer losen und rein äußerlichen Auflagerung der Nervenendbäumchen auf die Dendriten oder den Zellleib von Ganglienzellen bestand, wird niemand nachträglich bezweifeln können. Die Hypothese von RABL-RÜCKHARDT und DUVAL über die amöboïde Bewegung sich berührender Endbäumchen und Dendriten, ihre Modifikationen durch TANZI und LUGARO, die inzwischen wieder zurückgezogene Theorie CAJALS von der Kontraktilität der Neurogliazellen und ihrem funktionellen Einfluß auf die Enge oder Weite der Nervenkontakte usw. sind beredte Zeugen solcher Auffassungsweise. Nun möchte ich aber von SEMI MEYER und AUERBACH wissen, wodurch sich ein bloßer Kontakt von einem innigen oder gar innigsten Kontakt unterscheidet, auch möchte ich außerdem noch erfahren, wodurch sich der innigste Kontakt von einer Verbindung oder Kontinuität unterscheidet. Beim bloßen Kontakt der nervösen Endbäumchen hat man doch damals die Überleitung von Reizen sich als einen Vorgang vorgestellt gehabt ähnlich dem Überspringen eines elektrischen Funkens. Soll dies beim innigen Kontakt auch noch gelten? Kontakte sind doch dadurch charakterisiert, daß sie voneinander jederzeit entfernt oder auch einander wieder genähert werden können. Soll das für den innigsten Kontakt, der nach AUERBACH unausgesetzt bestehen soll, nicht mehr zutreffen? Wenn jemand für den elektrischen

Strom eine Leitung aus Drahtenden von verschiedenem Metall zusammengeschweißt oder zusammengelötet hätte, so wäre das doch eine kontinuierliche Leitung, trotzdem an jenen Verbindungsstellen scharfe Grenzen zwischen dem Kupferdraht, dem Stück aus Silber und dem Ende aus Messing zu sehen sind oder überall sich noch Lötmasse einschiebt. Würde man einen Physiker überreden können, wenn man ihm sagte, das Ganze sei nur eine aus innigsten Kontakten hergestellte Leitung?

Ich schließe also, daß jene färberische Differenz zwischen dem Nervenendfuß und dem betreffenden Zellstück oder jene scharfe und deutliche Absetzung einer mikroskopisch sichtbaren „Grenze" zwischen beiden noch kein Beweis ist gegen die von mir behauptete Kontinuität der Leitung oder, anders ausgedrückt, nicht gegen die feste Verbindung zwischen beiden Teilen spricht. Daß im übrigen beide mikroskopisch verschieden aussehen, habe ich selber von vornherein nie bestritten. Ich habe im Gegenteil angegeben, daß nicht nur zwischen dem engeren Axospongium der markhaltigen Strecken und dem aufgelockerten der nervösen Endfläche Unterschiede bestehen, sondern daß auch beide von dem Neurocytospongium, der Protoplasmamasse des Zelleibes und der Dendriten, durchgreifend verschieden sind (1. S. 242). Ob diese auffallende Differenz im Verhalten gegen Farbstoffe auf „chemische Verschiedenheiten zwischen Axospongium und Cytospongium oder auf Dichtigkeitsdifferenzen der Plasmamasse in beiden" zurückzuführen sind, habe ich damals unentschieden gelassen. In *solchen Unterschieden* kann ich aber, wie gezeigt, *keine wirklichen Beweise gegen den allgemeinen Begriff einer kontinuierlichen Leitung* finden, höchstens gewichtige *Bedenken gegen eine gleichmäßig gute Leitung.*

Ich komme jetzt zu den neuesten Arbeiten von RAMON Y CAJAL, in denen er meine Auffassung von der doppelten kontinuierlichen Verbindungsweise der Ganglienzellen zurückweist. Auf Grund einer neuen Methode glaubt CAJAL zweierlei definitiv widerlegt zu haben, erstens die morphologische Kontinuität des nervösen Protoplasmas durch Nervenendfüße und zweitens solche durch Vereinigung der Nervenendfüße zu einem nervösen Terminalnetz an der Oberfläche fremder Ganglienzellen (6. S. 157 „Por lo demás y con relacion à la médula, las ideas de HELD son totalmente inadmisibiles. Acabamos de probar que las fibrillas nerviosas corren à lo largo del soma y dendritas, uniendóse más ó menos

flojamente durante los trajectos, y terminándose por placas ó mazas en contacto intimo con la membrana, á la que no barrenan jamás, ni se anastomosan con hilos venidos de otras mazas vecinas"). Seine Fig. 7, die dies zeigt, ist aber nach meiner Meinung eine *höchst unvollständige Färbung*. Es sind nicht nur einmal alle Endfüße ausgefärbt, es fehlt vor allem jede Vollständigkeit ihrer Form. Sie sind nicht rund, wie dies die Cajalsche Figur zeigt, sondern *sternförmig*. Das hat auch Auerbach gesehen und als charakteristisch für sie erkannt und bewiesen. Infolgedessen fehlt auch jede Verbindungsweise jener nur angefärbten Endfüße durch feine und kurze Verbindungsstacheln, wie ich es vor kurzem genauer gezeigt habe (3).

Auf die Angabe Cajals hin habe ich nun auführlicher seine Methode angewandt; sie zeigt in der Tat für gewöhnlich nicht mehr, als Cajal abgebildet. Färbt man aber mit irgend welchen Kontrastfarben (Erythosin, Toluïdinblau nach kurzer Molybdänisierung, oder auch mit Alsolhämatoxylinfärbungen), so zeigen sich jene Unvollständigkeiten der Silberfärbung. Es sind mehr Endfüße zu sehen, es liegt auch oft um jene rundlichen Formen oder jene Endovale eine weitere Masse deutlich herum. Daß auch jene fehlende Netzbildung auf partiellem Versagen der Methode beruht, ist ebenfalls nachzuweisen. Anfangs glaubte ich, der ammoniakalische Alkohol hätte die Verbindungsfäden usw. zerstört. Das mag an manchen Stellen wohl der Fall sein, da ich es mit meinen gewöhnlichen Färbungen nicht überall sicher verneinen kann. Zum Teil ist es aber wenigstens sicher nicht so. An einzelnen dünnen Kalottenabschnitten der Ganglienzellen von in gleicher Weise fixiertem Material habe ich mich überzeugt, daß an dieser Stelle eine *netzige Verbindung jener Endfüße* bestand. Im übrigen füge ich hinzu, daß auch Auerbach keine zueinander freien Endbäumchen mehr annimmt, sondern reichliche und echte Netze um die Ganglienzellen findet. Das erscheint mir also als ein Hauptfehler der sonst so schöne und klare Bilder gebenden neuen Methode Cajals. Da färbt die alte Golgische Chromsilbermethode gelegentlich vollständiger. Bei der Cajalschen Technik ist mir aber auch, abgesehen von einigen Ansätzen, das Gelegentliche bisher nicht gelungen. Der Einspruch Cajals gegen meine Behauptung von einem perizellulären nervösen Terminalnetz ist also hinfällig. Näher auf die Einrichtung der perizellulären

nervösen Terminalnetze einzugehen und ihren von NISSL (Die Neuronenlehre. 1903) bestrittenen Zusammenhang mit markhaltigen resp. marklos gewordenen Nervenfasern der grauen Substanz, liegt nicht im Plan dieser Abhandlung.

Von der zweiten Hauptfrage nach dem morphologischen Zusammenhang der Ganglienzellen glaubt CAJAL ebenfalls, daß sie durch seine neue Methode erledigt sei. Er meint, daß meine Theorie der Konkreszenz (so bezeichnet CAJAL meine im Sinne der HISSchen Neuroblastenlehre auf Konkreszenz zurückgeführte Beobachtung von der kontinuierlichen Verbindung eines Nervenendfußes mit dem betreffenden Ganglienzellenprotoplasma), „que no representa sino una nimia variante de nuestra doctrina de la transmission por contacto entre arborizariones nerviosas y dendritas y cuerpos celulares", gründlichst verfehlt sei. Lassen wir einmal die Theorie beiseite und fragen wir darnach, wie das feinere Verhältnis beider Massen, des Endfußes und des Zellprotoplasmas, zueinander ist, so wird sich jedenfalls entscheiden lassen müssen, ob eine Kontinuität oder ein Kontakt vorliegt. Den unten folgenden Ausführungen vorgreifend, will ich hier nur behaupten, daß mir die neue CAJALsche Methode etwas anderes gezeigt hat als ihrem Schöpfer, nämlich eine weitergehende Färbung der Nervenendfüße, die nicht mehr jene Stelle als Kontakteinrichtung zu bezeichnen irgendwie noch erlaubt. Ob nun das durch Konkreszenz entstanden ist, wie ich früher auf Grund der HISSchen Neuroblastenlehre behauptet, ist eine besondere Frage, auf die ich hier nicht näher eingehen will. R. Y CAJAL hat meine Lehre vom Zusammenhang der Ganglienzellen als „nimia variante" seiner Kontakttheorie bezeichnet. Das ist historisch betrachtet durchaus richtig. Die reichen CAJALschen Entdeckungen von perizellulären Beziehungen zentraler Nervenfasern haben überhaupt erst dazu geführt, genauer als früher, wo allgemeine Netzvorstellungen von der grauen Substanz und im besonderen das Suchen nach Anastomosen von Zellfortsätzen durch ihre letzten gegenseitigen Spitzen vorherrschten, die Oberfläche der verästelten Ganglienzelle und ihren Umkreis zu beachten und zu untersuchen. Sonst aber meine ich, daß der Unterschied, ob an jener morphologischen Stelle ein Kontakt oder eine Kontinuität besteht, ein fundamentaler ist. Von ihm hängt es ab, wie man sich die Reizumleitung in der grauen Substanz von einer Ganglienzellstation zu einer zweiten vorzustellen hat.

Im folgenden werde ich also des näheren auf die prinzipielle Frage eingehen, wie sich die Verbindungsweise der Ganglienzellen durch ihre Nervenendfüße im Sinne der neuen CAJALschen Methode zeigt. Da ich hierbei des öfteren auf verschiedene Auffassungen von der Struktur des nervösen Protoplasmas zurückgreifen muß, so schicke ich solche Betrachtungen jener voraus.

2. Zur Struktur des nervösen Protoplasmas.

Drei Ansichten sind in der Hauptsache über den feineren und inneren Bau der Ganglienzellen aufgestellt worden. Die eine sieht in der *Grundmasse*, welche zwischen den NISSL-Körpern liegt und der Leitung der nervösen Erregung vorstehen würde, einen *wabigen* Bau. Sie bedeutet die besondere Übertragung einer allgemeinen Idee vom Bau des Protoplasmas überhaupt auf die Ganglienzellen im besonderen; sie ist von BÜTSCHLI aufgestellt und insofern nur von mir akzeptiert worden, als ich hierbei die künstliche Mitwirkung gewisser Fixierungsmittel bei derartigen Strukturen schärfer betont habe. Für einen *rein netzigen* oder *netzig-fibrillären* Bau, in dem gewisse *Längsteile von dichterer oder festerer Substanz* ausgeprägt sind, bin ich nur mit einer gewissen Reserve eingetreten, die sich hinreichend aus jener von mir beobachteten vakuolisierenden Wirkungsweise der Fixierung erklärt. Jedenfalls habe ich gegenüber den Angaben von M. SCHULTZE und H. SCHULTZE betont, daß die dünnen Lösungen von Chromsäure und Ammonium bichromicum nicht rein parallel oder nur verkreuzt laufende Fibrillen, sondern reichlichst durch feinere und weniger dichte Querfäden netzig verbundene zeigen. Das waren gleiche Bilder, wie sie BÜTSCHLI und früher SCHWALBE bekommen hatten. Jedenfalls möchte ich heute die sogenannten *pseudo-wabigen* Strukturen, wie sie seiner Zeit vielen Beobachtern und auch mir selber viel zu schaffen gemacht haben, scharf davon unterscheiden. Eine ungleichmäßige Körnelung, entsprechende Lücken und ein schwer, meist etwas subjektiv aufgelöstes netziges Zwischengerüst sind die Charakteristika solcher Strukturen und ihrer methodisch unzureichenden Unterlage. Im Vordergrund des Interesses stehen diejenigen Ansichten, die im Bau des nervösen Protoplasmas besondere *Leitungsstrukturen* von *fädiger* Beschaffenheit erkennen wollen. Seit M. SCHULTZE haben zahlreiche Forscher wie VON KUPFFER, FLEMMING, DOGIEL, LUGARO,

MANN, COX, BECKER u. a. in den *Fibrillen der Ganglienzellen und ihrer Fortsätze das Wesentliche ihrer histologischen Struktur* gesehen. Auf einzelne Unterschiede in ihren Meinungen und vor allem ihrer verschiedenwertigen methodischen Tiefe näher hier einzugehen, muß ich mir versagen. Ich verweise hier auf die klare und präzise Besprechung, die vor kurzem NISSL (Die Neuronenlehre. 1903) diesem Kapitel der Nervenzellengeschichte hat zuteil werden lassen. In Rücksicht auf ihre vorgeschrittenere Technik will ich hier aber in besonderer Gruppe die Arbeiten von DONAGGIO, APATHY, BETHE und CAJAL näher besprechen. Besonders haben die Beobachtungen APATHYS (8) einen *neuen Gesichtspunkt für eine begründbare Auffassung solcher Protoplasmastrukturen* gebracht. Da sie bei Wirbellosen nachweisen konnten, daß die *Fibrillennetze einer Zelle mit denen einer zweiten, dritten* usw., die nicht nur eine Ganglienzelle, sondern auch eine Sinneszelle, eine Muskelzelle usw. sein kann, *direkt durch längere oder kürzere Fibrillenzüge zusammenhängen*, so war es wahrscheinlich geworden, daß auf solchem Wege von *Neurofibrillen* auch die *Reizleitung* zustande kommt. Die übrige Protoplasmamenge als Perifibrillärsubstanz scheint daran unbeteiligt zu sein, wenigstens in Hinsicht auf die Länge der einzelnen Wege, in der sie angeblich nicht kontinuierlich ausgebildet ist. Ob sie gar nicht für die Querleitung in Betracht kommt, ist schwer zu entscheiden. Irgend eine Kontinuität der Perifibrillärsubstanz zu beobachten, ist bisher jedenfalls niemandem gelungen. Der Versuch von MAX WOLFF (9), die fibrilläre Substanz als Stützsubstanz aufzufassen, jenes übrige Protoplasma, das mit dem alten LEYDIGschen Hyaloplasma identifiziert wird, als leitendes Element hinzustellen, ist aus jenem Grunde nicht gelungen, da sie für einzelne Abschnitte eines motorischen Nerven und hier auch nur eine diskontinuierliche Neurosomenverteilung nachgewiesen hat. Auch für die Wirbeltiere ist von APATHY eine Struktur von Neurofibrillennetzen behauptet worden. Ein näherer Beweis fehlt bisher. Von DONAGGIO (9a) ist seit 1896 ein solcher versucht und durch eine eigene Methode gegeben worden. Eine klare Vorstellung seiner Befunde gibt seine in den Trattato di Fisiologia von LUCIANI (Mailand 1902) aufgenommene Zeichnung einer multipolaren Ganglienzelle. Auch RAMON Y CAJAL ist durch seine neue Silbermethode zu einer begründeten Auffassung von einer netzig-fibrillären Bauart der Wirbeltierganglienzellen vorgedrungen. Schon 1896 hatte

CAJAL (10) eine solche Struktur behauptet, indem er bei Thioninfärbungen von alkohol- resp. sublimatfixiertem Material zwischen den NISSL-Körpern ein aus blaß gefärbten Balken maschig geformtes Spongioplasma erblickte.

Gegen dieses CAJALsche Spongioplasma habe ich damals (1) den Vorwurf erhoben, daß bei seiner Methodik eine Verwechselung mit den in maschigen Abständen verteilten Neurosomen nicht ausgeschlossen sei. Auch habe ich gemeint, daß CAJAL die von ihm beobachtete Struktur nicht scharf genug von einer etwaigen Wabung resp. groben Vakuolisierung des Protoplasmas habe unterscheiden können. Auch NISSL (Die Neuronenlehre. 1903) ist diesen Fragen nach der Ursache solcher Strukturen nachgegangen, zugleich zu entscheiden versuchend, inwieweit sich die Ansichten verschiedener Beobachter methodisch decken oder nicht. Auf jeden Fall ist R. Y CAJAL jetzt durch seine neue Silbermethode in die Lage gekommen, mit *Sicherheit* demonstrieren zu können, daß im *Protoplasma der Ganglienzellen ein Fibrillennetzwerk* vorkommt. Es stimmt dies zu den Beobachtungen von DONAGGIO, der mit eigener Methode untersucht hat. Die von beiden Forschern gefundenen Strukturen stimmen auch, soweit ich dies beurteilen kann, da die APATHYschen Beobachtungen an Wirbeltierganglienzellen noch nicht abgebildet vorliegen, mit den Angaben des letzteren überein.

Das gibt also zusammen einen geschlossenen Gegensatz zu den Beobachtungen BETHES (11), der mit seiner Molybdänmethode schöne Bilder von Wirbeltierganglienzellen gegeben hat, die einen *isolierten Fibrillenverlauf* im Innern ihres Protoplasmas anzeigen. Nur *parallel gerichtete* oder *verkreuzte Fibrillen* kommen nach ihm in den zentralen Ganglienzellen vor. Eine Ausnahme machen allein bisher die Spinalganglienzellen und die Zellen des Lobus electricus von Torpedo; in ihnen hat BETHE eine netzartige Verbindung der Fibrillen, ein Fibrillengitter, gefunden. Für die Ganglienzellen der Wirbeltiere hat sich nur BIELSCHOWFSKY der Lehre von BETHE, „daß die Fibrillen bei den meisten Zellarten glatt durch den Zellkörper hindurchlaufen, ohne im Innern miteinander Verbindungen einzugehen, wie dies bei Wirbellosen in so auffallender Weise geschieht", auf Grund besonderer Methoden angeschlossen.

Meine eigenen Beobachtungen, auf die ich jetzt eingehe und die ich mit der CAJALschen Silberreduktionsmethode erhalten habe,

sprechen im Sinne von DONAGGIO, APATHY und CAJAL gegen die BETHEsche Lehre. Schon vorher hatte ich einige Zweifel gehabt auf Grund einzelner Präparate der BETHEschen Molybdänmethode, die mir bei den Zellen des Abducenskerns vom Kaninchen eine Färbung netzartig verbundener Fibrillen zeigten, die freilich etwas gekörnt aussahen. Zur Überzeugung ist das aber erst geworden, seitdem ich mit der CAJALschen Methode gearbeitet habe, deren Färbungsresultate ich seit ihrer Publikation eifrig verfolgt habe. Vorwiegend habe ich am Rückenmarke des Kaninchens und Hundes untersucht, auf das ich durch frühere Beobachtungen geübt bin. Die Abbildungen dieser Arbeit (Figg. 1—18) sind aus Präparaten vom Kaninchenrückenmarke und zwar aus allen Regionen seiner grauen Substanz gewonnen worden.

Die Figg. 1b—4, 6 stellen Randteile von großen multipolaren Zellen des Vorder- und Seitenhorns dar; sie könnten, so wie sie hier vorliegen, für die BETHEsche Lehre sprechen, da sie keine sichere Teilung oder Netzbildung von Fibrillen anzeigen. Zu allen Figuren mit Ausnahme der Fig. 2 bemerke ich aber, daß der mehr zentrale oder perinukleäre Abschnitt des Zellkörpers bereits eine netzförmige Anordnung der von der Oberfläche resp. vom Dendriten her einstrahlenden Fibrillenzüge zeigte. Einen geringen Teil jener Zone zeigt der obere Rand der Fig. 1b, an dem einige netzbildende Fibrillenfäden zu sehen sind. Nur in der Zelle, aus der Fig. 2 herausgeschnitten ist, habe ich keine sichere Gitterbildung auch im Innern beobachten können. Das gilt auch von der Fig. 11. Da diese aber ebenso wie die Fig. 2 Schnittrichtungen zeigen, die eine ganze Summe von Fibrillen und Fibrillenbündeln rein quer getroffen haben, und außerdem nur eine Schnittdicke von 3 μ vorliegt, so wird von vielfachen Netzbildungen (Fig. 11 zeigt rechts einige) nicht viel zu sehen sein. Die übrigen Abbildungen, besonders die Figg. 5 u. 12—16, zeigen dagegen sehr deutliche Fibrillennetze, die mit den charakteristischen Abbildungen und Beschreibungen von DONAGGIO, APATHY, RAMON Y CAJAL übereinstimmen. Sie sprechen ohne weiteres gegen das Allgemeine jener BETHEschen Ansicht. Höchstens lassen sie eine Meinung zu, daß es vielleicht 2 Arten von zentralen Ganglienzellen gebe, solche in denen nur verkreuzte Fibrillen vorhanden sind, und solche, in denen es zur Ausbildung von zusammenhängenden Fibrillennetzen gekommen.

Betrachtet man jene inneren Netzbildungen näher, so erkennt man ohne weiteres, daß außer jenem Unterschied von engeren und weiteren Fibrillengittern oder auch von solchen, in denen die Fibrillen selber fein oder gröber sind, *vor allem* das eine, daß die *einzelnen Anteile jener Netze sehr ungleich* kräftig gefärbt sind (Figg. 7, 9, 13, 16). Nicht nur im Zellkörper, auch in den Dendriten zeigt sich derartiges (Figg. 10, 17a—c, 18), wobei im allgemeinen die Längszüge dicker sind und auch dunkler gefärbt sind und so deutlicher vor den blassen und feinen Verbindungsfäden, die sie quer oder schief verbinden, hervortreten. Ob dies auf substantiellen Unterschieden oder auf Dichtigkeitsdifferenzen beruht, muß unentschieden bleiben. Nur hebe ich ausdrücklich hervor, daß derartige Farbnüancen nicht ohne weiteres für zwei chemisch total verschiedene Substanzen sprechen, da dieselbe Substanz dort, wo sie dichter gebaut ist, dunklere Farbtöne liefern muß, während sie an anderen Stellen von lockerem Gefüge nur blaß oder überhaupt nicht in Farbe sichtbar werden wird, zumal wenn eine in der Reaktion so unsichere Methode, wie es die BETHEsche Methode und etwas weniger wohl auch die neue CAJALsche Technik sind, angewendet ist, bei denen immer nur positive Schlüsse gelten. Meine Meinung geht also dahin, daß die BETHEsche Methodik nur in der Darstellung der dickeren und dichteren Neurofibrillen bei Wirbeltieren sicherer ist, sodaß ihr ohne weiteres jene feineren Netzverbindungen entgehen. An den Dendriten läßt sich das leicht demonstrieren, in denen nur die längslaufenden Fibrillen gefärbt werden resp. gefärbt bleiben. An den Bifurkationen der Dendriten zeigt bekanntlich die BETHEsche Methode, daß die Fibrillenbündel des Stammes dort in seine beiden Teiläste einfach auseinander weichen, wo ein NISSLscher Verzweigungskegel sitzt. Der läßt sich aber auch aus den Bildern der CAJALschen Methode in seinem Ort erkennen, wenn man die feineren Netzwerke hinweg nimmt, die hier stets vorhanden sind. Danach ist also die Sachlage die, daß die *Fibrillenzüge nicht einfach die NISSL-Körper im Negativbild angeben,* — das würde nur für die gröberen Fibrillenlängsteile gelten — sondern daß die *feineren Zwischennetze ausgiebig die Substanz der NISSL-Körper durchsetzen und zerklüften* müssen. Das scheint mir ein wichtiges Ergebnis der CAJALschen Methode zu sein. Im übrigen zeigt meine Fig. 18 in Übereinstimmung mit den zahlreicheren Abbildungen ihres Er-

finders, daß auch in dem jenen Substanzkegel passierenden Netzwerk derbere Fibrillenzüge vorkommen können. Daneben gibt es Verzweigungsstellen der Dendriten, in denen auch bei der CAJALschen Methode jenes Zwischengitter so fein und blaß angelegt ist, daß auch ein äußerer methodischer Übergang zu der BETHEschen Darstellungsweise angedeutet erscheint. Warum im Zellkörper die Molybdänmethode regelmäßig immer nur verkreuzte Fibrillen liefert, vermag ich nicht zu entscheiden. Es kommen auch hier Dicken- und Dichtigkeitsunterschiede in der Färbung vor (Figg. 5 u. 13). Warum aber so gleichmäßig auch dickere Fibrillengitter, wie in Fig. 15, bei der BETHEschen Technik einfach ausbleiben, ist vorläufig schwer zu sagen. Jedenfalls ist aber eine sichere Behauptung dafür, daß das blasser Gefärbte etwas total Verschiedenes sei, was mit jenen, den echten Fibrillen nichts zu tun habe, hieraus nicht abzuleiten. Ich mache außerdem in dieser wichtigen Frage nach einer möglichen, auch funktionellen Verschiedenheit der blassen und der dunklen Netzteile darauf vor allem aufmerksam, daß keineswegs beide scharf und unvermittelt gegen einander abgesetzt sind. Das zeigt die Fig. 16, die ich allein aus dem Grunde beigefügt habe, weil sie deutlich das *allmähliche Übergehen der derberen und dunkler sichtbaren Gitterstücke in das blaß-feine und enger gefügte Netzwerk* beweist. Das schließt auch eine Betrachtungsweise aus, die nur den dickeren Netzzügen die Natur von Neurofibrillen zusprechen würde. Dagegen läßt sie eine Auffassung entstehen, wonach *besser und schlechter leitende Strecken* für die innerhalb der Ganglienzellen sich ausbreitenden Nervenreize ausgeprägt sein werden, Leitungsabschnitte, die auch einer funktionellen Anpassung und Umbildung unterliegen könnten. Solchen Betrachtungen werden sich auch die engeren Stellen der Nervenendfüße, auf die ich jetzt ausführlicher zurückkommen kann, zugänglich erweisen. Zweierlei habe ich zuvor zum Schluß dieses Abschnittes noch zu erörtern. Wie liegt zum fibrillären Gitterwerk der Zelle die Summe der NISSL-Körper und der feineren Protoplasmakörnchen, die ich als Neurosomen bezeichnet habe. Ich verlege sie in die Maschenräume, auf Beobachtungen fußend, die mir jene granulären Gebilde diese mehr oder weniger ausfüllend gezeigt haben. Auch das Kanälchensystem, welches die Nervenzellen als HOLMGREENsches Trophospongium durchsetzt und zum großen Teil auch nach meiner Meinung mit dem Apparato

reticulare von GOLGI identisch ist, würde durch eigene Wandung abgegrenzt in jenen Zwischenräumen laufen. Ich habe vielfach bei einzelnen mit Alsol-Hämatoxylin nachgefärbten Zellexemplaren ein jenen Röhren entsprechendes System von Lücken gesehen, welches deutlich von den seiner matter gefärbten Wand anliegenden dunklen Fibrillen und dem noch blasser granulierten Inhalt der Fibrillenmaschen abgesetzt erschien.

Eine zweite Frage bleibt, die aus der Beobachtung einer teilweise (Figg. 16—18) so engen Struktur der Fibrillennetze sich loslöst: wie verhalten sich diese Resultate der CAJALschen Methode zu den Abbildungen, welche ich früher von dem mit dünnen Fixierungslösungen (Ammonium bichromicum oder Chromsäure 1:1000) behandelten Nervenzellenprotoplasma erhalten habe (s. besonders 1, Figg. 9 u. 10 auf Tafel IX, Fig. 10 Tafel XI und die Figg. 12 u. 13 meiner ersten Abhl. zur Struktur d. Nervenzellen. Arch. f. Anatomie 1895).

Da ich einzelne der Präparate aus jener Zeit aufgehoben habe, so konnte ich jene mit den neueren vergleichen. Die *Maschengröße* stimmt auffallend; nur würde ich heute, wo ich zeichnengeübter und zeichnensicherer geworden, jene Maschenbilder ein wenig stärker wiedergeben; auch würden stellenweise einige Längs- und Querzüge jener Zeichnungen etwas dicker ausfallen. Sonst sehen mir auch heute noch jene Strukturen entschieden vakuolig aus, wenigstens an den meisten Stellen. Die einzelnen Maschen erscheinen etwas rundlicher oder auch mehr längsoval und erscheinen voller in der Überschneidung ihrer Wände. Auch bei neueren Fixierungsversuchen mit Ammoniummolybdat und nachfolgender Auswaschung mit dünnem Alkohol bekomme ich Strukturen, die im allgemeinen jenen gleichen, insbesondere aber sich den Bildern der CAJALschen Silberfärbung nähern, da ich auf ihnen dunkler gefärbte Längszüge von Fibrillen herausdifferenzieren kann. Deshalb meine ich, daß zwischen den beiden so verschiedenen Behandlungsweisen eine bestimmte Beziehung bestehen muß, über die ich folgende Meinung mir gebildet habe. Wenn ich von gewissen Bildern der silbergefärbten Nervenendfüße vorläufig (s. weiter unten) absehe, so sind die CAJALschen Strukturen sicher nicht einfache Vakuolisierungsstrukturen. Es erscheinen einmal die einzelnen Teile, da wo sie quergetroffen, als rundliche Punkte. Zweitens sieht das Protoplasma jener Ganglienzellen bei un-

differenzierten Eisenhämatoxylinfärbungen z. B. unvakuolisiert aus zum Unterschied von jenen Fixierungsbildern. Eine gleichmäßiger gekörnte Struktur mit schwacher Andeutung einer netzigen Anordnung kommt allein zur Beobachtung. Hier und da in gewisse Zellen einige Lücken jener HOLMGREENschen Kanälchen. Daraus folgere ich, daß in der *vakuolisierten Struktur bei jenen dünnen Fixierungsmitteln,* die so wenig energische Fällungswirkungen besitzen, durch ihre an und für sich *lösenden* Eigenschaften und die im *Gewebsstück entstehenden* und nebenher laufenden *autolytischen Prozesse* ein *Protoplasmarest* bleibt, der in seiner deutlichen Schaummasse jene feinere und fibrillennetzige Struktur enthält, zum Teil aber auch wohl direkt diese zweite Form einer besonderen Struktur anzeigt. Das letztere schließe ich daraus, daß ich nicht überall Differenzen in der Stärke oder Dicke gleicher Teile beider Strukturbilder habe konstatieren können.

3. Nervenendfüße.

Der CAJALschen Figur 7 (6. S. 152) stelle ich meine Abbildungen von Nervenendfüßen gegenüber (Figg. 1b—15). Auf seiner Figur, die ich hiermit kritisiere, zeigt sich eine Reihe rundlicher oder teilweise auch dreieckiger Gebilde, die aus feineren Fäden als ihre Endanschwellungen hervorgehen und dann der Oberfläche einer Ganglienzelle sich anlegen. Die dunkelschwarzen Anschwellungen erscheinen zum großen Teil homogen, zum kleineren Teil gelocht. Dasselbe zeigt auch noch seine Fig. 8, die bei stärkerer Vergrößerung eine im Profil präzisere Zeichnung von den der Ganglienzelle angepaßten Fußflächen jener Gebilde zeigt. Eine feinere Struktur — abgesehen von jenen Löchern — zeigen weder die Nervenendfüße, um die es sich hier handelt (CAJAL selber nennt sie „botones de AUERBACH"), noch die Ganglienzelle selber, die gleichmäßig hellgrau aussieht. *Zunächst folgt aus dieser Abbildung keineswegs, daß die schwarzen Nervenendfüße, die unmittelbar* bei der Fig. 8 dem *schwärzlichen Zellrand verbunden* sind, nur *anliegen.* Dazu müßte man prüfen können, ob sie sich abziehen lassen. Der *Farbkontrast zeigt nur,* daß es *nicht eigene Fortsätze* sind, kann aber eine Meinung nicht widerlegen, die behaupten würde, daß diese Nervenendfüße fest mit jener Ganglienzelloberfläche verbunden sind, also sich nicht aus ihrer Kontaktstellung

entfernen lassen würden. Die Cajalsche Figur 7 A. zeigt außerdem einen geringen perizellulären Schrumpfungsraum wie auch meine Fig. 5, bei der er sogar noch etwas größer ausgefallen ist. Wie kommt es denn, frage ich, daß jene Endfüße der Ganglienzelle gefolgt sind und nicht in dem Maße entfernt von ihrer Oberfläche liegen geblieben sind, als sich ihre Protoplasmamasse durch Schrumpfung verkleinerte? Das spricht nicht für einen Kontakt, wenn man nicht zuvor beweist, daß eine künstliche Verklebung bei der Fixierung erfolgt ist. Andererseits läßt aber die Annahme, daß doch das letztere eingetreten sei, wie es von Bethe gesagt worden, auch keinen sicheren Schluß auf eine kontinuierliche Verbindung zu.

Als *Kriterium einer kontinuierlichen Befestigung des Nervenendfußes auf einer Ganglienzelle* habe ich früher (1. S. 261—62 und S. 274) angegeben, daß keine perizelluläre Grenze also auch keine Spur von einer Lücke zwischen dem Axospongium des Endfußes und dem Cytospongium der Ganglienzelle zur Beobachtung kommt. *„Vielmehr erscheint ein und dieselbe feinste Plasmamasse als trennende Wand zweier Vakuolenreihen, von denen die eine dem Achsenzylinder die andere der Zellgrundsubstanz selbst anzugehören scheint“.*

Auf diesen Satz passen auch die neuen Beobachtungen, denen ich die Fig. 14 voransetze, die für die Seitenfläche eines Dendritenanfangsstückes diese Verbindungsweise eines Nervenendfußes (a) klar erkennen läßt. Ich schicke voraus, daß ich aus dem Grunde einer verläßlichen Beobachtung nur solche Stellen meiner Präparate ausgewählt habe, an denen eine genaue vertikale Stellung der zueinander parallel laufenden Fußflächen des Nervenendfußes und der Zelloberfläche über der Ebene des Objektträgers zu konstatieren war. Da die Cajalsche Methode nicht alle Nervenendfüße ausfärbt, da viele von ihnen nicht zu einer derartig reinen Profilbeobachtung angeschnitten sind, so gibt das auf einem Schnitt durch das Rückenmark nicht viele günstige Stellen. Hinzukommt, daß Schnittdicken über 3μ, zu geringe Okularvergrößerung einer Immersionslinse und endlich die vielen unvollständigen oder ungleichmäßigen Färbungen, die selbst einen und denselben Nervenendfuß betreffen können, leicht derartige beweisende Stellen wirklich übersehen lassen. Besonders ist der letztere Umstand, daß die Nervenendfüße vielfach überhaupt nicht bis zur Fußfläche hin voll ausgefärbt sind (Figg. 5 u. 6), für die wirkliche Beurteilung

der ganzen Frage außerordentlich wichtig. Durch sekundäre Färbung (in Fig. 6 mit Alsolhämatoxylin, in Fig. 5 durch stärkere Vergoldung bis zu violetten Farbtönen) muß dann eine Entscheidung herbeizuführen versucht werden. Fig. 6 zeigt noch besonders, daß außer dem einen schwarz gefärbten Endfuß alle übrigen erst sekundär durch jene Nachfärbung sichtbar gemacht worden sind.

Die Figg. 5 u. 6 könnten nun zunächst den Anschein erwecken, als ob die unmittelbare Fußzone des Nervenendfußes aus einer besonderen Substanz usw. gebildet sei. Der dunkler ausgefärbte Spitzenteil zeigt eine enge und derbe Maschenstruktur; von ihr unterscheidet sich scharf eine kaum oder nur blaß strukturisierte Masse, jene Fußzone, in welcher bei Fig. 5 einige unvollständig zu verfolgende Fibrillenstücke oder, wie auf Fig. 6 ein matter gefärbtes Netzwerk enthalten sind. Mehr lassen schon die Figg. 8, 9, 10 u. 12 erkennen. Aus jenem dunklen und *derben Netzwerke der Endfußspitze geht ein feineres und mehr blaß gefärbtes Netzwerk* hervor, das in die *basale Zone hinein sich ausbreitet.* Vor allem aber ist an ihnen das wichtig, daß *dieses Fibrillennetz sich mit dem Fibrillennetzwerk der betreffenden Ganglienzelle selber verbindet.* Das kann unmöglich noch mit irgend einer Kontaktvorstellung vereinigt werden, das spricht direkt für eine *kontinuierliche Verbindung.* Im übrigen scheint dieses Verbindungsgitter, wenigstens stellenweise, zarter zu sein.

Daß es zerreißen kann und dann zum Teil in der Form abstehender feiner Fäserchen an dem Anfangsstück des Endfußes haften bleibt, zeigt Fig. 7. Eine weitere Frage ist nur, ob diese Zonierung der Nervenendfüße natürlich ist. Sie ist keineswegs immer in der beschriebenen Weise ausgeprägt, wenn es auch häufiger ist. Nach zwei Seiten variiert darin die Silberfärbung. Einmal erscheint auch die basale Zone des Netzwerkes dichter und dunkler (Fig. 14); andererseits finde ich Nervenendfüße, die von der Spitze an gleichmäßig blaß und feinnetzig strukturiert erscheinen (Fig. 8 zu beiden Seiten des Fußes a, Fig. 17a unterhalb des zonierten Endfußes an der unteren Seite des Dendriten). Es erscheint mir deshalb eine Deutung nicht ausgeschlossen, die zum großen Teil die Ursache in einer bei der Fixierung und Zellschrumpfung selber erfolgenden stärkeren Dehnung des unmittelbaren Fußteiles des Nervenendfußes erblickt. Bei der Fig. 15 ist aber jedenfalls derartiges nicht mehr anzunehmen, da aus dem stark aus-

gefärbten dicken Fibrillenwerk des Nervenendfußes a zwei derbere Fibrillenzüge herausgehen und sich mit dem im Innern der Zelle vorhandenen und ebenfalls zum Teil sehr derben Gitterwerk verbinden; bei der Fig. 13 könnte es höchstens für die eine Hälfte gelten. Leider ist der Schnitt kein Serienschnitt; ich kann nicht angeben, was aus den beiden derberen Fibrillen der rechten Hälfte wird. Den Figg. 8, 9, 10 u. 12 möchte ich zum Schluß noch die Fig. 11 gegenüberstellen. Jenen ist gemeinsam, daß das verbindende Fibrillennetz an *längs angeschnittenen* Randfibrillen der betreffenden Ganglienzellen inseriert, die selber teils feiner (Fig. 8), teils gröber im Kaliber sind. Die entgegengesetzte Ansicht gibt Fig. 11 wieder, die ebenfalls in ihrer Art erkennen läßt, daß jene Verbindungsfäserchen nicht *zwischen* die betreffenden Zellfibrillen vom Endfuß her einstrahlen. Beide Ansichten sichern also die allgemeine Beobachtung, wonach eine *wirkliche Verbindung der gegenseitigen Fibrillennetze der Ganglienzelle und eines an ihr befestigten Nervenendfußes* besteht.

Von dieser *ersten Gruppe* von Nervenendfüßen unterscheidet sich eine *zweite*, die dadurch charakterisiert erscheinen mag, daß aus den Endfüßen feine Fibrillen heraustreten als eine einfache und weitere Fortsetzung. Sie ziehen in *radiärer Richtung direkt in das Innere der betreffenden Ganglienzelle hinein*, um sich hier dem Lauf ihrer inneren Fibrillenzüge anzuschließen. Eine netzartige Verbindung beider Fibrillenarten habe ich an ihnen bisher nicht sehen können. An der *Herkunft von Ganglienzellfibrillen aus ihren Nervenendfüßen* ist aber auf keinen Fall zu zweifeln. Das *radiäre Eindringen, ein genaues Gegenüberliegen von Endfuß* und *Ganglienzelloberfläche* im obigen Sinne läßt eine Täuschung durch der Zelle nur oberflächlich folgende Fibrillen ausschließen. Fig. 1b hat mir übrigens zum ersten Mal diese engere Beziehung zwischen der nervösen Endfläche einer Ganglienzelle und ihrem Inneren gezeigt. Dann fand ich solche Stellen, wo zum Unterschied von Fig. 2 (die eigenen Zellfibrillen sind hier nicht wie in Fig. 1b längs, sondern vorwiegend quer angeschnitten) zwei und drei Fibrillen hineindringen (Figg. 3 u. 4). Erst später kamen mir dann jene oben erwähnten netzartigen Fibrillenverbindungen zur Beobachtung.

Ob diese zweite Art der allgemeinen Verbindungsweise von Ganglienzellen, bedingt durch den Durchtritt von Fibrillen aus einer in eine weitere Zelle, auch wirklich eine solche ist und

nicht nur rein äußerlich durch eine unvollständige Färbung sonst vorhandener Fibrillennetze hervorgerufen ist, ist vorläufig nicht zu unterscheiden. Jedenfalls aber beweist auch sie, daß die Vorstellung eines Nervenkontaktes für diese bisher immer noch von der Neuronenlehre und ihren Anhängern als solche behauptete Stelle nicht mehr zulässig ist. Oder soll man sich zu der Annahme vertiefen, daß die eindringenden Fibrillen nur einen engeren Kontakt zu den dort im Zellinnern ziehenden Fäserchen eingehen? Was bleibt aber dann noch zu retten, wenn, wie es jene ersteren Beobachtungen zeigen, eine netzartige Verbindung der Fibrillengitter des Endfußes mit denen der Ganglienzelle erfolgt?

Auf Grund dieser meiner Beobachtungen sind also *die Nervenendfüße in Wirklichkeit Verbindungsstellen zwischen räumlich getrennten Ganglienzellen des Zentralnervensystems* auf dem längeren oder kürzeren *Wege ihrer Achsenzylinderfortsätze.* Nicht nur sind sie *Verbindungsfüße im rein morphologischen Sinne,* mag auch die Grunmasse eines Nervenendfußes durch gleichmäßigere Granulierung und die färberische Reaktion seines Axospongiums von dem Cytospongium der Ganglienzellen unterschiedlich sein, Verbindungsfüße insofern, als sie nicht anliegen, sondern verbunden sind. Sie sind vor allem auch die *Durchtrittsstellen der Fibrillensysteme verschiedener Ganglienzellen,* die nicht nur, insofern sie selber festere Zellfäden sind, für die allgemeine Verbindungsweise des Nervenendfußes und seiner Befestigung auf der Oberfläche einer Ganglienzelle von Wert sind, sondern vor allem auch die Kontinuität einer besonders differenzierten Leitung im APATHYschen Sinne herstellen. Auffällig erscheint nur, daß, abgesehen von den Figg. 14 u. 15, diese Stellen der nervösen Kontinuität durch feinere und blasser gefärbte Übergangsfibrillen oder Übergangsgitter charakterisiert sind. Das mag ein Fehler der Methodik sein, oder vielleicht ein Fingerzeig dafür, daß an diesen Stellen einer ganzen Reihe von Ganglienzellen eine schlechter leitende Masse als hemmender Widerstand eingeschaltet ist.

Zusatz. Während der Herstellung meiner Zeichnungen und der Zusammenfassung meiner Untersuchungen sind zwei Arbeiten erschienen, auf die ich hier noch kurz eingehen kann. Beide beschäftigen sich auf Grund neuerer Beobachtungen und eigner Methoden mit der Neuronenlehre. In Fortsetzung früherer Untersuchungen hat JORIS einen neuen Beitrag zur Neurofibrillen-

lehre gegeben (H. Joris, A propos d'une nouvelle méthode de coloration des neurofibrilles. Structure et rapports des cellules nerveuses. Extrait du Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique, séance du 30 Avril 1904). Zum Unterschied von Bethe findet auch er, daß die mit kolloïdalem Gold gefärbten Neurofibrillen im Innern von einer Gruppe zentraler Ganglienzellen netzartig zusammenhängen. Dann hat aber Joris auch neue Beobachtungen über den Zusammenhang von extra- und intrazellulären Fibrillen. Daß es im weiteren Umkreis und also außerhalb von Ganglienzellen Fibrillengitter in entsprechenden Nervenfasernetzen gibt, möchte ich nicht bezweifeln. Seit den ersten Angaben von Golgi über diffuse Nervennetze der grauen Substanz sind solche vor allem von Auerbach wieder gemacht worden, denen auch ich zugestimmt habe. Auch Joris hat früher Netzbildungen gesehen und beschrieben. Seine neue Fig. 15 illustriert letzteres in klarer Weise. Aber das habe ich an seiner Fig. 15 auszusetzen, daß sie keine wirkliche Überzeugung von dem Zusammenhang intradendritischer Fibrillen mit jenem außerhalb gelegenen Gitter gibt. Bei den lang angeschnittenen Dendriten erscheint es der Zeichnung nach keineswegs ausgeschlossen, daß die behaupteten intradendritischen Fibrillen nur eng an der Oberfläche jenes Dendriten hinlaufende Fibrillen sind. Die Figg. 16 u. 17 sollen dann noch das Anastomosieren von Fibrillen eines Dendriten mit denen eines zweiten beweisen. Auch hier sind die Dendriten in reiner Längsansicht zu sehen; es ist also auch hier derselbe Zweifel berechtigt, ob es auch wirklich bei beiden intrazelluläre Fibrillen sind. Beobachtungen über die Einrichtung der Nervenendfüße und ihrer Rolle als Durchtrittsstellen von heterozellulären Fibrillensystemen finden sich in den Jorisschen Untersuchungen nicht.

Die zweite Arbeit, zu der ich Stellung nehme, ist eine Mitteilung von Auerbach (Leopold Auerbach, Extra- wie intrazelluläre Netze nervöser Natur in den Zentralorganen von Wirbeltieren. Anatom. Anzeiger 22. Juni 1904). Sie enthält kurze Angaben, welche mit meinen obigen Beobachtungen, wonach die Nervenendfüße die Durchtrittsstellen von verschiedenzelligen Fibrillensystemen sind, übereinstimmen. Die hier interessierende Hauptsache, neue Beobachtungen an den Nervenendfüßen, nehme ich aus ihr voraus. Sie bestehen nach ihm aus einer „Grundmasse, in welches je ein einzelnes oder zwei bis drei ausnehmend dünne,

radiär ziehende Fäserchen gebettet sind". „Sie dringen aller Orten in das Zellinnere ein, und indem sie hier mit solchen, die in gekreuzter Richtung dahinziehen, verschmelzen, gelangen nirgends isolierte Züge zur Wahrnehmung."

Das sind also Parallelbeobachtungen, diese von AUERBACH und jene obigen, die in Ganglienzellen von ihren Endfüßen her eindringende Radiärfibrillen nachweisen. Mit ihnen werden sich ebenfalls die Anhänger der Neuronenlehre abzufinden haben. Jene Fibrillengitter in den Endfüßen, ihr Zusammenhang mit entsprechend feinen Netzen im Zellinnern scheint dagegen AUERBACH bisher entgangen zu sein. Jedenfalls stimmen wir beide erfreulicherweise bei getrennter Methodik darin überein, daß die CAJALschen Beobachtungen an jenen perizellulären Endfüßen oder Endknöpfen der Nervenfasern, die sie frei und blind enden lassen, nicht richtig gewesen sind. Von der CAJALschen Neuronenlehre unterscheidet sich also jetzt die AUERBACHsche Ansicht über den Zusammenhang der Ganglienzellen durch das von ihrer Oberfläche her einstrahlende Radiärsystem von Fibrillen. Trotzdem kann AUERBACH, wie er ausführt, meine Konkreszenzlehre nicht annehmen, sofern sie eine „im späteren Leben erfolgende 'Verwachsung' von Endknöpfchen und Zelloberfläche noch überhaupt eine Verschmelzung von Achsenzylinder- und Zellprotoplasma" behauptet. Über den Zeitpunkt der Verwachsung will ich hier nicht mehr mit AUERBACH rechten. Meine frühere Angabe, daß das erst nach der Geburt erfolge, scheint mir heute nicht mehr richtig zu sein, wenn ich auch meine Beobachtung über schärfer vorhanden gewesene Grenzlinien an neugeborenen Trapezkernzellen aufrecht erhalte. Ich rechne diese damals der Zelle zugeschriebene Grenzmembran jetzt dem Axospongium ihrer Endfasern zu, in der sie zu gewissen Zeiten auftreten, verschwinden, aber auch später wieder gelegentlich erscheinen kann, was ich früher noch nicht wußte. Was aber den zweiten Teil jenes Satzes betrifft, so liegt darin eine Begründung, die ich oben bereits kritisiert habe. An einer anderen Stelle seiner Mitteilung faßt sie AUERBACH in folgende Worte: „Die Grundmasse der Endknöpfchen ist die Ursache, daß sich diese in meinen früheren Präparaten von der Zelloberfläche so scharf abheben. Die perifibrilläre Substanz hat mit den Zellen nichts zu tun und hört da auf, wo sich die Knötchen an die Peripherie der Zellen resp. der Dendriten anschmiegen." Daß sich die all-

gemeine Masse der Endfüße färberisch scharf gegen das Zellprotoplasma abhebt, bestreite ich nicht, wie ich oben und früher ausgeführt habe. Damit ist aber in der Frage, ob Kontakt oder Kontinuität vorliegt, nichts entschieden. Das „angeschmiegt" sein soll doch wohl Kontakt bedeuten? Trotzdem will Auerbach von dem Cajalschen Kontakt nichts wissen? Ich komme also zu dem Schluß, daß mit jener Variante der „Anschmiegung" eigentlich nicht viel Wesentliches an meiner Behauptung geändert erscheint, wonach an diesen Stellen eine feste Verbindung mehrerer Ganglienzellen zu einer Kontinuität besteht. Im übrigen meine auch ich wie Auerbach, daß die in den Endfüßen vorhandenen und weiterreichenden Verbindungsfibrillen resp. ihre Netze einen wesentlichen Anteil an der funktionellen Kontinuität der Leitung haben.

Über eine zellulifugal vorschreitende Bildung der Fibrillennetze im Innern der Ganglienzellen liegen bisher keine abschließenden Beobachtungen vor. Bis dahin wird also auch die weitere Frage unentschieden bleiben müssen, die sich infolge der vorliegenden Beobachtungen über die Bedeutung der Nervenendfüße für den Durchtritt von fädigen Zellbildungen in neue Zellterritorien aufdrängt und die auf die Hissche Neuroblastenlehre zurückgreift, eine Frage, ob erst der Durchtritt vordringender Fibrillen den bis dahin im Wachstum vielleicht noch loser angefügten Endfuß eines Neuriten auf der betreffenden Ganglienzelle fixiert oder ob umgekehrt erst eine allgemeine Befestigung der gesamten Protoplasmamasse des Nervenendfußes eine Bedingung für das radiäre Austreten oder Eindringen von Fibrillenanteilen von oder zu der Ganglienzelle abgibt.

Noch mit einigen anderen Angaben Auerbachs habe ich mich zum Schluß kurz auseinanderzusetzen. Ich meine hier weniger gewisse literarische Bemerkungen, die wie auch früher darauf gerichtet sind, die perizellulären nervösen Terminalnetze und die Endfüße der Neuriten als erstmalige Entdeckungen auf Grund des Frankfurter Vortrages von 1896 hinzustellen. Dafür kann ich auf meine obigen Ausführungen verweisen. Hervorheben möchte ich an dieser Stelle nur, daß Auerbach eine neue und sehr wichtige Seite jenen Netzen abgewonnen hat, indem er ein Fibrillengitter in ihnen darstellen konnte, von dem sich jene Radiärfibrillen der Ganglienzellen loslösen. Bei jenem perizellu-

lären Fibrillengitter läßt nun AUERBACH eine perifibrilläre Protoplasmasubstanz vorwiegend oder sogar ausschließlich an den Knotenpunkten jenes Terminalnetzes verteilt und angehäuft sein. Dazu würden meine früheren Beobachtungen stimmen, wonach hauptsächlich die Endfüße als Knotenpunkte jenes Netzes granuliert sind, jene, sie zu einem Netz verbindende, feinen und kurzen Verbindungsstacheln aber frei von solcher Granulierung erscheinen. Ob sie damit aber vollständig frei von jeder protoplasmatischen oder andersartigen Hülle sind, möchte ich noch nicht auf Grund eigener Beobachtungen zugeben. Weiter berührt AUERBACH auf Grund neuer Beobachtungen mit seiner veränderten Methode auch die Frage nach der allgemeinen Struktur der Nervenzellen. Auch er findet gegen BETHE einen netzigen Zusammenhang der Fibrillen im Innern der zentralen Ganglienzellen. Auch jene queren und kurzen Verbindungen der Fibrillenlängszüge, die ich oben in den Dendriten hervorgehoben habe, zeigt die AUERBACHsche Figur 3. Dagegen kann ich die Behauptung, daß sich aus der „artefiziellen Umwandlung" der fibrillären Ganglienzellstrukturen die „mehr einem Wabenbau gleichenden Konfigurationen" und auch meine Neurosomen herleiten ließen, nicht richtig nennen. Auch bei Osmiumsäurehärtung, die nach AUERBACH die „Fäserchen" der Ganglienzellen stets sichtbar erhält, finde ich Neurosomen im Innern des Zellkörpers, der Fortsätze und der Knotenpunkte jenes perizellulären nervösen Terminalnetzes. Außerdem kann ich auf meine früheren Abbildungen vom Axospongium markhaltiger Nervenfasern verweisen, wonach trotz der Erhaltung der längsfibrillären Anteile und ihrer Querbrücken zugleich eingefügte Granula zu sehen sind. Daß andererseits aus einer umfangreichen und gleichmäßig einsetzenden Fixierungsvakuolisierung dicht gedrängter Neurosomen vorzügliche Wabenbilder entstehen können, ist mir aus Erfahrung bekannt, die ich an Nervenfasern von Petromyzon fluv. gemacht habe.

Auch habe ich früher angegeben, daß aus einzelnen Neurosomen als Vollkörnern Ringgranula hervorgehen.

Das aber hat mit dem körnigen Zerfall fibrillärer Strukturen nichts zu tun. Sonst aber stimme ich den weiteren Ausführungen AUERBACHS, wonach es „widersinnig wäre, derartige scharf konturierten, faserigen Gebilde auf künstlich verschmolzene Körnchenreihen zurückführen zu wollen" in der Fassung zu, daß für irgend

eine Ableitung der Fibrillengitterstrukturen der Ganglienzellen aus irgend einer künstlichen Wirkungsweise der Fixierung bisher keine Anhaltspunkte sich ergeben haben.

II. Zur Struktur der Stäbchensehzellen.

Bei Anwendung der Bielschowfskyschen Silbermethode habe ich in der Retina des Frosches (Rana temp.) bisher in dieser Form unbekannte Strukturen und zwar zunächst an den Außengliedern der Stäbchensehzellen gefunden. Auch bei sonst mißlungenen Färbungen anderer Retinaelemente zeigen sich diese Elemente fädiger Natur klar herausgefärbt.

Es beginnt das Fadenelement am Innenglied des Stäbchens mit einer größeren oder, was seltener klar zu sehen, zwei kleineren kugelförmigen Anschwellungen, geht dann glatt über die Zwischenscheibe hinweg, um allmählig dünner sich zuspitzend die Länge des Außengliedes zu durchsetzen (Fig. 19a). Ich will es als *Stäbchenaußenfaden* bezeichnen. Nicht nur an den sogenannten roten, auch an den grünen Stäbchen findet sich dieser Längsfaden. Daß er rein oberflächlich liegt und auch so weiterläuft, im besonderen in der Membran des in Scheiben zerfallenen Inhaltes des Außengliedes liegt, zeigen Querschnitte dieser Teile (Fig. 19b, c), die auch für die schon sonst bekannten feineren Längsstreifen des Außengliedes nachweisen, daß diese ihre Kannelierung auf feinen im Querbild rundlichen Verdickungsstreifen der Membran beruht. Fein zugespitzt endigt schließlich dieser Längsfaden am äußeren Ende des ganzen Außengliedes. Er kann gerade gestreckt sein oder schwächer und stärker gewellt. Jedenfalls ist er widerstandsfähiger, sodaß er seine Kontinuität behält, wenn auch sonst das Außenglied mehr in Scheiben zerfallen oder auch abgeknickt oder gebrochen erscheint. Das spräche für eine stützende Natur dieses Längsfadens, die dem längeren Außengliede des Stäbchens zugute käme. Das ist natürlicherweise nur eine Annahme, die keine Sicherheit gibt und auch nicht andere Funktionen unbekannter Natur ausschließen kann.

Dem stärkeren Faden gegenüber, der längs des Außengliedes läuft, entspringt öfters vom inneren Korn, das meist kleiner ist, oft auch nicht gerade unter dem äußeren Korn, sondern schief neben ihm steht, ein viel feineres und mehr gekörntes Fädchen. Öfters habe ich dasselbe auch ganz vermißt. Es scheint etwas

tiefer zwischen die Granula des im Innenglied eingelassenen Ellipsoides einzudringen, was aber meistens wegen aufhörender oder zu blasser Färbung nicht weiter zu beobachten und zu verfolgen ist. Diesen zu der Kernzone der Stäbchensehzelle gerichteteten feineren Faden will ich *Stäbcheninnenfaden* nennen. Über seine Natur enthalte ich mich jeder Deutung, bevor nicht mehr von ihm gefunden worden. Ich füge hinzu, daß ich auch in der Retina des Kaninchens das Fadenelement des Stäbchens ohne jene Methode angedeutet gesehen habe.

In der einschlägigen Literatur habe ich Befunde von ähnlicher oder gleicher Art nicht erwähnt gefunden. Die von RITTER im Fischzapfen behauptete Spiralfaser, die von W. KRAUSE auch für die Stäbchen und Zapfen des Frosches beschriebenen Spiralgebilde haben offenbar mit diesem Stäbchenaußenfaden nichts zu tun. Vielleicht stimmt eine Beobachtung von R. HESSE (12. S. 486 u. Fig. 15 Tafel 25) dazu, der bei Eisenhämatoxylinfärbung an den Stäbchen des Frosches unter den vielen feineren Streifen seiner Oberfläche oft einen derselben stärker ausgeprägt fand.

Dagegen finde ich in der Abhandlung von CARL M. FÜRST (13) etwas, was auf dieses ganze Gebilde ein Licht wirft. Seine Beobachtung ist zwar am Auge des Lachses gemacht. Ich finde aber kein Bedenken, in ihr ein allgemeineres Merkmal zu sehen. Seine Beobachtung ist, daß die über eine Limitans externa hervorsprossenden Protoplasmastümpfe der sich ausbildenden Zapfen- und Stäbchenzellen „an ihren Oberflächen oder Spitzen" Diplosomen führen, und daß von dem „äußeren Zentralkörperchen des Diplosoma im allgemeinen ein feiner Faden frei ausgeht". Für den Frosch habe ich bei meiner Alsolhämatoxylinfärbung öfters an den Stäbchen und Zapfen ein Diplosoma gefärbt gefunden. Seine beiden Körner waren etwas kleiner wie bei der Silberfärbung, und oft nicht unter, sondern auch neben einander gestellt. Eine sphärenartige Begrenzung erschien angedeutet und zwar in einer Größe, die dem grobkörnigen Bild der Silberfärbung entspricht, woraus ich auf eine gleichzeitige und sich gegenseitig verdeckende Schwärzung beider Anteile hierbei schließe. Weitere Untersuchungen werden hierauf zurückzugreifen haben, wobei ich bemerke, daß ich bisher an den Außengliedern der Zapfensehzellen derartig deutliche Fadenbildungen nicht gesehen habe. Nur Ansätze, die sich aber von den zu stark gebräunten Außengliedern selber nicht scharf genug abgrenzen ließen.

Zur Struktur der Zapfensehzellen.

Auf einer neuen Serie von Retinaschnitten, die einem anderen Versuch am Froschauge entstammten, habe ich auch an den Zapfensehzellen gleiche Strukturen klar beobachtet, wie ich sie eben an den Stäbchenelementen beschrieben und in der Sitzung der kgl. sächs. Ges. d. W. vom 4. Juli vorgetragen habe. Auch am Zapfenaußenglied hebt sich auf diesen Präparaten das gleiche Fadengebilde ebenso scharf wie an denen der Stäbchen ab. Ich habe diese Struktur nachträglich der Fig. 19a eingefügt. Auch beim Zapfenelement findet sich dicht unterhalb der Zwischenscheibe, also in der Höhe des glänzenden Tropfens im Innenglied ein Doppelkorn; von dem äußeren geht ein dickerer Faden ab, der dem kurzen Außenglied des Zapfens oberflächlich eingefügt ist, an seiner Spitze ebenfalls mehr oder weniger zugeschärft aufhörend. Ich will ihn als *Zapfenaußenfaden* bezeichnen. Von dem inneren Körnchen war ebenfalls ein feineres Fädchen eine kurze Strecke längs des Innengliedes zu verfolgen, wo es in der Höhe des unteren Endes des Innenellipsoides aufzuhören schien. Ich will ihn als *Zapfeninnenfaden* bezeichnen.

Auch dem II. Teil dieser Abhandlung habe ich nachträglich die Erwähnung und Besprechung einer ganz kürzlich erschienenen Arbeit von gleichem Inhalt anzufügen. Es findet sich im Anatomischen Anzeiger vom 5. Juli, der einige Tage später in meine Hände kam, eine Mitteilung von W. Kolmer (Über ein Strukturelement der Stäbchen und Zapfen der Froschretina), die ebenfalls auf der Bielschowfskyschen Silbermethode fußt. Die Beschreibung Kolmers unterscheidet sich im wesentlichen nicht von der meinigen. Nur läßt Kolmer jenen Außenfaden des Stäbchens sich in der Zwischensubstanz zwischen Außen- und Innenglied „um ein Geringes verbreitern", wo ihr außerdem „des öfteren zu beiden Seiten zwei winzige Körnchen angelagert" sind. Zur Deutung des ganzen Strukturelementes meint Kolmer: „als Stützsubstanz oder als leitende Substanz im Sinne von Apathy es aufzufassen, stößt auf Schwierigkeit bei der großen Dicke des Elements; am ehesten ließe sich an eine spezifische Umhüllung eines leitenden Elements denken." Auch Kolmer hat den feineren Innenfaden nicht wesentlich weiter verfolgen können wie ich selber.

Es wird also neuer Untersuchungen bedürfen, den neuen Befund tiefer zu fassen. Den Außenfaden abzuleiten, dazu reichen die FÜRSTschen Beobachtungen am Lachs und meine obigen am Frosch. Der Innenfaden wäre damit noch nicht in seiner Genese und in seinen weiteren Beziehungen erklärt.

Sehzellen des Menschen.

In der Retina des Menschen, auf die ich zum Schluß dieser Mitteilung eingehe, habe ich noch mit Hilfe der Eisenhämatoxylinmethode von HEIDENHAIN und meiner Alsolhämatoxylinfärbung diese neuen Fadenelemente der Sehzellen beobachtet. Unter den Fixierungsmitteln hat mir bisher die ZENKERsche Flüssigkeit am meisten genützt. Sie hat aber Nachteile, die vor allem bei den Zapfenelementen hervortreten, wo sie jenen Gebilden wie auch den von der M. lim. externa sich erhebenden Faserstreifen der Innenglieder eine stärkere körnige Beschaffenheit geben. Auch sind stellenweise die Außenglieder der Zapfen ungenügend konserviert. Bei den Stäbchensehzellen erhält öfters der Innenfaden in seinem weiteren Verlauf eine störende körnige Struktur.

Am klarsten erscheint auf meinen Schnitten das *Fadenelement der Stäbchensehzellen* (Fig. 19d). Es geht von zwei Körnern aus (mitunter von mehreren, selten von einem), die rundlich und dunkelgefärbt dicht am äußeren Ende des schlanken, mattgekörnten und nur dünnwandigen Innengliedes liegen. Die beiden Körner liegen entweder unter- oder auch nebeneinander. Im ersteren Fall sind sie durch ein feines Fädchen verbunden. Von dem äußeren Korn geht als feine Brücke über ein eingeschnürtes Zwischenstück hinweg ein Faden, der längs des Außengliedes in seiner Membran verläuft (im Querschnitt zeigt dies Fig. 19h). Entgegengesetzt zu diesem Stäbchenaußenfaden zieht der stärkere Innenfaden der Kernzone der ganzen Stäbchensehzelle zugekehrt. Im günstigsten Fall habe ich ihn bis zur Höhe der M. lim. ext. verfolgen können. Der Stäbcheninnenfaden geht vom inneren Korn ab (sonst, wenn dieser fehlt, ebenfalls von dem äußeren als einzigen). Liegen die beiden Körner nebeneinander, so gehen von jedem derselben je ein kürzeres oder längeres Fädchen ab, die dann gabelartig sich zu einem stärkeren Innenfaden vereinigen. Von einem dieser beiden Körner entspringt dann der Außenfaden.

Mitunter sind mehr wie zwei Körner zu sehen, von denen ich jedoch nicht annehme, daß sie eine Vermehrung eines Diplosoma bedeuten. Sie liegen als inkonstante Granula im Anfangsteil des Innenfadens drin, mehr eine körnige Veränderung desselben anzeigend. Der Innenfaden selber verläuft teils wellig, teils gerade, je nach der Beschaffenheit des Innengliedes, dessen Mitte er weiter innen einnimmt, während das Diplosoma des Stäbchens noch dicht unter der Membran des Innengliedes gelegen ist (Fig. 19 d, f). Ob der Stäbcheninnenfaden als axiales Gebilde des Innengliedes auch ein reiner Stützfaden dieses schlanken und dünnwandigen Teiles der Stäbchenzelle ist, muß fraglich bleiben. Es ist das mehr eine Vermutung, die auf eine ähnliche Einrichtung im Innern der ebenfalls sehr schlanken inneren Schmelzzellen der Maus zurückgreift, bei denen ich einen gleichen zentralen Längsfaden der ganzen Zelle ausgeprägt gefunden habe.

An den *Zapfen* ist ebenfalls wie bei den Stäbchen und auch an gleicher Stelle ein Paar von Körnern vorhanden. Sie stehen unter- oder schräg nebeneinander, durch ein feines Fädchen verbunden. Eine rein quere Stellung und einen gabelförmig entspringenden Innenfaden habe ich wie bei den Stäbchen nie gefunden. Der *Innenfaden des Zapfens* beginnt stets einfach am inneren Korn des Diplosoma, ist aber häufig stark gekörnt in seinem Anfang, was zu leichter Verwechslung mit jenem Gebilde führen kann. Weiter innen zeigt er oft in seinem Verlauf einen feineren Seitenzweig, der aber ebensowenig wie die Hauptfibrille über die Länge des Innenellipsoides hinaus zu verfolgen war. Am *Außenglied des Zapfens* ist ebenfalls ein oberflächlich liegender *Außenfaden* zu beobachten, jedoch nur in seinem Beginn am äußeren Körnchen und im Anfang seines Verlaufes in der Membran jenes Außengliedes. Nur an einzelnen Exemplaren der Zapfenelemente habe ich soviel von seinem Fadenelement sehen können. Eine zu starke Mitfärbung der Substanz des Außengliedes selber, eine beträchtlichere Veränderung seiner äußeren Form verhinderten die ganze Länge des Außenfadens zu beobachten. Fig. 19 d zeigt das Fadenelement des Zapfens im Längsbild, Fig. 19 g die Lage des Diplosoma im Querschnitt des äußersten Abschnittes des Zapfeninnengliedes. Fig. 19 g gibt noch einen im Querschnitt des Anfangsstückes des Zapfenaußengliedes häufiger zu sehenden Befund an, den Teil eines zentralen Fadens, der nicht mit jenem Außen-

Literatur.

H. Held 1) Beiträge zur Struktur der Nervenzellen und ihrer Fortsätze. II. Abhandlung. Arch. f. An. u. Phys. Anat. Abt. 1897 und
2) III. Abhandlung. Dasselbe Archiv. Suppl. 1897.
3) Über den Bau der grauen und weißen Substanz. Dasselbe Archiv. 1902.

L. Auerbach 4) Nervenendigung in den Zentralorganen. Neurol. Zentralblatt 1897 Nr. 10.
5) Das terminale Nervennetz in seinen Beziehungen zu den Ganglienzellen der Zentralorgane. Monatsschrift f. Psychiatrie u. Neurologie 1899.

R. y Cajal 6) Un sencillo metodo de coloracion selectiva del reticulo protoplasmico. Trabajos del Laboratorio de investigaciones biologicas. 1903.

Semi Meyer 7) Über die Funktion der Protoplasmafortsätze der Nervenzellen. Ber. d. math.-phys. Klasse d. Kgl. S. Ges. d. W. 25. Okt. 1897.

St. v. Apathy 8) Das leitende Element des Nervensystems und seine topographischen Beziehungen zu den Zellen. Mitt. d. Zool. Station zu Neapel. XII. 1897.

M. Wolff 9) Über die Kontinuität des perifibrillären Neuroplasmas (Hyaloplasma Leydig-Nansen). Anatom. Anzeiger 1903.

A. Donaggio 9a) Sulla presenza di un reticulo nel protoplasma della cellula nervosa. Riv. sperim. di Freniatria 1896.
Sur les appareils fibrillaires endocellulaires de conduction dans les centres nerveux des vertébrés supérieurs. V. Congrès internat. de Physiol. Turin 1901.

R. y Cajal 10) Estructura del Protoplasma nervioso. Riv. trimestal micrograf. I. 1.

A. Bethe 11) Über die Primitivfibrillen in den Ganglienzellen v. Menschen u. ander. Wirbeltieren. Morph. Arb. VIII. 1. 1897.
Über die Neurofibrillen in den Ganglienzellen v. Wirbeltieren u. ihre Beziehungen zu den Golginetzen. Arch. f. mikr. Anatomie 55. 1900.
Allg. Anatomie u. Physiologie d. Nervensystems. Leipzig 1903.

R. Hesse 12) Über den feineren Bau der Stäbchen und Zapfen. Zool. Jahrbücher VII. Suppl. 1904.

C. M. Fürst 13) Zur Kenntnis der Histogenese u. des Wachstums der Retina. Lunds Universitets Årsskrift. 40. Nr. 1. Afdeln. 1. Lund 1904.

Figurenerklärung.

Sämtliche Figuren habe ich nach eigenen Präparaten mit Hilfe des Abbeschen Zeichenapparates entworfen. Sie sind mit der homogenen Immersion $^1/_{12}$ von Zeiß und den stärkeren Kompensationsokularen (siehe die einzelnen Figuren) gesehen worden.

Figg. 1a—18. Nervenzellen.

Fig. 1a. Ränder zweier Vorderhornzellen aus dem Lumbalmark vom 41jährigen Menschen. Zenkersche Flüssigkeit. Eisenhämatoxylinfärbung nach M. Heidenhain. Die Nissl-Körper sind dunkelschwarz, die oberflächlichen Nervenendfüße, von denen besonders die beiden mit *a* bezeichneten eine eingezackte Verbindungsfläche erkennen lassen, dunkelgrau gefärbt. Paraffinschnitt 5 μ. Oc. 12.

Fig. 1b—18. Aus der grauen Substanz des Lendenmarkes vom erwachsenen Kaninchen. Cajalsche Silberfärbung. Fixierung in 40% Alkohol 1% Liq. Amm. caustici. Paraffinschnitte von 3 μ.

Fig. 1b. Rand einer großen Vorderhornzelle (dorso-laterale Gruppe des Vorderhorns). Von den einzelnen Endfüßen ist der mit *a* bezeichnete etwas vollständiger ausgefärbt; er schickt von seiner linken unteren Ecke eine Fibrille ins Innere der Zelle, die sich, soweit sie angeschnitten, nur mit den eigenen Fibrillen der Ganglienzellen überkreuzt. Der Nervenendfuß und seine intrazelluläre Fibrille liegen in gleicher optischer Ebene, was auch für die gleiche Stelle der nächsten Figur gilt. Oc. 12.

Fig. 2. Aus der ventro-medialen Region des Vorderhorns. Die Fibrillen des betreffenden Ganglienzellstückes sind meist quer getroffen. Von den 6 Nervenendfüßen ist der mit *a* bezeichnete kompakt ausgefärbt worden. Die eindringende Fibrille hebt sich scharf von den übrigen Zellfibrillen ab. Auch von den übrigen Ecken des etwas sternförmigen Endfußes gehen feinste Fibrillen ab, die aber nur blaß angefärbt sind und unsicher zu beobachten. Oc. 12.

Fig. 3. Aus der gleichen Gegend wie Fig. 1b. Der Endfuß *a* ist nur als ein unvollkommenes Ringstück gefärbt. Er gibt ebenso wie der obere Nervenendfuß eine intrazelluläre Fibrille ab; bei dem unteren sind zwei abgehende Fibrillenstücke angeschnitten, von denen das eine sich mit der Randfibrille zu verbinden scheint, was aber nicht ganz sicher zu entscheiden war. Oc. 12.

Fig. 4. Aus derselben Region. Von den 3 Endfüßen ist der mittelste (*b*) ungefärbt geblieben. Von den beiden anderen (*a* und *c*) gehen je zwei Fibrillen in das Zellinnere hinein. Oc. 18.

Fig. 5. Aus dem medialen Abschnitt des Hinterhornhalses. Der Rand einer größeren Ganglienzelle ist mit zonierten Endfüßen besetzt, deren blaß sichtbare Fußflächenanteile mit dem allgemeinen Zellprotoplasma verbunden erscheinen und nur unvollständig gefärbte oder angeschnittene Fibrillenstücke enthalten. Die eigenen Zellfibrillen bilden ein Fibrillennetz. Oc. 12.

Fig. 6. Rand einer großen Vorderhornzelle der ventro-lateralen Region. Zonierter Endfuß *a*, der mit Silber unvollständig gefärbt ist; seine Fußfläche und die übrigen Nervenendfüße 1—9 sind durch Alsolhämatoxylin nachträglich gefärbt worden. Oc. 12.

Fig. 7. Rand des Dendritenanfangsstückes einer großen Vorderhornzelle. Der Nervenendfuß *a* erscheint abgerissen; in ihm wie im Dendriten sehr enge Fibrillennetze. Oc. 18.

Fig. 8. Rand einer größeren Ganglienzelle aus der intermediären Zone der grauen Substanz. Von den 3 Nervenendfüßen ist der mittlere (*a*) vollständiger aber ungleichmäßig gefärbt worden. Sein Spitzenteil zeigt ein engeres und dickeres Netzwerk, das der Zelle zu feiner wird und sich mit einer Randfibrille derselben verbindet. Oc. 12.

Fig. 9. Aus der Umgebung des zentralen Höhlengrans. Rand einer mittelgroßen Ganglienzelle. Der von einer Nervenfaser *a* gebildete Endfuß zeigt außer einem unvollkommen gefärbten blassen Netzwerk drei mehr gerade verlaufende Fibrillen. Die beiden rechten verbinden sich mit der derberen (einmal unterbrochenen Randfibrille des Zellleibes), die linke überkreuzt sie, um sich mit der weiter einwärts laufenden Längsfibrille zu vereinigen. Oc. 18.

Fig. 10. Längsschnitt eines Dendriten aus dem Vorderhorn. Hauptsächlich sind die Längsfibrillen des Dendriten selber, daneben auch einzelne Querbrücken zu sehen. Der seitliche kollateral abgegebene Nervenendfuß einer feinen Nervenfaser verbindet sich durch ein feineres und blasseres Netzwerk mit einer Randfibrille des Dendriten (mit Ausnahme des oberen Fäserchens, das dicht neben der Fibrille quer abgeschnitten liegt). Oc. 12.

Fig. 11. Teil des Zellleibes einer Vorderhornzelle der lateralen Ecke. Die Fibrillen der Zelle selber sind zum größten Teil quer getroffen. Rechts oben ist etwas von ihrer netzigen Verbindung angeschnitten. Am unteren Rand zeigen sich 3 Nervenendfüße, von denen der mittelste in seiner feineren Verbindung mit jenen quer getroffenen Zellfibrillen deutlich ausgefärbt ist. Oc. 12.

Figg. 12 und 13. Ganglienzellränder aus dem Hals des Hinterhorns. In beiden Zellen blassere und enge Fibrillennetze, in der zweiten einige derbere und dunkler gefärbte Fibrillenstücke. Der Nervenendfuß der Fig. 12 ist ein rein zonierter, der an der anderen Zelle zeigt auch in der Fußzone derbere Fibrillenabschnitte. Beide Endfüße zeigen ein enges Fibrillengitter, das mit dem der Zellen selber kontinuierlich zusammenhängt. Bei Fig. 12 Oc. 18, bei Fig. 13 Oc. 12.

Fig. 14. Aus dem Anfangsstück eines Dendriten von einer großen Vorderhornzelle. Das enge und derbe Fibrillennetzwerk des Endfußes, welches an eine vakuolisierte Strukturform erinnert, ist kontinuierlich mit dem am unmittelbaren Zellrand ebenso engen Gitter der intradendritischen Fibrillen verbunden. Oc. 18.

Fig. 15. Ganglienzelle aus dem Hals des Hinterhorns. Von fünf verschieden vollständig gefärbten und angeschnittenen Nervenendfüßen zeigt der mit *a* bezeichnete einen kontinuierlichen Zusammenhang seiner Fibrillennetze mit denen der Ganglienzelle. Die beiden Teiläste links sind im Präparat etwas spiralig gedreht zum Endfuß, was in der Reproduktion nicht zum Ausdruck gekommen ist; auch liegt die von unten im leichten Bogen herankommende Nervenfaser mit ihrem Ansatz in etwas tieferer Ebene. Der Nervenendfuß selber läuft länger ausgezogen an der Zelloberfläche hin (eine ähnliche Ausbreitung zeigt Fig. 1a links). Von seiner unteren Hälfte gehen zwei blasse Verbindungsnetze aus. Zwei starke Fibrillenzüge folgen nach oben in leicht konkaver Biegung der Zelloberfläche. Sie sind weiterhin abgeschnitten. Von dem inneren (rechten)

Fibrillenzug gehen zwei, in ihm zunächst als zwei dunkle Punkte erscheinende, stärkere Fibrillen ab, die sich bald wieder mit den Fibrillennetzen des Ganglienzellinnern verbinden. Oc. 18.

Fig. 16. Aus der gleichen Gegend. Mehr oberflächliches Stück einer Ganglienzelle mit sehr engem Fibrillengitter, welches zum größeren Teil blaß und fein ist. Es zeigt die allmählige Entstehung derberer und tief dunkel gefärbter Fibrillenstücke. Oc. 12.

Figg. 17a—c. Längsschnitte durch Vorderhornzelldendriten. Quere und schräge Verbindungen der längsfibrillären Züge, die besonders deutlich an dem leicht gewellt fixierten Dendriten (17b) hervortreten. Einzelne Nervenendfüße und auch diese nur höchst unvollständig gefärbt, sind an den Dendriten 17a und 17c zu sehen. An letzterem zeigen die beiden einander gegenüber liegenden Endfüße blassere basale Netzbildungen, die anscheinend mit den etwas dunkler gefärbten Fibrillennetzen des Dendritenstückes zusammenhängen. Oc. 12.

Fig. 18. Teilungsstelle eines starken Dendriten einer Vorderhornzelle mit dichtem, zum Teil blasserem Fibrillengitter im NISSLschen Verzweigungskegel, der als helleres Dreieck sich abhebt. Oc. 12.

Figg. 19a—h. Sehzellen.

Figg. 19a—c. Vom Frosch (Rana esculenta). a im Längsbild; b und c sind Querschnitte durch die Außenglieder von Stäbchensehzellen, von denen die mit c bezeichneten mehr dem Ende desselben zuliegen. Formalin 12%. BIELSCHOWSKYsche Silberfärbung. Oc. 6.

Figg. 19d—h. Vom Menschen (24jähr. hingerichteter). ZENKERsche Flüssigkeit. Alsolhämatoxylinfärbung. d Längsbild; e Flächenansicht der M. lim. externa Retinae von außen her; h Querschnitt durch die Stäbchenaußenglieder; g zwei Querschnitte durch Teile der Zapfensehzelle, von denen der linke im Beginn des Außengliedes, der rechte in der Höhe des Diplosomas des Innengliedes liegt; f zeigt den Querschnitt durch das innere Ende eines Zapfeninnengliedes, der von zahlreichen Querschnitten durch die gleich gelegenen Stäbcheninnenglieder mit ihrem Innenfaden, umgeben ist. Oc. 8 (bei Fig. 19e Oc. 12).

Die Sehzellen hier sind ungefähr $1\frac{1}{2}$ mm von der Region der Macula lutea entfernt. In der Macula lutea selber und ihrem unmittelbaren Umkreis von ca. $\frac{3}{4}$ mm sind die Diplosomen der Zapfen durch besondere Größe und Regelmäßigkeit beider Körner ausgezeichnet.

Fig. 1a.

Fig. 1b.

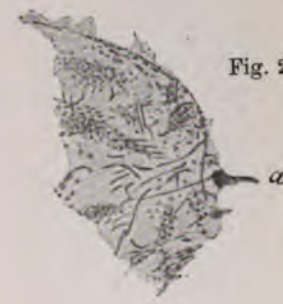


Fig. 2.

Fig. 3

Fig. 5.

Fig. 4.

Fig. 6.

Fig. 8.

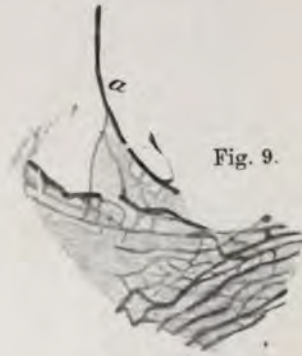


Fig. 9.

Fig. 7

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

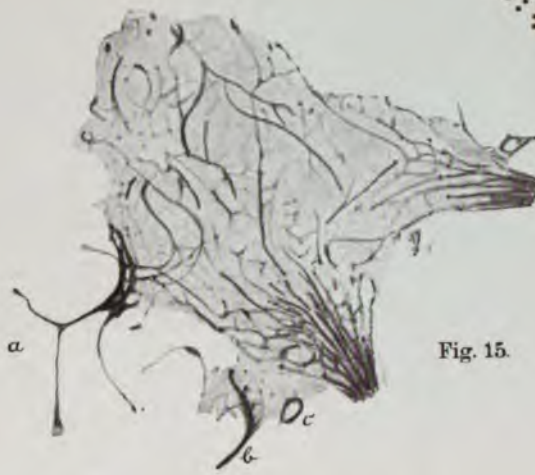


Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 17a.

Fig. 17b.

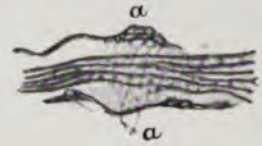


Fig. 17c.

Fig. 18.

Fig. 19d.

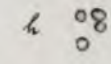


Fig. 19h.

Fig. 19a.

Fig. 19c.

Fig. 19b.

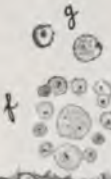


Fig. 19g.

Fig. 19f.

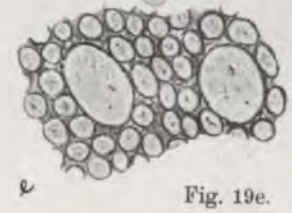


Fig. 19e.

STANFORD LIBRARY

GREGOR MENDELS BRIEFE AN CARL NÄGELI

1866—1873.

EIN NACHTRAG ZU DEN VERÖFFENTLICHTEN BASTARDIERUNGSVERSUCHEN MENDELS.

HERAUSGEGEBEN VON

C. CORRENS.

DES XXIX. BANDES
DER ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

N° III.

MIT EINEM FACSIMILE.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1905.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 5. Dezember 1904.
Das Manuskript eingeliefert am 23. Dezember 1904.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 20. Februar 1905.

GREGOR MENDELS BRIEFE AN CARL NÄGELI

1866—1873.

EIN NACHTRAG ZU DEN VERÖFFENTLICHTEN BASTARDIERUNGSVERSUCHEN MENDELS.

HERAUSGEGEBEN VON

C. CORRENS.

Abhandl. d. K. d. Wissensch. z. Berlin, math.-phys. Kl. XXIX Nr. 13

Einleitung.

Als im Frühjahre 1900 durch DE VRIES, den Herausgeber und E. TSCHERMAK die merkwürdigen Ergebnisse, zu denen G. MENDEL[1]) bei seinen Bastardierungsversuchen mit Erbsenrassen gelangt war, zuerst und vollkommen bestätigt wurden, war es sicher, daß dieser stille, fast vergessene Forscher in Zukunft eine ganz hervorragende Stelle unter den besten Experimentatoren auf dem Gebiete der Vererbungslehre einnehmen werde.

Was wir von GREGOR MENDEL selbst haben, beschränkt sich auf zwei wenig umfangreiche Arbeiten, die eigentlich grundlegenden „Versuche über Pflanzenhybriden“[2]) und eine Mitteilung „über einige aus künstlicher Befruchtung gewonnene Hieraciumbastarde“.

Der einzige, der einen Teil der Beobachtungen MENDELS theoretisch verwertete, war CARL NÄGELI. Seit langen Jahren mit dem Studium der Hieracien beschäftigt, hat er wenigstens MENDELS Bastardierungsversuche zwischen Arten dieser Gattung mit großem Interesse verfolgt und unterstützt, während die Teilnahme an den Erbsenbastardierungen, trotz der in Angriff genommenen Fortsetzung (S. 211), offenbar nie sehr tief gegangen war.

Wenn irgend ein gleichzeitig lebender Biologe, hätte NÄGELI, seiner Veranlagung nach, die Bedeutung der ersten Arbeit MENDELS erkennen können, eher als DARWIN oder etwa HAECKEL. Es war zweifellos der scharfe Gegensatz, den NÄGELI zwischen Varietät

1) Nachdem ich die ersten biographischen Daten gegeben hatte (Botan. Zeitg. Bd. 58, II. Teil, Sp. 229, 1900), ist der einfache Lebenslauf MENDELS wiederholt dargestellt worden, so von E. TSCHERMAK in seiner Ausgabe der Arbeiten MENDELS in Ostwalds Klassikern, am ausführlichsten von MENDELS Neffen Dr. ALOIS SCHINDLER, I. Stadtarzt in Zuckmantel, Österr.-Schlesien (1902, nicht im Buchhandel).

2) Wie der Inhalt von Brief II zeigt (S. 199), wurde MENDEL, der 1865 über seine Versuche im Brünner Verein berichtet hatte, erst 1866 aufgefordert, den Bericht drucken zu lassen; die Separata erschienen jedenfalls sogar erst gegen Ende des Jahres. Die Arbeit ist also definitiv 1866 zu datieren.

(Elementarart bei DE VRIES) und Rasse (Varietät bei DE VRIES) machte, und die Ansicht, daß Rassen im Freien nicht konkurrenzfähig seien, welche NÄGELI, dessen Interesse auf das Artbildungsproblem gerichtet war, MENDELS an typischen Rassen angestellte Versuche nicht so einschätzen ließen, wie wir es jetzt tun. Zudem war das, was uns jetzt als das Wichtigste daran erscheint, der Nachweis getrennter und beliebig verschiebbarer Anlagen für die später am Organismus sich zeigenden Merkmale im Keimplasma der Fortpflanzungszellen, trotz einiger ähnlicher Erfahrungen und Ansichten älterer Forscher (SAGERET), noch so vollkommen neu, daß man sich gar nicht darein finden konnte.

Als dann NÄGELI selbst, im Gegensatz zu den die einzelnen Zellen repräsentierenden Anlagen (Pangenen) DARWINS, für die einzelnen Merkmale besondere Anlagen im Idioplasma forderte — eine Ansicht, die dann einige Jahre später auch DE VRIES aufstellte —, war bei ihm offenbar alle Erinnerung an die erste Arbeit MENDELS verschwunden; er hätte sich gewiß diese ausgezeichnete Stütze seiner Annahme sonst nicht entgehen lassen.

Daß in den Arbeiten MENDELS nur ein Teil der Erfahrungen niedergelegt ist, die er bei seinen Bastardierungsversuchen gesammelt hatte, zeigt sich an verschiedenen Stellen. Bald nachdem ich hatte entdecken müssen, daß die bei Erbsen und Mais gefundenen Gesetze nur eine Bestätigung der schon MENDEL bekannten Gesetzmäßigkeiten waren, veranlaßten mich MENDELS eigene Andeutung[1]) und die Hinweise, die sich bei NÄGELI finden[2]), mich an die Familie meines unvergeßlichen Lehrers zu wenden, ob noch Briefe MENDELS an diesen vorhanden wären. Die Nachforschungen blieben jedoch resultatlos, und erst vor etwas mehr als Jahresfrist erhielt ich durch die Freundlichkeit der Familie 10 Briefe, alle, die NÄGELI erhalten hatte.

MENDEL leitete die Korrespondenz am Sylvester 1866 durch einen Brief ein, der den Separatabdruck seiner Arbeit über die Erbsenhybriden begleitete. Der letzte Brief MENDELS, vom Jahre 1873, wurde von NÄGELI beantwortet, und dieser schrieb ein Jahr später nochmals, aber vergeblich. 1872 war das Religionsfondsgesetz

1) S. 52 der Ausgabe in Ostwalds Klassikern.

2) NÄGELI und PETER, die Hieracien Mittel-Europas (Piloselloiden) S. 65 (1884), und E. WIDMER, die europäischen Arten der Gattung Primula, mit einer Einleitung von C. v. NÄGELI, S. 4.

gekommen. MENDEL hatte den Kampf für sein Kloster gegen die Regierung aufgenommen; in ihm, den er mit der größten Zähigkeit führte, ging er für die Wissenschaft unter. — Die letzten Versuche waren, wie Brief X zeigt, 1871 angestellt worden; vier Jahre hat er noch als Abt weitergearbeitet.

Die Briefe zeigen, daß das, was MENDEL veröffentlicht hat, in der Tat in gar keinem Verhältnis steht zu dem, was er gearbeitet hat. Allein an den Bastarden zwischen verschiedenen farbigen Levkojen-Sippen hat er mindestens 6 Jahre hindurch eifrig untersucht; außerdem experimentierte er, wie die Briefe zeigen, mit *Geum, Cirsium, Aquilegia, Linaria, Mirabilis, Melandrium, Zea, Verbascum, Antirrhinum, Ipomoea, Tropaeolum, Calceolaria.* Dazu kommen noch, wie wir aus anderen Quellen wissen, *Dianthus Caryophyllus*[1]), *Lathyrus*[1]) und *Campanula*[2]). Hätte MENDEL all dies Material veröffentlicht, und zwar in der ausführlicheren Form, die ihm NÄGELI nahe gelegt hatte (S. 198), es wäre wohl nicht unbeachtet geblieben, sicherlich nicht so lange.

Es trat nun die Frage an mich heran, ob die Briefe veröffentlicht werden sollten. Nach reiflicher Überlegung glaubte ich, sie bejahen zu müssen.

MENDEL hat seine Briefe offenbar sehr sorgfältig überlegt, erst aufgesetzt und dann ins Reine geschrieben. Nur so kann die außerordentlich saubere, blos ganz vereinzelt minimale Korrekturen aufweisende Schrift zustande gekommen sein. — Die Briefe sind fast ausschließlich Berichte über seine Versuche, etwas Persönliches blickt nur ausnahmsweise hie und da durch. Es konnte nirgends Bedenken erregen.

Das Tatsachenmaterial, das in den Briefen geboten wird, ist recht beträchtlich. Ein Teil ist freilich durch neue, schon veröffentlichte Untersuchungen[3]) veraltet (Mais- und Levkojenbastarde, Bestäubungsversuche mit *Mirabilis*), ein anderer Teil kann so,

---

1) G. MENDEL, Versuche über Pflanzenhybriden, S. 9 und 37 der Ausgabe in Ostwalds Klassikern.

2) E. TSCHERMAK, in den Anmerkungen seiner Ausgabe in Ostwalds Klassikern, S. 55.

3) Die Entdeckung, daß gerade ich am meisten mit den gleichen Objekten gearbeitet habe, wie MENDEL, konnte mir nur ein weiterer Grund für die Veröffentlichung der Briefe sein, nachdem sie einmal in meine Hände gelangt waren.

wie er vorliegt, nur als Hinweis gelten, wo erneuerte Arbeit erfolgreich einsetzen kann, ein guter Teil der Ergebnisse ist aber auch direkt verwertbar. Ich denke dabei vor allem an die Bemerkungen über seine gerade jetzt besonders aktuellen Hieracienbastarde, die eine sehr wesentliche Vervollständigung seiner kleinen Publikation bieten. Es sei mir erlaubt, am Schluß in einem Zusatz (S. 248) hierauf näher einzugehen. Auch in theoretischer Hinsicht sind manche Ausführungen MENDELS interessant, so seine Verteidigung gegen die Einwendungen NÄGELIS im II. Briefe, ferner die im IX. Briefe aufgeworfene Frage, ob auch bei der Vererbung des Geschlechterverhältnisses der Typus der Erbsenbastarde zur Geltung komme.[1])

All' das sind aber Dinge, welche die neueren Untersuchungen und Diskussionen auch zu Tage gefördert haben oder doch hätten zu Tage fördern können, wenn schon mit Zeit- und Arbeitsverlust. Das wichtigste scheint mir zu sein, daß uns die Briefe das Bild MENDELS, seine originelle Veranlagung und seinen Vorstellungskreis, noch schärfer hervortreten lassen als seine Publikationen, und das kann bei seinem einschneidenden Wirken auf einem so wichtigen Gebiet, wie es die Vererbungslehre ist, gewiß nur erwünscht sein.

Ich hielt es für besser, keine Auswahl zu treffen, sondern alle Briefe so zu geben, wie sie vorliegen. Bei dem geringen Umfang, den die Veröffentlichung auch so erreicht, wollte ich mich nicht dem Vorwurfe aussetzen, etwa gerade das weggelassen zu haben, was einen anderen besonders interessiert hätte. Die Orthographie[2]) und Interpunktion der Orginale ist, abgesehen von einigen wenigen augenfälligen Versehen, genau beibehalten worden; um möglichst allen Wünschen gerecht zu werden, habe ich den Schluß des VII. Briefes als Schriftprobe beigegeben (S. 193).

NÄGELI hat das, was er MENDEL antwortete, in einzelnen Stichworten notiert. Sie genügen, den Zusammenhang zwischen den Briefen herzustellen.

Eine Anzahl Bemerkungen, die NÄGELI auf die Briefe mit Bleistift geschrieben, habe ich in den Text oder unter den Text

---

1) Auch hierzu findet sich S. 253 ein Zusatz.

2) Beim Abschreiben war statt ß stets ss gesetzt worden, was ich nachträglich nicht mehr ändern wollte.

als Anmerkungen aufgenommen und mit (*N.*) gezeichnet; einige eigene Bemerkungen sind, soweit sie nicht als Anmerkungen unter dem Text stehen, mit (*C.*) bezeichnet. Von jedem Brief habe ich eine kurze Inhaltsangabe gemacht. Diese Angaben sind am Schluß als Inhaltsverzeichnis zusammengestellt. Sie, das Verzeichnis der Hieracienbastarde MENDELS (S. 259—261) und das alphabetische Verzeichnis der Pflanzennamen (S. 262 u. 263) sollen das Auffinden der Einzelheiten ermöglichen, die bei der Briefform ja besonders schwer zu finden sind. In der Benennung der Hieracien bin ich der Monographie von NÄGELI und PETER[1]) gefolgt (im folgenden kurz „Monographie" zitiert), sowie einer Arbeit PETERS.[2]) Die Mutter steht bei den Bastarden stets voran, wie das schon bei MENDEL der Fall ist (während bei PETER der Vater voransteht). $A + B$ heißt also: A bestäubt mit dem Pollen von B.

1) C. v. NÄGELI und A. PETER, Die Hieracien Mittel-Europas. Monographische Bearbeitung der Piloselloiden etc. 1885.

2) A. PETER. Über spontane und künstliche Gartenbastarde der Gattung *Hieracium* Sect. Piloselloidea. Englers botan. Jahrb. Bd. V, Heft 2, 3, 5, Bd. VI, Heft 2. 1884.

Indem ich gerne die Gelegenheit benütze, um
Ihnen, hochgeschätzter Freund, meine vorzügliche
Hochachtung und Verehrung auszusprechen
und mich Ihrem ferneren Wohlwollen zu
empfehlen, zeichne ich mich als

Ihren
stets ergebenen
Gregor Mendel

Brünn 15. April 69

Schluß des VII. Briefes als Probe von Mendels Schrift.

I.

Anknüpfung. — Reihenbildung der Nachkommenschaft der Erbsenhybriden. Vergleich mit GÄRTNERS Angaben. — Neue Bastardierungsversuche mit *Hieracium*, *Cirsium* und *Geum*. Bitte um Unterstützung bei den Versuchen mit den ersten zwei Gattungen.

Hochgeehrter Herr!

Die anerkannten Verdienste, welche Ew. Wohlgeboren um die Bestimmung und Einreihung wild wachsender Pflanzenbastarde erworben haben[1]), machen es mir zur angenehmen Pflicht, die Beschreibung einiger Versuche über künstliche Befruchtung an Pflanzen zur gütigen Kenntnisnahme vorzulegen.

Die Versuche wurden mit verschiedenen Formen von *Pisum* angestellt und führten zu dem Resultate, dass die Nachkommen der Hybriden ganz eigenthümliche Reihen bilden, deren Glieder sich gleichmässig zu den beiden Stammarten hinneigen. Das Vorkommen constanter Zwischenformen, das ich bei jedem Versuche bestätigt fand, scheint eine besondere Aufmerksamkeit zu verdienen. In den Entwicklungsreihen für zwei- und dreierlei differirende Merkmale, welche in die Abhandlung aufgenommen sind (pag. 21 u. 22[2]), wurden die Bezeichnungen für die constanten Formen vorangestellt, da die Glieder nach den Coefficienten geordnet sind; sie erhalten jedoch eine richtigere Stellung, wenn die Glieder nach ihrer natürlichen Verwandschaft zu den beiden

---

1) C. NÄGELI, Die Cirsien der Schweiz. 1840. 4. 7 Taf. (Neue Denkschr. d. allg. schweiz. Gesellsch. f. d. ges. Naturwissensch.); Über einige Arten der Gattung *Hieracium* (Zeitschr. f. wissensch. Botanik von SCHLEIDEN u. NÄGELI, 1845, Heft II.); Dispositio specierum generis Cirsii (KOCHS Synopsis florae germanicae et helveticae, Ed. II, Bd. III. p. 987—1012, 1845). Daß MENDEL die späteren einschlägigen S. 198 aufgeführten Schriften NÄGELIS damals schon kannte, ist nach dem Wortlaut dieser Stelle und der Zeit des Erscheinens (die erste wurde 1865, 18. Nov. in der k. bayer. Akademie besprochen) wenig wahrscheinlich.

2) S. 20 u. 21 der Ausgabe in Ostwalds Klassikern. — Durch Anbringen der Seitenzahlen der Originalabhandlung resp. des Separatabdruckes am Rande wäre diese Neuausgabe bequemer vergleichbar geworden.

Stammarten geordnet werden, wobei jenes Glied, welches in sämmtlichen Merkmalen Hybrid ist und zugleich den höchsten Coefficienten besitzt, genau in die Mitte zu stehen kommt.

Die Resultate, zu denen GÄRTNER[1]) bei seinen Versuchen gelangt ist, sind mir bekannt, ich habe sein Werk wiederholt und genau durchgesehen, um wo möglich eine Uibereinstimmung mit dem für meine Versuchspflanze gefundenen Entwicklungsgesetze nachzuweisen. Allein so viel ich mir auch Mühe gab, konnte ich doch in keinem einzigen Falle eine klare Einsicht erhalten. Es ist sehr zu bedauern, dass dieser verdienstvolle Mann nicht auch eine eingehende Beschreibung seiner einzelnen Versuche veröffentlicht und eine ausreichende Diagnose für die verschiedenen Bastardformen aufgenommen hat, namentlich für jene, die aus gleicher Befruchtung stammen. Angaben, wie: „einige Individuen waren dem mütterlichen, andere dem väterlichen Typus näher gerückt", oder „die Nachkömmlinge waren mehr zum Typus der Stammmutter zurückgekehrt" u. s. w. sind zu allgemein gehalten, zu unbestimmt, als dass sich daraus ein sicheres Urtheil ableiten liesse. Indessen kann man doch in den meisten Fällen wenigstens so viel erkennen, dass die Möglichkeit einer Uibereinstimmung mit *Pisum* nicht ausgeschlossen ist. Eine Entscheidung lässt sich wohl nur von Versuchen erwarten, bei denen der Grad der Verwandschaft zwischen den Hybridformen und ihren Stammarten diagnostisch begründet, und nicht blos nach dem Gesammteindrucke abgeschätzt wird.

Um die Uibereinstimmung mit *Pisum* zu erproben, dürfte in allen Fällen die Untersuchung der Formen hinreichen, welche in der ersten Generation[2]) erscheinen. Lassen sich für je zwei differirende Merkmale dieselben Verhältniszahlen und einfachen Entwicklungsreihen nachweisen, wie bei *Pisum*, dann wäre die

---

1) F. v. GÄRTNER, Versuche und Beobachtungen über die Bastarderzeugung im Pflanzenreich. Stuttgart 1849. Das obenstehende Urteil MENDELS über den fleißigen Forscher ist berechtigt; wie schon FOCKE mit Recht hervorgehoben hat, ist sein Buch überhaupt nur mit großer Kritik benützbar. Das wird noch in jüngster Zeit ganz außer Acht gelassen.

2) Hier — wie in den Versuchen über Pflanzenhybriden — versteht MENDEL unter der ersten Generation des Bastardes dessen Nachkommen, dem älteren Gebrauch folgend, während in den neueren Arbeiten diese als die zweite Generation bezeichnet zu werden pflegen, und die der Bastardbefruchtung direkt entspringenden Individuen die erste Generation bilden.

Sache entschieden. Auch die Absperrung während der Blüthezeit wird in den meisten Fällen keine Schwierigkeiten haben, da es sich nur um einzelne Pflanzen handelt, um jene, deren Blüthen befruchtet werden und um einige Hybriden, welche zur Samenbildung bestimmt sind. Aus dem Freien entnommene Bastarde können, so lange ihre Abstammung nicht eine ganz zweifellose ist, doch nur in zweiter Linie Verwendung finden.

Für weitere Versuche wurden *Hieracium*, *Cirsium* und *Geum* gewählt. Bei den beiden ersten ist die Manipulation bei der künstlichen Befruchtung wegen der Kleinheit und dem eigenthümlichen Baue der Blüthen sehr schwierig und unsicher. Im verflossenen Sommer habe ich es versucht, *H. Pilosella* mit *pratense*, *praealtum* und *Auricula* zu verbinden, ebenso *H. murorum* mit *umbellatum* und *pratense*, und auch keimfähige Samen erhalten; allein ich befürchte, dass bei aller Vorsicht dennoch eine Selbstbefruchtung stattgefunden hat. Das Aussehen der jungen Pflanzen lässt kaum auf den gewünschten Erfolg schliessen. Die *Hieracium*-Arten lassen sich sehr leicht in Töpfen ziehen und setzen reichlich Samen an, wenn sie auch während des Blühens in einem Zimmer oder Glashause abgesperrt waren.

Von *Cirsium* wurde das zweihäusig blühende *arvense* mit *oleraceum* und *canum* befruchtet. Die Blüthen waren durch Hüllen aus Florstoff gegen den Besuch der Insekten geschützt, welcher Schutz für Cirsien überhaupt hinreichend zu sein scheint. Ferner wurde die Befruchtung des *C. canum* und *C. lanceolatum* mit *C. oleraceum* durch die blosse Uebertragung des Pollens versucht, ohne dass die Antheren aus den Blüthen der ersteren entfernt waren.[1]) Was durch die Insekten im Freien möglich wird, das muss sich am Ende auch durch die Hand des Menschen erzielen lassen und es dürfte unter einer grossen Anzahl von Sämlingen doch eine oder die andere Hybride erhalten werden. Dasselbe Verfahren will ich im nächsten Sommer auch bei *Hieracium* anwenden.

Eine grössere Aufmerksamkeit ist auch dem Bastarde *Geum urbanum* + *rivale*[2]) zugedacht. Diese Pflanze gehört nach GÄRTNER

---

1) Von diesen Bastarden ist *C. arvense* + *C. oleraceum* (zuerst von NÄGELI) wildwachsend gefunden worden, ebenso *C. canum* + *C. oleraceum* und *C. lanceolatum* + *C. oleraceum*, während *C. arvense* + *C. canum* wildwachsend meines Wissens noch nicht gefunden wurde.

2) Die Literatur über diesen Bastard ist bei ROZE (Bull. Soc. Bot. d. France,

zu den wenigen bisher bekannten Hybriden, welche in ihren Nachkommen unverändert bleiben, wenn die Befruchtung durch den eignen Pollen geschieht. Es scheint mir übrigens nicht ganz sicher zu sein, ob die von GÄRTNER erhaltene Hybride wirklich das *G. intermedium* Ehrh. war. GÄRTNER nennt seine Pflanze einen Mittel-Typus, als welchen man *G. intermedium* doch nicht in allen Stücken bezeichnen kann. Bei der Umwandlung des *G. urbanum* in *rivale* bemerkt GÄRTNER ausdrücklich, dass durch die Befruchtung der Hybride mit dem Pollen von *rivale* lauter gleiche dem väterlichen Typus entschieden näher gerückte Individuen erhalten wurden. Wir erfahren jedoch nicht, worin diese Annäherung bestand, bis zu welchem Grade durch jede einzelne von den aufeinanderfolgenden Befruchtungen die Charaktere des *G. urbanum* verdrängt wurden, bis endlich der reine Typus des *rivale* hervortrat. Es ist wohl nicht zu bezweifeln, dass die successive Umbildung nach einem bestimmten Gesetze erfolgt, welches, falls es gelingen sollte, dasselbe aufzufinden, auch Aufschlüsse über das Verhalten anderer Hybriden dieser Art geben könnte. Ich hoffe den aus künstlicher Befruchtung erhaltenen Bastard im kommenden Sommer zur Blüthe zu bringen.

Vielleicht ist die Vermuthung nicht ganz unbegründet, dass manche *Hieracium*-Arten in hybrider Verbindung ein ähnliches Verhalten wie *Geum* beobachten. So ist es z. B. sehr auffallend, dass die gabelige Stengeltheilung, die unter den *Pilosellen* doch nur als Zwischenbildung aufgefasst werden kann, auch als vollkommen constantes Merkmal auftritt, wie ich im letzten Sommer an den Sämlingen von *H. stoloniflorum* W. K. beobachten konnte.

Durch die projectirten Versuche mit *Cirsium*- und *Hieracium*-Arten betrete ich ein Gebiet, auf welchem Ew. Wohlgeboren die ausgedehnteste Kenntnis besitzen, wie sie nur durch jahrelangen Eifer, durch Beobachtung und Vergleichung der so mannigfaltigen Formen dieser Gattungen auf ihren Standorten selbst erworben werden kann. Mir fehlt diese Erfahrung grossen Theils; durch anstrengenden Schuldienst bin ich gehindert, öfter ins Freie zu kommen, und während der Ferienzeit ist es für vieles schon zu spät. Ich besorge, dass ich im Verlaufe der Versuche, nament-

Tome XLIII. p. 273—279, 1896) zusammengestellt. DE VRIES (Die Mutationstheorie, Bd. II, S. 83) will seine Nachkommenschaft an ROZESCHEM Material weiter verfolgen; auch ich habe seine Untersuchung begonnen.

lich bei *Hieracium*, auf manche Schwierigkeit stossen könne, deshalb wende ich mich vertrauensvoll an Ew. Wohlgeboren mit der Bitte, mir Ihre hochgeschätzte Theilnahme nicht zu versagen, wenn ich in irgend einem Falle des Rathes bedürftig bin.

Mit der grössten Hochachtung und Verehrung für Ew. Wohlgeboren

zeichnet sich

GREGOR MENDEL
Stifts-Capitular
und Lehrer an der Ober-
Realschule

Brünn am 31. December 866

NÄGELI hat hierauf am 24. Februar 1867 geantwortet und Nr. 18—29 seiner Mittheilungen beigelegt. MENDELS übersandte Arbeit sei wohl nur der Vorläufer einer ausführlicheren mit allen Details der Versuche[1]). Die Formeln wären wohl nur empirische (nicht rationelle), und die konstanten Formen noch weiter zu prüfen. Er erklärte sich bereit, Versuche mit seinen Erbsensamen zu machen und empfiehlt bestimmte (S. 207 genannte) *Hieracium*-Arten. Die Anrede war: Verehrtester Herr College.

MENDEL antwortete am 18. April 1867:

II.

Vorgeschichte der Publikation der Abhandlung über die Erbsenhybriden. — Antwort auf NÄGELIS Einwurf hinsichtlich der dauernden Konstanz der aus den Bastarden isolierten konstanten Sippen. Ein Versuch im großen. Antwort auf die Frage nach der Natur der Formeln. — Übersendung von Erbsensamen für Kontrollversuche und Vorschlag zu einem solchen Versuch. — Vorhandenes Material für die Versuche mit Hieracien; Bericht über Versuche mit *Geum, Cirsium, Aquilegia, Linaria, Calceolaria, Zea, Ipomoea, Matthiola annua, Antirrhinum majus, Tropaeolum majus + minus*. Pläne für den kommenden Sommer (*Veronica, Viola, Potentilla, Carex*).

Hochgeehrter Herr!

Meinen herzlichen Dank für die freundlichst zugesendeten Druckwerke! Vor allem sind es die Abhandlungen „die Bastardbildung im Pflanzenreiche", „über die abgeleiteten Pflanzenbastarde",

---

1) Dies hat gewiß einige Berechtigung! Ein Stammbaum der Nachkommenschaft auch nur einer Hybriden, etwa in der Form, die ich in meiner ersten Mitteilung gewählt habe (G. MENDELS Regel über das Verhalten der Nachkommenschaft der Rassenbastarde, Ber. d. Deutsch. Bot. Gesellsch., Bd. XVIII. S. 162, 1900), hätte bei Fernerstehenden gewiß gut gewirkt.

„die Theorie der Bastardbildung“[1]), „die Zwischenformen zwischen den Pflanzenarten“, „die systematische Behandlung der Hieracien rücksichtlich der Mittelformen und des Umfanges der Species“, welche meine ganze Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen. Eine gründliche Bearbeitung der Bastardlehre nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft konnte mir nur in hohem Grade willkommen sein. Nochmals meinen Dank!

Bezüglich des Aufsatzes, den Ew. Wohlgeboren anzunehmen die Güte hatten, glaube ich noch Nachfolgendes mittheilen zu müssen. Die in demselben besprochenen Versuche wurden vom Jahre $\overline{856}$[2]) bis $\overline{863}$ durchgeführt. Es war mir nicht unbekannt, dass das erhaltene Resultat mit dem heutigen Stande der Wissenschaft nicht leicht in Einklang zu bringen sei, und dass bei diesem Umstande die Veröffentlichung eines vereinzelt stehenden Experimentes doppelt gefährlich werden könne, für den Experimentirenden sowohl, als auch für die Sache, die er vertritt. Vor allem war daher mein Bestreben dahin gerichtet, die bei *Pisum* gemachten Erfahrungen durch Versuche mit anderen Pflanzen zu prüfen. Bei einer grösseren Anzahl Befruchtungen, welche $\overline{863}$ und $\overline{64}$ vorgenommen wurden, überzeugte ich mich, dass es nicht leicht gelinge, Pflanzen aufzufinden, welche für eine umfassende Versuchsreihe geeignet wären, und dass im ungünstigen Falle Jahre vergehen können, ohne den gewünschten Aufschluss zu erhalten. Ich war nun bemüht, Controlversuche zu veranlassen, und besprach deshalb in den Versammlungen des hierortigen naturforschenden Vereines die Versuche mit *Pisum*. Ich begegnete, wie es nicht anders zu erwarten war, sehr getheilten Ansichten, eine Wiederholung der Versuche aber wurde, soweit es mir bekannt ist, von Niemanden unternommen. Als ich im verflossenen Jahre[3])

---

1) Durch diese drei Arbeiten wurde, wie W. O. FOCKE richtig hervorhebt (Pflanzenmischlinge, S. 443), „zum erstenmal die Lehre von der Hybridität im Pflanzenreich vollkommen vorurteilsfrei und im Zusammenhang dargestellt“; vor allem hat NÄGELI, so gut es ging, aus GÄRTNERS Beobachtungen allgemeine Schlüsse abgeleitet. Diese Darstellung ist dann bis in die Neuzeit maßgebend geblieben. Von den drei Arbeiten wurde die erste am 15. Dez. 1865, die beiden folgenden am 13. Jan. 1866 in der K. b. Akademie der Wissenschaften zu München vorgetragen.

2) Bisher wurde 1858 als das Anfangsjahr der hybridologischen Studien MENDELS angegeben (E. TSCHERMAK in Ostwalds Klassikern, No. 121 S. 55.)

3) 1866.

aufgefordert wurde, den Vortrag in den Vereinsschriften veröffentlichen zu lassen, gab ich die Einwilligung dazu, nachdem ich nochmals die Aufzeichnungen aus den verschiedenen Versuchsjahren durchgesehen hatte, ohne eine Fehlerquelle entdecken zu können. Die überreichte Abhandlung ist der ungeänderte Abdruck des Conceptes für den erwähnten Vortrag; daher die Kürze in der Darstellung, wie sie für Vereins-Vorträge überhaupt geboten ist.

Es kam mir nicht unerwartet, dass Ew. Wohlgeboren von meinen Versuchen mit misstrauender Vorsicht sprechen; ich würde es in einem ähnlichen Falle nicht anders thun. Zwei Stellen in Ihrem geehrten Schreiben scheinen mir zu wichtig zu sein, als dass ich sie unerwähnt lassen könnte. Die erste enthält die Frage, ob man schon auf ein Constantgewordensein schliessen dürfe, wenn der Bastard *Aa* eine Pflanze *A* erzeugt und diese wieder nur *A* hervorbringt.

Darauf erlaube ich mir zu bemerken, dass ich als Empiriker, unter Constantbleiben nichts anderes verstehen konnte, als das Beibehalten der Charaktere während der Beobachtungszeit. Meine Angaben, dass unter den Nachkommen der Hybriden ein Theil constant bleibt, können sich daher nur auf jene Generationen erstrecken, für welche Beobachtungen vorliegen, und nicht darüber hinaus. Durch zwei Generationen wurden sämmtliche Versuche mit einer grösseren Anzahl Pflanzen durchgeführt. Von der dritten Generation angefangen musste die Anzahl wegen Mangel an Raum beschränkt werden, so zwar, dass für jeden von den sieben Versuchen nur einzelne von jenen Pflanzen, welche in der zweiten Generation constant blieben, und von jenen, welche variirten, weiter beobachtet wurden. Die Beobachtung erstreckte sich (pag. 17[1])) auf 4 bis 6 Generationen. Von den constanten Varietäten der beiden Versuche pag. 19—21[2]) wurden einzelne Pflanzen bis in die vierte Generation beobachtet. Ferner kann ich den Fall nicht unerwähnt lassen, dass eine Varietät, deren Stammeltern in 4 Merkmalen verschieden waren, durch 6 Generationen nicht variirte. Es wurde nämlich im Jahre 859 aus der ersten[3]) Generation einer Hybride ein sehr fruchtbarer Abkömmling mit grossen wohlschmeckenden Samen erhalten. Da die Nachkommen

1) S. 16 der Ausgabe in Ostwalds Klassikern.
2) S. 18—21 der Ausgabe in Ostwalds Klassikern.
3) Der zweiten nach heutigem Sprachgebrauch.

desselben im folgenden Jahre die guten Eigenschaften beibehielten und sich auch sonst gleichblieben, wurde diese Varietät im Gemüsegarten angebaut und bis inclus. $\overline{865}$ jährlich in vielen Exemplaren cultivirt. Die Stammpflanzen waren *bcDg* und *BCdG*.

B Albumen[1]) gelb	*b*. A. grün
C Samenschale graubraun	*c*. S. weiss
D Hülse gewölbt	*d*. H. eingeschnürt
G Axe lang	*g*. A. kurz

Der genannte Abkömmling war: *BcDG*.

Die Färbung des Albumens[1]) konnte nur an den für Samengewinnung bestimmten Pflanzen untersucht werden, da die Hülsen der übrigen noch unreif abgenommen wurden. An diesen Pflanzen kam die grüne Färbung des Albumens niemals vor, eben so wenig wurde jemals die violettrothe Blüthenfarbe (ein Zeichen für die braune Samenschale), die Einschnürung an den Hülsen, oder die kurze Axe beobachtet.

So weit reicht meine Erfahrung. Ob sich daraus schon Schlüsse auf ein Constantgewordensein ziehen lassen, darüber kann ich ein absprechendes[2]) Urtheil nicht fällen, gestehe jedoch, dass ich geneigt bin, bei *Pisum* die Trennung der Stamm-Merkmale, wo sie unter den Nachkommen der Hybriden erfolgt, für eine vollständige und deshalb auch nachhaltige anzusehen. Die Abkömmlinge der Hybriden tragen ausschliesslich eines von den beiden Stamm-Merkmalen oder die Hybridform derselben an sich; stuffenweise Uebergänge zu den Stamm-Merkmalen oder eine successive Annäherung an dieselben habe ich nicht beobachtet. Der Entwicklungsgang besteht einfach darin, dass in jeder Generation unmittelbar aus der Hybridform die beiden Stamm-Merkmale getrennt und ungeändert hervorgehen, und nichts verräth an ihnen, dass eines von dem anderen etwas geerbt oder mitgenommen hätte. Um nur einen Fall anzuführen, erlaube ich mir auf die übersendeten Paquete mit den Nummern 1035—1088 hinzuweisen.[3]) Die Samen stammen sämmtlich aus der ersten Generation einer Hybride, in welcher die braune und weisse Samenschale vereinigt waren. Aus den gleichfalls braunen Samen dieser Hybride gingen Pflanzen hervor, von denen ein Theil ausschliesslich die weisse Färbung der Samenschale brachte, welche keine Beimengung von Braun

1) Kotyledonen. 2) Abschließendes? 3) Vergl. S. 203 u. f. und 210.

besitzt und, wie ich erwarte, dieselbe Constanz bewahren wird, wie sie dem gleichen Merkmale der Stammpflanze zukommt.

Die zweite Stelle, an die ich eine kurze Bemerkung anknüpfen will, enthält die Worte: „Die Formeln dürften Sie wohl ebenfalls für empirische halten, da dieselben als rationelle nicht zu erweisen wären".

Meine Versuche über die einzelnen Merkmale führten alle zu dem einen Resultate, dass aus den Samen der Hybride Pflanzen hervorgehen, von denen die eine Hälfte wieder das hybride Merkmal (Aa) besitzt, die andere aber die beiden Stamm-Merkmale (A und a) zu gleichen Theilen erhält. Im Durchschnitte besitzen daher unter je 4 Pflanzen zwei das hybride Merkmal Aa, eine den Stammcharakter A und die andere a. Demnach ist $2\,Aa + A + a$ oder $A + 2Aa + a$ die empirische einfache Entwicklungsreihe für je zwei differirende Merkmale. Eben so wurde auf empirischem Wege nachgewiesen, dass wenn zwei- oder dreierlei differirende Merkmale in der Hybride vereinigt sind, die Entwicklungsreihe aus zwei oder drei einfachen Reihen combinirt erscheint. Bisher glaube ich kann mich nicht der Vorwurf treffen, dass ich den Boden des Experimentes irgendwo verlassen hätte. Wenn ich endlich die Combinirung der einfachen Entwicklungsreihen auf jede Anzahl von Differenzen zwischen den beiden Stammpflanzen ausdehnte, habe ich damit allerdings den rationellen Weg betreten; ich erhalte das jedoch für erlaubt, weil ich in den vorausgegangenen Experimenten den Beweis finde, dass die Entwicklung hinsichtlich je zweier differirender Merkmale unabhängig von den übrigen Differenzen erfolgt.[1]) — Was schließlich die Angaben über die Verschiedenheit der von den Hybriden gebildeten Keimbläschen und Pollenzellen betrifft, so stützen sich dieselben gleichfalls auf Versuche. Diese und ähnliche Versuche über die Befruchtungszellen scheinen mir wichtig zu sein, weil ich in dem Resultate derselben die Erklärung für die beobachtete Entwicklung der Hybriden von *Pisum* zu finden glaube. Diese Versuche würden vor allen anderen Controlirung durch Wiederholung verdienen.

Ich muss es wahrhaft bedauern, dass ich nicht in der Lage bin, Ew. Wohlgeboren Samen von den gewünschten Varietäten

---

1) Ich weiß nicht, ob MENDEL hier das, was NÄGELI unter empirischer und rationeller Formel meinte, ganz verstanden hat.

senden zu können. Schon früher habe ich erwähnt, dass die beschriebenen Versuche bis inclus. $\overline{863}$ angestellt wurden; mit diesem Jahre wurden sie auch abgeschlossen, um Raum und Zeit für die Cultur anderer Versuchspflanzen zu gewinnen. Von diesen Versuchen sind Samen nicht mehr vorrätig. Nur ein Experiment über den Unterschied in der Blütezeit wurde noch weiter geführt und von diesem sind aus der $\overline{864}$ger Ernte noch Samen vorhanden. Es sind die letzten, die ich eingesammelt habe, da der erwähnte Versuch im folgenden Jahre wegen argen Verwüstungen durch den Erbsenkäfer *Bruchus pisi* aufgegeben werden mußte.[1]) Dieses Insekt, welches sich in den früheren Versuchsjahren immer nur vereinzelt auf den Pflanzen gezeigt hatte, richtete schon im Jahre $\overline{864}$ nicht unbedeutenden Schaden an, und im folgenden Sommer erschien es in solcher Menge, dass kaum der 4te bis 5te Theil der Samen verschont blieb. In der Umgebung von Brünn musste der Erbsenbau in den letzen Jahren ganz aufgelassen werden. Die noch vorhandenen Samen enthalten manches Brauchbare, namentlich befinden sich darunter einige Varietäten, von denen ich voraussetze, dass sie nicht variiren werden; sie stammen von Hybriden ab, in welchen 2, 3 u. 4 Differenzen verschmolzen waren. Die Samen stammen sämmtlich von Gliedern der ersten Generation[2]), demnach von Pflanzen, welche unmittelbar aus den Samen der ursprünglichen Hybriden hervorgegangen waren.

Wenn der von Ew. Wohlgeboren gestellte Antrag nicht so sehr meinen Wünschen entspräche, müsste ich wohl Bedenken tragen, diese Samen für Versuche zu übersenden. Ich fürchte, dass sie theilweise die Keimfähigkeit verloren haben, auch stammen sie aus einer Zeit, in welcher *Bruchus pisi* schon überhand genommen hatte, welchen Käfer ich von der Pollenverschleppung nicht frei sprechen möchte; endlich muss ich nochmals des Umstandes erwähnen, dass die Pflanzen für eine Untersuchung über den Unterschied in der Blüthezeit bestimmt waren. Die übrigen

---

1) MENDEL gibt leider weder hier noch an anderer Stelle Auskunft über das Verhalten dieses 8. Merkmales. Nach den Beobachtungen von E. TSCHERMAK (Über die gesetzliche Gestaltungsweise der Mischlinge, Zeitschr. f. d. landw. Versuchsw. in Österreich, 1902, S. 37) haben die Bastarde eine intermediäre Blütenzeit, das Merkmalspaar spaltet aber. Eigene, unveröffentlichte Notizen aus der zweiten Hälfte der 90er Jahre lassen dies auch erkennen.

2) Vergl. S. 195 Anm. 2.

Differenzen wurden beim Einsammeln der Samen wohl auch berücksichtigt, doch geschah das vielleicht weniger ängstlich, als es für den Hauptversuch geschehen musste. Die Bezeichnung, welche ich den Paquetnummern auf einem besonderen Blatte beigegeben habe, ist eine Abschrift jener Notiz, die ich beim Einsammeln für jede einzelne Pflanze mit Bleistift auf dem Papierumschlage angesetzt hatte. Die dominirenden Merkmale sind mit *A, B, C, D, E, F, G* bezeichnet und bezüglich der doppelten Bedeutung derselben erlaube ich mir auf pag. 15 (anfangs)[1]) hinzuweisen. Die recessiven Merkmale haben die Bezeichnung: *a, b, c, d, e, f, g*; diese sollen in den nächsten Generationen beständig bleiben, daher auch von jenen Samen, welche von Pflanzen mit ausschliesslich recessiven Merkmalen stammen, durchaus gleiche Pflanzen zu erwarten sind (gleich nämlich in Bezug auf die in Betracht kommenden Merkmale).

Zur Orientirung über eine möglicherweise vorgekommene Irrung in den Bezeichnungen bitte ich freundlichst, die Nummern der Samen-Paquete zu berücksichtigen, da dieselben mit denen meines Verzeichnisses übereinstimmen. — Jedes Paquet enthält nur Samen von einer Pflanze.

Einige von den vorhandenen Varietäten sind zu Versuchen über die Befruchtungszellen geeignet, deren Resultat noch im heurigen Sommer ersichtlich würde. Zu empfehlen wären dafür einerseits die rundlichen gelben Samen aus den Paqueten 715. 730. 736. 741. 742. 745. 756. 757, und andererseits die kantigen grünen Samen der Paquete 712. 719. 734. 737. 749. 750. Durch wiederholte Versuche fand ich es bestätigt, dass wenn grünsamige Pflanzen durch gelbsamige befruchtet werden, das Albumen[2]) der befruchteten Samen die grüne Färbung verliert und die gelbe annimmt. Aehnlich verhält es sich mit der Gestalt der Samen. Werden Pflanzen mit kantigen Samen durch andere mit runden oder rundlichen Samen befruchtet, so erhalten die befruchteten Samen stets die runde oder rundliche Gestalt. Aus den Umänderungen, welche die Farbe und Gestalt der Samen durch die Befruchtung mit fremdem Pollen erleiden, kann man demnach auf die Beschaffenheit des befruchtenden Pollens schließen.

---

1) S. 14 der Ausgabe in Ostwalds Klassikern, in der Mitte der Seite.
2) Die Cotyledonen.

Es bezeichne *B* die gelbe Färbung *b* die grüne F. des Albumens
A die runde Gestalt *a* die kantige G. der Samen.

Werden die Blüthen solcher Pflanzen, deren Samen bei Selbstbefruchtung grün und kantig sind, mit fremdem Pollen befruchtet und bleiben die Samen grün und kantig, so war die Pollen gebende Pflanze in den beiden Merkmalen gleichartig — — *ab*.

Aendert sich die Gestalt der Samen, so stammt der Pollen von *Ab*
„ „ „ Farbe „ „ „ „ „ „ „ *aB*
„ „ Gestalt und Farbe „ „ „ „ „ „ *AB*

Die früher aufgezählten Paquete enthalten die von der Hybride *ab* + *AB* gebildeten runden und gelben, runden und grünen, kantigen und gelben, kantigen und grünen Samen. Für das Experiment würden sich die rundlichen und gelben Samen am besten eignen. Unter diesen können (Versuch pag. 19[1])) die Varietäten *AB*, *ABb*, *Aab*, *AaBb* enthalten sein; daher sind 4 Fälle möglich, wenn Pflanzen, welche aus kantigen grünen Samen stammen, mit dem Pollen jener befruchtet werden, welche aus den bezeichneten rundlichen und gelben Samen hervorgehen, nämlich:

I. *ab* + *AB*
II. *ab* + *ABb*
III. *ab* + *AaB*
IV. *ab* + *AaBb*

Ist der aufgestellte Satz richtig, dass die Hybriden so vielerlei Pollenzellen bilden, als constante Combinationsformen möglich sind, so erzeugen

die Pflanzen *AB* Pollen von der Beschaffenheit *AB*
„ „ *ABb* „ „ „ „ *AB* und *Ab*
„ „ *AaB* „ „ „ „ *AB* und *aB*
„ „ *AaBb* „ „ „ „ *AB*, *Ab*, *ab* und *aB*.

Es werden demnach befruchtet:

I. Die Keimbläschen *ab* mit dem Pollen *AB*
II. „ *ab* „ „ „ *AB* u. *Ab*
III. „ *ab* „ „ „ *AB* u. *aB*
IV. „ *ab* „ „ „ *AB*, *A*b, *aB* u. *ab*.

1) S. 18 der Ausgabe in Ostwalds Klassikern.

Aus diesen Befruchtungen sind folgende Varietäten möglich:

I. *AaBb*
II. *AaBb* u. *Aab*
III. *AaBb* u. *aBb*
IV. *AaBb*, *Aab*, *aBb* u. *ab*.

Wenn die verschiedenen Pollenarten in gleicher Anzahl gebildet werden, so müssen demnach

I. alle Samen rund und gelb erscheinen
II. zur Hälfte rund und gelb
zur Hälfte rund und grün
III. zur Hälfte rund und gelb
zur Hälfte kantig und gelb
IV. zum vierten Theile rund und gelb
„ „ rund und grün
„ „ kantig und gelb
„ „ kantig und grün.

Da ferner zwischen *AB*, *ABb*, *AaB*, *AaBb* der Anzahl nach die Verhältnisse 1 : 2 : 2 : 4 statt finden, so ist durchschnittlich unter je 9 Pflanzen, welche aus den rundlichen gelben Samen hervorgehen, *AaBb* 4mal, *ABb* und *AaB* je 2mal und *AB* einmal enthalten und es wird daher der IVte Fall 4mal so oft als der Ite und doppelt so oft als der IIte und IIIte eintreten.

Würden umgekehrt Pflanzen, welche aus den genannten rundlichen und gelben Samen stammen, durch jene aus kantigen und grünen befruchtet, so müsste der Erfolg genau derselbe bleiben, vorausgesetzt dass auch die Keimbläschen von derselben Beschaffenheit und in denselben Verhältnissen gebildet werden, wie es für den Pollen angegeben wurde.

Diesen Versuch habe ich selbst nicht durchgeführt, glaube jedoch aus dem Erfolge bei anderen ähnlichen Versuchen mit Sicherheit auf das angedeutete Resultat rechnen zu dürfen.

In gleicher Weise liessen sich für jedes der beiden Samen-Merkmale abgesonderte Versuche anstellen, wozu alle runden Samen, die zugleich mit kantigen, und alle gelben, die zugleich mit grünen an einer Pflanze gebildet wurden, geeignet wären. Würden z. B. die grünsamigen Pflanzen durch die gelbsamigen befruchtet, so müssten die erhaltenen Samen entweder 1.) alle

gelb, oder 2.) zur Hälfte gelb und zur Hälfte grün gefärbt erscheinen, da die aus den gelben Samen hervorgehenden Pflanzen die Varietäten *B* und *Bb* sind. Weil ferner der Anzahl nach *B* und *Bb* sich zu einander verhalten wie 1 : 2, so wird auch der 2te Fall doppelt so oft eintreffen, als der 1te.

Für die übrigen Merkmale lassen sich die Versuche in ganz gleicher Weise durchführen, jedoch kann das Resultat erst im nächsten Jahre ersichtlich werden.

Von den Hieracien, welche mir Ew. Wohlgeboren für Versuche empfehlen, besitze ich die angeführten Piloselloiden vollzählig.[1]) Von den Archieracien: *H. murorum* und *H. vulgatum*; dagegen fehlt in der Nähe: *H. glaucum, H. alpinum, H. amplexicaule, H. prenanthoides* und *H. tridentatum.* Im verflossenen Herbste fand ich ein schon abgeblühtes *Hieracium,* welches die Samenfarbe der *Prenanthoidea* besitzt (Fries: Achaenia typice testacea (pallida)), es wollte jedoch mit keiner dahin gehörigen Herbarpflanze übereinstimmen und wurde schliesslich von unsern Botanikern als Bastard erklärt.[2]) Der Wurzelstock ist für weitere Beobachtungen in den Garten versetzt, die Samen sind angebaut. Die hiesige Gegend ist im Ganzen arm an Hieracien, wurde wohl auch nicht hinreichend durchsucht. Im nächsten Sommer hoffe ich Zeit zu gewinnen, um das sandige Braunkohlenland zu durchstreifen, welches sich östlich von Brünn einige Meilen weit bis an die ungarische Grenze hinzieht. Es ist aus dieser Gegend manche andere seltene Pflanze bekannt. Auch das böhmisch-mährische Plateau dürfte bezüglich der Hieracien noch so ziemlich eine terra incognita sein. Sollte im Verlaufe des Sommers etwas Bemerkenswerthes in meine Hände gelangen, so werde ich nicht säumen, dasselbe Ew. Wohlgeboren einzusenden. Vorläufig erlaube ich mir, den Samen-Paqueten die früher erwähnte Pflanze beizulegen, freilich in einem sehr defecten Zustande, nebst einem anderen *Hieracium,* welches ich ebenfalls im verflossenen Jahre in Brünn auf einer alten Gartenmauer in wenigstens 50 Exemplaren fand. Diese Pflanze fehlt in den hiesigen Herbarien, sie mahnt in ihrer Tracht an *H. praealtum* und *H. echioides* zugleich, ohne

---

1) *Hieracium Pilosella, H. Auricula, H. praealtum, H. pratense, H. aurantiacum* und *H. cymosum* nach NÄGELIS Notiz.

2) *Hieracium barbatum* TAUSCH (N.).

das eine oder das andere zu sein.[1]) *H. praealtum* kommt in der Umgebung der Stadt vor, nicht aber *H. echioides.*

Von der Hybride *Geum urbanum* + *G. rivale* (aus vorjähriger Befruchtung) wurden mehrere Exemplare im Kalthause überwintert; drei davon stehen in Blüthe, die übrigen werden nachfolgen. Der Pollen ist ziemlich gut ausgebildet und die Pflanzen dürften, wie auch GÄRTNER anführt, fruchtbar sein. Es will mir merkwürdig scheinen, dass die bis jetzt blühenden Pflanzen den von GÄRTNER angeführten Ausnahms-Typus besitzen. Pag. 302 heisst es bei GÄRTNER: „*Geum urbano-rivale* in der Mehrzahl mit grossen dem *rivale* nahe kommenden, und nur ein paar Exemplare mit kleinen dem *urbanum* näher gebliebenen gelben Blumen". An meinen Pflanzen sind die Blüthen in der That gelb und gelborangefarbig und etwa halb so gross, als die des *G. rivale*; die übrigen Charaktere entsprechen, so weit es sich bis jetzt beurtheilen lässt, dem *G. intermedium* Ehrh. Sollte etwa dem Ausnahmstypus eine frühere Blüthezeit zukommen? Den Knospen nach versprechen aber auch die übrigen Pflanzen keine grösseren Blüthen. Oder sollte hier die Ausnahme zur Regel werden können? Für die Reinheit meiner beiden Stamm-Species glaube ich Gründe zu haben. *G. urbanum* wurde aus der Umgebung der Stadt genommen, wo weder *G. rivale* noch eine andere Art aus diesem Geschlechte vorkommt, *G. rivale* habe ich aus dem Gebirge geholt von einer sehr nassen Wiese, wo *G. urbanum* sicher nicht wächst. Die Pflanze besitzt genau die Charaktere des *G. rivale*, sie wird im Garten erhalten, auch sind aus Selbstbefruchtung hervorgegangene Sämlinge davon vorhanden.

Die aus der Herbst-Aussaat stammenden Hybriden von *Cirsium arvense* + *C. oleraceum* sind über den Winter im Garten eingegangen, von *C. arvense* + *C. canum* blieb eine Pflanze erhalten. Hoffentlich werden die Frühjahrs-Sämlinge glücklicher sein. Sehr gut haben dagegen zwei andere *Cirsium*-Hybriden im Kalthause überwintert. Ich hatte im verflossenen Sommer an einer im Garten blühenden Pflanze von *C. praemorsum* M. *(olerac. + rivulare)* die Beobachtung gemacht, dass an den Blüthenköpfen, welche an den Stengeln zuerst und zuletzt entwickelt wurden, der Pollen

1) Von NÄGELI erst als *Hieracium cinereum* TAUSCH bestimmt, dann, nachdem er Originalexemplare dieser Pflanze gesehen und ihre Verschiedenheit erkannt hatte, *H. setigerum* (Zwischenform zwischen *H. echioides* und *H. Pilosella*) genannt.

nicht zur Ausbildung kam, weshalb sie auch ganz steril blieben; an den übrigen, etwa der Hälfte wurde etwas Pollen und auch guter Same erzeugt. An zwei zuletzt entwickelten Blüthenköpfen wurden Befruchtungs-Versuche angestellt, auf den einen der Pollen von *C. palustre*, auf den anderen von *C. canum* übertragen. In beiden Fällen wurden keimfähige Samen erhalten, wovon die Pflanzen, die den Winter über im Kalthause blieben, schon so weit entwickelt sind, dass die gelungene Hybridisirung ersichtlich ist. Einige Sämlinge von *C. praemorsum*, dann von einer Hybride, welche vermuthlich in die Reihe *C. canum* + *palustre* gehört, und einer anderen, die wahrscheinlich *C. rivulare* + *palustre* ist, haben den Winter im Freien gut überstanden. Dasselbe lässt sich auch von den Herbst-Sämlingen der Hybriden *Aquilegia canadensis* + *vulgaris*, *A. canadensis* + *A. atropurpurea* u. *A. canadensis* + *A. Wittmaniana* sagen. Nicht unbedeutenden Schaden haben dagegen die Herbstpflanzen mancher Hieracien genommen, die zur Untersuchung der Constanz angebaut waren. Bei diesem Genus dürfte die Aussaat im ersten Frühjahre vorzuziehen sein; ob sie dann aber auch in demselben Jahre zur Blüthe gelangen, ist allerdings sehr fraglich. Von der Abtheilung *Accipitrina* macht indessen FRIES die Angabe: „Accipitrina, praecocius sata, vulgo primo anno florent".

Sehr üppige und, wie ich hoffe, im ersten Jahre blühbare Pflanzen erhielt ich von *Linaria vulgaris* + *L. purpurea*.[1]) Dasselbe gilt von *Calceolaria salicifolia* + *C. rugosa*. Auch Hybriden von *Zea Mays major* (mit dunkelrothen Samen) + *Z. Mays minor* (mit gelben Samen), ferner *Zea Mays major* (mit dunkelrothen Samen) + *Zea Cuzko* (mit weissen Samen) werden im Verlaufe des Sommers zur Entwicklung kommen. Ob *Zea Cuzko* eine eigene Species sei, wage ich nicht zu behaupten.[2]) Sie kam mir mit dieser Bezeichnung

1) Dieser Bastard wurde zuerst von NAUDIN (Nouvelles recherches sur l'hybridité dans les végétaux, Nouv. arch. d. mus. I. p. 96, 1863) beschrieben. (MENDEL war inzwischen auf diesen seinen Vorgänger aufmerksam geworden. Über das Verhältnis beider vergl. Ber. d. Deutsch. botan. Gesellsch. Bd. XIX, S. (76), 1901.) In Wirklichkeit hatte MENDEL aber den Bastard *Linaria vulgaris* + *L. striata* erzeugt, da seine *L. purpurea* die *L. striata* war. Vergl. S. 216.

2) Vergl. S. 236, Anm. 3. „*Zea Cuzko*" war gewiß nicht der echte Cuzko-Mais, der in Europa nirgends ausreift (KOERNICKE u. WERNER, Handbuch des Getreidebaues, Bd. II, S. 773), sondern eine andere Rasse mit weißem Endosperm und weißlicher Fruchtschale.

aus einer Samenhandlung zu. Eine sehr abweichende Form ist sie jedenfalls. Für die Untersuchung der Farben-Entwicklung an den Blüthen der Hybriden wurden im vorigen Jahre Befruchtungen vorgenommen zwischen Varietäten von *Ipomoea purpurea, Cheiranthus annuus* und *Antirrhinum majus.* Dazu gehört auch ein Versuch mit den Hybriden von *Tropaeolum majus* + *T. minus* (1. Generat.).

Für das heurige Jahr sind Probe-Versuche mit *Veronica, Viola, Potentilla* und *Carex* in Aussicht genommen. Leider besitze ich davon nur eine geringe Anzahl Species.

Die Versuche können wegen Mangel an Raum nur mit einer kleinen Anzahl Pflanzen begonnen werden, erst wenn die Fruchtbarkeit der Hybriden erprobt und es zugleich möglich ist, dieselben während des Blühens hinreichend zu schützen, soll denselben der Reihe nach eine grössere Ausdehnung gegeben werden. Bis jetzt eignen sich dazu die oben angeführten 3 *Aquilegia*-Bastarde und *Tropaeolum majus* + *T. minus,* obwohl bei letzterem die Fruchtbarkeit nur eine mittelmässige ist. Hoffentlich wird sich auch *Geum urbanum* + *G. rivale* anschliessen.

Die Versuche gehen, wie es nicht anders sein kann, nur langsam vorwärts. Anfangs gehört einige Geduld dazu, doch später macht sich die Sache schon besser, wenn mehrere Versuche gleichzeitig im Gange sind. Da wird vom Frühlinge an, bis in den Herbst hinein täglich das Interesse aufs Neue gespannt, und die Mühe, welche den Schutzbefohlenen zugewendet werden muss, findet darin einen reichlichen Ersatz. Sollte es mir nebstbei gelingen die Lösung des Problems durch meine Versuche irgendwie fördern zu können, so würde ich mich doppelt glücklich fühlen.

Nehmen Sie hochgeehrter Herr den Ausdruck der aufrichtigsten Hochachtung entgegen von

Ihrem ergebenen

G. MENDEL
(Alt-Brünn, Stift St. Thomas)

Brünn 18. April 867

Es hätte keinen Sinn gehabt, auch das Verzeichnis, das die 140 Samenpackete begleitete und dem Briefe beigelegt ist, zu veröffentlichen. Die Samen stammten teils von 8 Bastarden: $Df + dF$, $de + DE$, $BfG + bFg$, $abFg + ABfG$,

bcDg + *BCdG*, *ACd* + *acD*, *ABG* + *abg*, *DEf* + *deF*, teils von deren Stammpflanzen.[1])

Eine Anzahl Proben ließ NÄGELI im April 1867 aussäen; Notizen über das Ergebnis sind nicht erhalten.

Im November schrieb MENDEL nochmals an NÄGELI.

III.

Bericht über *Hieracium praealtum* + *H. stoloniflorum (H. florentinum subcymigerum* + *H. flagellare)*. Die Stammarten. Methodisches zur Castration der Hieracienblüten. Fruchtbarkeit des Bastardes; seine Blütenzahl das geometrische Mittel zwischen den Blütenzahlen der Stammeltern. — Neue Bastardierungsversuche mit Hieracien. — Beobachtungen an *Cirsium praemorsum (= oleraceum* + *rivulare)* + *C. canum* (2 Formen), an *Geum urbanum* + *G. rivale, Linaria vulgaris* + *L. striata. Verbascum phoeniceum* + *V. Blattaria* (Verlängerte Lebensdauer und Fertilität eines Individuum).

Hochgeehrter Herr!

Meine Vorsätze, im Verlaufe des heurigen Sommers die *Hieracien* der hiesigen Gegend auf ihren Standorten zu studiren, sind leider nur in sehr beschränktem Masse zur Ausführung gelangt. Mangel an Zeit ist hauptsächlich Schuld daran, auch tauge ich nicht mehr recht für botanische Excursionen, da mich der Himmel mit einem Uebergewichte gesegnet hat, welches sich bei weiteren Fusspartien, namentlich aber beim Bergsteigen, in Folge der allgemeinen Gravitation, sehr fühlbar macht. Wenn ich daher nicht, wie ich es gerne gethan hätte, eine Collecte wild wachsender Hieracien übersenden kann, so erlaube ich mir doch einiges aus meiner Plantage zur gütigen Ansicht vorzulegen.

Zuvörderst ist es ein *Hieracium*-Bastard: *H. praealtum* + *H. stoloniflorum* (Autorum).[2]) Ich lege zugleich die beiden cultivirten Stammpflanzen zur gefälligen Beurtheilung bei, da ich mir in diesem genus eine sichere Bestimmung nicht zutraue. Es sei noch dazu bemerkt, dass dieses *H. praealtum* (vielleicht var. *obscurum* Rchb.) um Brünn häufig auf etwas feuchten Stellen.

---

1) *A* und *a* beziehen sich auf die Gestalt der Samen, *B* und *b* auf die Färbung der Cotyledonen, *C* und *c* auf die Farbe der Samenschale, *D* und *d* auf die Gestalt der Hülse, *E* und *e* auf die Färbung der unreifen Hülse, *F* und *f* auf die Stellung der Blüten, *G* und *g* auf die Länge der ganzen Pflanze. (Vergl. S. 7 u. 8 der Ausgabe in Ostwalds Klassikern.)

2) *H. praealtum* + *flagellare* Rchb. in MENDELS Mitteilung über Hieracien-Bastarde; *H. flagellare* + *H. subcymigerum* = *H. inops* bei PETER l. c. und *H. flagellare* + *H. florentinum V. 6. subcymigerum* der Monographie von NAEGELI und PETER. Der Name *inops* bezieht sich auf den schwachen Wuchs des Bastardes.

Wiesen etc. vorkommt, und oft noch üppiger entwickelt ist, als das cultivirte Exemplar. 28 Sämlinge des heurigen Jahres variirten nicht. Ausläufer fehlen immer. *H. stoloniflorum* kommt ebenfalls in hiesiger Gegend, jedoch nur stellenweise vor. Genau dieselbe Form habe ich aus Samen gezogen, den ich von einer Herbar-Pflanze aus Breslau entnahm, welcher die Notiz beigefügt war: „kommt hier häufig vor und ist kein Bastard." Ich vermag nur so viel zu constatiren, dass die hiesige Pflanze identisch mit der Breslauer ist, dass die Sämlinge des vorigen und heurigen Jahres (2te Generation)[1]) keine Abweichungen zeigten, und das derselben vollkommene Fruchtbarkeit zukommt.

Nebst anderen Experimenten, die ich im verflossenen Jahre anstellte, um bei Hieracien die künstliche Befruchtung zu Stande zu bringen, versuchte ich auch an dem erwähnten *H. praealtum* die Entwicklung des Pollens zu stören, oder denselben wenigstens von der Narbe fern zu halten. Zu diesem Zwecke wurden an einem Köpfchen, welches noch nicht ganz ausgebildet war, die Hüllschuppen bis über die Hälfte abgeschnitten, darauf die kleinen Blüthenknospen bis auf 10—12 herausgenommen, sodann letztere mit einer feinen Nadel mehrfach aufgeschlitzt, bis der Griffel völlig entblösst war. Die Uebertragung des Pollens von *H. stoloniflorum* erfolgte sogleich und wurde noch später wiederholt. Trotz dieser sehr violenten Behandlung wurden doch 4 gut ausgebildete Samen erhalten, welche im Frühlinge angebaut ebenso viele Pflanzen lieferten. Drei davon stimmten mit *H. praealtum* ganz überein, während die vierte bedeutende Abweichungen zeigte und zweifellos die Hybridform *H. praealtum* + *stoloniflorum* darstellt. Durch das angedeutete Verfahren war wenigstens in einem unter 4 Fällen die Selbstbefruchtung verhütet worden; dasselbe scheint zweckdienlich zu sein, obwohl es sehr umständlich ist, das Auge sehr anstrengt und ermüdet. Da auf gleiche Weise die Befruchtung des *Cirsium canum* mit *C. oleraceum* im vorigen Jahre gelungen ist, wie aus der Blattbildung der jungen Pflanze ersichtlich wird, so habe ich im heurigen Sommer bei allen Befruchtungen zwischen Hieracien dasselbe Verfahren beobachtet.

Die erwähnte *Hieracium*-Hybride ist eine gesunde üppige Pflanze. Anfangs Juli entwickelte sie gleichzeitig mehrere senk-

1) Dritte Generation nach der jetzt üblichen Bezeichnung.

recht gestellte Stengel; Ausläufer fehlten zu dieser Zeit ganz. Als die ersten Köpfchen dem Aufblühen nahe waren, wurde die Pflanze mit dem Ballen ausgehoben, in einen Topf übersetzt und während des Blühens abgesperrt. Erst nach dem Abblühen sämmtlicher Köpfchen erschien ein kurzer dicker steriler Ausläufer, der bald Wurzeln fasste. Später wurde die Pflanze in den Grund zurückgebracht, und hier begann sie gegen Ende September zum zweiten Male zu blühen, die Stengel blieben jedoch viel niedriger und schwächer. Bald darauf entwickelten sich ein kriechender steriler und 5 aufstrebende Köpfchen tragende Stolonen.

Die von FR. SCHULTZ aus künstlicher Befruchtung erhaltenen Hybriden *H. Pilosella* + *H. Auricula* und *H. Pilosella* + *H. praealtum*[1]) wurden als unfruchtbar angegeben. Die Hybride *H. praealtum* + *H. stoloniflorum* dürfte desshalb einige Beachtung verdienen, weil sie eine Anzahl guter Früchtchen lieferte. In 14 Köpfchen wurden zusammen 1044 Blüthen gezählt; davon brachten 624 anscheinend gute Früchtchen, der grössere Theil war jedoch nicht keimfähig, da nur 156 Pflanzen daraus hervorgingen (etwa 15%).[2]) Diese sind nun schon im Grunde gut eingewurzelt und gelangen jedenfalls im kommenden Jahre zur Blüthe. Ob dieselben die Merkmale der Hybridform beibehalten, oder ob sie variiren werden, das wird die nächstjährige Beobachtung zeigen.

Ich will hier noch einige Andeutungen über jene Merkmale der Hybride beisetzen, welche an den getrockneten Theilen schwieriger zu bestimmen sind.

Die Blätter sind ebenso bekleidet, wie jene des *H. stoloniflorum*, doch sind die Borsten, vorzüglich an der unteren Fläche, weit weniger zahlreich, der sternförmige Flaum ist weniger dicht. Der Stengel ist sternflaumig mit wenigen grauweissen Borsten und einzelnen Drüsenhaaren (bei *H. praealtum* sind die Borsten an der Basis braun, die Drüsenhaare fehlen). Hüllschuppen, sowie Blüthenstielchen sind dicht mit Stern- und Drüsenhaaren bedeckt (Borsten

1) F. SCHULTZ Bip. (Archives de la Flore de France et de l'Allemagne) führte (nach FOCKE S. 215) seine Bastardierungen ohne Kastration mit dem Pinsel aus.

2) Später stellte sich vollständige Fruchtbarkeit heraus (S. 223). Im Gegensatz zu dem gewöhnlichen Verhalten ist bei diesem *Hieracium*-Bastard die direkte vegetative Vermehrung, die bei beiden Elternsippen sehr stark ist, sehr vermindert, die apogame oder parthenogenetische dagegen ungeschwächt geblieben. Vergl. d. Monographie von NÄGELI und PETER p. 674.

fehlen, wie bei *H. praealtum*). Die Hülle der abgeblühten Köpfchen ist nach unten hin nur wenig ausgebreitet bauchig; die Randblüthen sind einfarbig. Die Zahl der Blüthen beträgt in einem Köpfchen (nach 14 verschiedenen Zählungen) im Durchschnitte bei *praealtum* 39, *stoloniflorum* 145 und bei der Hybride 75. Letztere Zahl stellt demnach nicht die Mittelzahl vor, welche 92 sein müsste, sie ist jedoch fast genau die mittlere Proportionale zu den beiden anderen; denn es ist nahezu $75^2 = 39 \cdot 145$.[1])

Die Pflanze wird übrigens im nächsten Jahre weiter beobachtet werden. Auch hoffe ich aus den diesjährigen Befruchtungen, welche zwischen *H. Pilosella, stoloniflorum, Auricula, praealtum* und *aurantiacum* einerseits, dann zwischen *H. murorum, vulgatum, rigidum, boreale* und *umbellatum* anderseits vorgenommen wurden, neue Bastarde für fernere Untersuchungen zu erhalten.

Andere für Versuche wichtige Arten fehlen mir leider. Die Samen der befruchteten Piloselloiden wurden bald nach der Reife angebaut und die Pflanzen im Garten ausgesetzt, wo sie schon ziemlich kräftig entwickelt sind. Nach dem Aussehen der Blattrosette dürfte die Verbindung des *H. praealtum* (var. *Bauhini*) mit *H. aurantiacum* schon jetzt als gelungen zu bezeichnen sein. Der Anbau der Archieracien erfolgt im nächsten Frühjahre, sie blühen in 5—6 Monaten nach der Aussaat.

Unter die Versuchspflanzen wurde auch jene Art mit blassbraunen Samen aufgenommen, von der ich im Frühjahr ein abgeblühtes Exemplar eingesendet habe.[2]) Die Pflanze wächst im Punkwa-Thale in den Ausläufern des böhmisch-mährischen Gebirges auf Kalkunterlage und ist dort in Holzschlägen neben *H. murorum, H. vulgatum* und *H. boreale* nicht selten. Im August habe ich sie im Verblühen gefunden. Auf magerem trocknem Boden erscheint sie sehr kümmerlich entwickelt, die seitenständigen Aestchen sind wenig oder gar nicht ausgebildet; auf humusreichen Orten hingegen ist sie kaum zu erkennen. Ich lege das üppigste Exemplar, das ich gefunden habe, bei. Die aus Samen im Garten gezogenen Pflanzen variirten nicht, wurden jedoch noch viel stärker und grösser, obwohl sie wie auch die übrigen Hieracien in sandigem ungedüngtem Lehmboden wachsen.

---

1) $72^2 = 5184$, $39 \cdot 145 = 5655$. $\sqrt{5655} = 75{,}2$. — Es scheint mir hier nur ein zufälliges Übereinstimmen vorzuliegen.

2) *Hieracium barbatum* TAUSCH nach der Anm. 2 auf S. 207.

Ein *Hieracium* (doch wohl *praealtum*), dessen Früchtchen eine lichtere Färbung besitzen, als dies bei den mir bekannten Varietäten von *H. praealtum* der Fall ist, ist ebenfalls beigelegt. Ich sammelte die Pflanze in der Umgebung des Tscheitscher Sees, wo sie in Menge wächst. — Ferner fand ich in der Nähe von Brünn auf einem sonnigen Abhange zwischen niedrigem Gebüsche in Gesellschaft des *H. praealtum* und *H. Pilosella* gabelspaltige Formen, welche wohl hybriden Ursprunges sind. Ich lege auch einige davon bei. Das *H. praealtum* scheint dem *H. cymigerum* Rchb. sehr nahe zu stehen. Das gemästete Exemplar davon wurde an einer etwas feuchteren Stelle gesammelt, das andere auf trockenem steinigem Grunde.

Von der Hybride *Cirsium praemorsum* + *canum* (aus vorigjähriger Befruchtung[1])) wurden nur zwei Pflanzen erhalten, welche schon im heurigen Sommer zur Blüthe gelangten. Von beiden Pflanzen, die mit I und II bezeichnet sind, sende ich getrocknete Blüthenzweigchen und Blätter. Die wurzelständigen tief fiederspaltigen Blätter der Pflanze II wurden von Schnecken völlig zerstört, die beiliegenden Blätter dieser Pflanze waren in verschiedener Höhe stengelständig. Ich erwähne noch, dass beide sehr üppig entwickelt waren; vorzüglich gilt das von der Pflanze I. (Höhe 6 Fuss, Umfang des Stengels am Boden $6\frac{1}{2}$ Zoll). Die unteren Stengelblätter waren nur wenig herablaufend, die oberen gar nicht. Zahlreiche Zweige entwickeln sich fast vom Grunde des Stengels an. Die anfänglich ganz weissen Corollen nehmen bald eine gelblichweisse und beim Verblühen eine strohgelbe Färbung an, während sich die Griffel allmählig röthen und zuletzt lebhaft karmoisinroth gefärbt erscheinen. Bei Pflanze I. waren die untere Hälfte des Stengels so wie die Rippen der wurzelständigen und zum Theile auch der stengelständigen Blätter dunkelroth gefärbt, bei Pflanze II. fehlte diese Färbung. Pflanze I. blühte anfangs Juli, Pflanze II. einen vollen Monat später. Pflanze I. ist von mittelmässiger Fruchtbarkeit, Pflanze II. fast steril. Die Wurzeln können ohne Nachtheil für die Pflanzen erst im kommenden Frühjahre untersucht werden. Die auffallenden Unterschiede in der Blattbildung und Blüthenstellung sind aus den getrockneten Theilen ersichtlich. Von jeder der beiden Stammpflanzen sind aus der

1) Vergl. S. 208.

diesjährigen Frühlingsaussaat etwa 50 Abkömmlinge vorhanden. Ihre Entwicklung im nächsten Sommer wird zeigen, ob und welche Varianten aus der Selbstbefruchtung beider hervorgehen können, und in welcher Beziehung die Unterschiede zwischen den beiden Bastardpflanzen zu denselben stehen.

Die Befruchtung des *C. praemorsum* mit *C. canum* wurde wiederholt, um mehrere Hybriden zum weiteren Vergleiche zu erhalten.

Geum urbanum + *G. rivale* (aus vorigjähriger Befruchtung) stimmt mit *G. intermedium* Ehrh. überein. Die Varietäten mit rotgelben Blumen und jene mit um die Hälfte kleineren Blüthen kamen unter meinen Hybriden nicht vor. Nicht alle davon besassen eine gleiche Fruchtbarkeit, doch war keine Pflanze ganz steril.[1]) Für weitere Versuche wurden befruchtet

G. urbanum mit der Hybride
G. rivale „ der Hybride
Die Hybride „ *G. urbanum*
Die Hybride „ *G. rivale.*

Die aus diesen Befruchtungen, sowie die aus der Selbstbefruchtung der Hybride stammenden Pflanzen wurden anfangs August im Garten ausgesetzt.

Die Hybride *Linaria vulgaris* + *L. striata* kam schon im ersten Jahre zur Blüthe. Letztere Pflanze erhielt ich unter der Benennung *„Linaria purpurea (Antirrhinum striatum)"*; sie ist wohl nichts anderes, als *Linaria striata DC.* Die Hybride steht in Bezug auf Blatt- und Blüthenstellung, Grösse und Gestalt der Blüthen in der Mitte zwischen den beiden Stammarten; die Früchte hingegen stimmen mit denen von *L. striata* überein, die aufgeblasen runzlige Kapselform der *L. vulgaris* ist bei denselben nicht angedeutet. Eigenthümlich ist die Blüthenfarbe und Samengestalt. Die bläulich-violette Streifung namentlich an der Oberlippe, gehört der *L. striata*[2]) an, der orangefarbene Gaumenfleck der *L. vulgaris;*

---

1) GÄRTNER gab das Vorkommen steriler Individuen dieses Bastardes an (l. c. S. 395).

2) *Linaria striata* ist in der Blütenfarbe variabel; KOCH (Synopsis, Bd. II. p. 601; Ed. II) sagt: Corolla cinerascenti-alba vel caerulescens, violaceo striata in palato reticulata; color in planta culta variat. Das zur Bestäubung verwandte Exemplar MENDELS war offenbar nicht rein. Der Bastard ist auch von GODRON gemacht worden; seine Exemplare waren vollständig einförmig, er experimentierte gewiß mit einer reinen *striata*-Sippe.

die Grundfarbe der Blüthen war bei 33 unter 55 Pflanzen blassgelb, bei 21 blassviolett, und eine brachte beiderlei Färbungen, jedoch getrennt auf verschiedenen Stengeln. Von letzterer Pflanze sende ich beiderlei Blüthen, in Sand getrocknet[1]), ebenso von *L. striata* und *Geum urbanum* + *G. rivale*. Beim Trocknen zwischen Papieren wird so manches unkenntlich.

Die Samen der *L. vulgaris* sind bekanntlich flach linsenförmig, an der Oberfläche rauh, mit einem kreisrunden breiten Flügelrande versehen; die der *L. striata* eiförmig, scharf dreikantig, an den Flächen runzlig und punctirt, flügellos. Die Samen der Hybride zeigen nicht unbedeutende Abweichungen. Während einzelne jenen der *L. striata* sehr ähnlich sehen, entschieden dreikantig sind und keinen Flügelansatz haben, erscheint bei der Mehrzahl die Zwischenbildung dadurch vermittelt, dass eine von den drei Samenflächen erweitert ist, während die gegenüberliegende Kante abgestumpft oder nur angedeutet wird, ja bei einzelnen Samen ganz verschwindet. In letzterem Falle erhält der Same eine plan-convexe oder concav-convexe Gestalt und ist mit einem ganz schmalen Flügelrande versehen. Runzeln und Puncte sind immer vorhanden, jedoch weniger dicht, als bei *L. striata*. — Wechselseitige Befruchtungen wurden in der selben Weise wie bei der *Geum*-Hybride vorgenommen.

Linaria vulgaris lässt sich durch den Pollen anderer *Linaria*-Arten ziemlich leicht befruchten, unter 5 Proben sind im heurigen Sommer 4 gelungen. Darunter befindet sich auch die Verbindung mit der schönen *L. genistifolia*, welcher Bastard um Brünn als wildwachsend angegeben wird. Mit *L. triphylla* liess sich *L. vulgaris* nicht befruchten.

Ich erlaube mir noch zum Schlusse eine Beobachtung mitzutheilen, welche ich im heurigen Sommer an einer *Verbascum*-Hybride gemacht habe. Im Jahre 864 hatte ich Befruchtungen zwischen mehreren *Verbascum*-Arten vorgenommen. Die im Garten gezogenen Hybriden waren total steril, auch nicht ein Körnchen Samen wurde erhalten. Der Zufall wollte es, dass eine Pflanze von *Verbascum phoeniceum* + *V. Blattaria* in der Samenschüssel vergessen wurde und sammt dieser den Sommer über in einem Winkel

1) Ich kann diese Methode nach eigenen, schon Mitte der 90er Jahre angestellten Versuchen nur empfehlen, vor allem für derbere Objekte, z. B. Blätter der Sarraceniales etc.

des Gartens ohne alle Pflege stehen blieb. Im Herbste wurde die sehr kümmerliche Pflanze aufgefunden und zu ihren üppig entwickelten Geschwistern in den Grund gesetzt. Obwohl sie hier im künftigen Jahre recht kräftig wurde, kam sie doch nicht zur Blüthe und überwinterte zum zweiten Male, während ihre Geschwister als zweijährige Pflanzen nach der Blüthe abstarben. Im heurigen Sommer brachte sie das Versäumte wieder ein, denn sie stand von Juni bis September ohne Unterbrechung in Blüthe und erzeugte auch über 100 gut ausgebildete Samen. Sie dürfte sogar zum dritten Male überwintern, da sie nach der Blüthe eine vollständige Blattrosette entwickelt hat.[1])

Dem künftigen Sommer sehe ich mit Ungeduld entgegen, da mir zum ersten Male mehrere fruchtbare Hybriden ihre Nachkommen in der Blüthe vorführen werden. Es ist dafür gesorgt, dass sie recht zahlreich erscheinen können, und ich wünsche nur, dass sie die Sehnsucht, mit welcher ich sie erwarte, durch zahlreiche Mittheilungen aus ihrer Lebensgeschichte lohnen mögen.

Mit der grössten Hochachtung zeichnet sich Euer Wohlgeboren

aufrichtiger Verehrer

Brünn am 6. Nov. 867 GREGOR MENDEL

Am 6. Februar 1868 schrieb MENDEL wieder an NÄGELI, um Material von Hieracien zu erhalten.

IV.

Bitte um Überlassung von Material für die Bastadierungsversuche mit Hieracien.

Hochgeehrter Herr!

Nachdem ich in den beiden letzten Jahren über die künstliche Befruchtung der Hieracien einige Erfahrung gesammelt habe, ist es nun meine Absicht, mit diesem genus planmässige Versuche anzustellen, welche sich ausschliesslich auf die Kreuzung der Hauptformen beschränken sollen. Von den Piloselloiden besitze ich zwar die typischen Arten mit geringer Ausnahme, dagegen fehlen mir jene der Archieracien fast ganz. Ich möchte nun gerne das Fehlende durch Ankauf ergänzen, allein woher? das ist die Frage, auf welche mir die Antwort mangelt. In dieser

1) Leider ist keine Nachricht über die Nachkommenschaft vorhanden. Der schon von KÖLREUTER und GÄRTNER erzeugte Bastard ist sonst stets steril, — wie es die Artbastarde der Verbascen fast ausnahmslos sind.

Verlegenheit wage ich es, mich an die Güte Ew. Wohlgeboren zu wenden, um, wie ich vielleicht hoffen darf, den erwünschten Aufschluss zu erhalten.

Die Arten, welche ich zu haben wünsche, sind:
H. cymosum (genuinum), H. alpinum, H. amplexicaule*, H. glanduliferum, H. piliferum, H. villosum*, H. glaucum*, H. porrifolium, H. humile*, H. tridentatum*, H. praenanthoides*, H. albidum*.*[1])

H. glaciale, H. alpicola und *H. staticifolium* wären mir ebenfalls erwünscht.

Es liegt mir viel daran, von den aufgezählten Arten Samen, oder Pflanzen, oder beides zu erhalten. Aus Samen wären wohl noch im kommenden Sommer blühbare Pflanzen zu erwarten.

Indem ich nochmals meine Bitte wiederhole, füge ich gerne das Versprechen bei, im Falle des Gelingens von den Bastarden getrocknete oder lebende Exemplare einsenden zu wollen.

Mit der grössten Hochachtung für Ew. Wohlgeboren

zeichnet sich

GREGOR MENDEL

Brünn 9. Februar 868 (Altbrünn Stift St. Thomas)

Auf diesen Brief antwortete NÄGELI am 28. April 1868. Er legte Hieraciensamen bei, versprach lebende Pflanzen zu schicken und wies auf den Unfall hin, der ihn vor kurzem getroffen[2]), offenbar um die Kürze des Schreibens zu motivieren. MENDEL dankte am 4. Mai 1868.

V.

Dank für die gesandten Samen. — Bericht von der Wahl zum Abte. — Nachricht von einigen neuen Hieracienbastarden.

Hochverehrter Herr!

Empfangen Sie meinen herzlichsten Dank für die glücklich angekommenen Hieracien-Samen. Wie sehr bin ich Ihnen für diese freundliche Zusendung verbunden, und wie hoch muss ich ausserdem noch Ihre Güte schätzen, da Sie auch eine Sendung lebender Pflanzen in Aussicht stellen! Ich werde alle Mühe an-

1) Von den mit * bezeichneten Arten sandte NÄGELI Samen, ferner solchen von *H. elongatum* und *H. gothicum*.

2) Anfang März war ihm kochender Spiritus ins Auge gespritzt; der Arzt hielt beim ersten Besuch das Auge für verloren. Die merkwürdigen subjektiven Gesichtserscheinungen, die er während der ersten Zeit der glücklich verlaufenden Heilung beobachtete, hat er selbst beschrieben. Sitzungsber. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. 1868. I. 4.

wenden, um die zwischen den verschiedenen Species möglichen Hybridformen zu Stande zu bringen, und falls diese fruchtbar sind, sollen auch ihre Nachkommen durch mehrere Generationen beobachtet werden. Um eines muss ich Sie freundlichst bitten, nämlich die Ankaufs- und Transportkosten, sowie anderweitige Expensen auf meine Rechnung setzen zu wollen.

Mit lebhaftem Bedauern habe ich die Nachricht von dem Unfalle vernommen, der Sie hochgeschätzter Herr am 1. März betroffen hat, und freue mich aufrichtig, dass das Unglück nicht von den schlimmsten Folgen begleitet war.

In meinen Verhältnissen ist in der letzten Zeit ganz unvermuthet eine vollständige Aenderung eingetreten, meine Wenigkeit wurde nämlich am 30. März von dem Kapitel des Stiftes, dessen Mitglied ich bin, zum lebenslänglichen Vorstande gewählt. Aus meiner bisherigen ganz bescheidenen Stellung als Lehrer der Experimentalphysik sehe ich mich mit einem Male in eine Sphäre versetzt, in welcher mir so manches fremd erscheint und es wird wohl noch einige Zeit und Mühe kosten, bis ich mich darin heimisch fühlen kann. Das soll mich indessen nicht abhalten, die mir so lieb gewordenen Bastardierungs-Versuche fortzusetzen, ich hoffe sogar, denselben mehr Zeit und Aufmerksamkeit zuwenden zu können, bis ich nur in meine neue Stellung eingearbeitet bin.

In meiner Versuchsplantage haben die Pflanzen im Durchschnitte gut überwintert, auch ist die Entwicklung derselben ziemlich weit vorgeschritten; die meisten Piloselloiden und auch ein Theil der Archieracien zeigen schon ihre Blüthenknospen. Als gelungen sind bis jetzt zu erkennen die Bastarde: *H. Auricula + H. Pilosella*[1]), *H. praealtum (Bauhini) + H. aurantiacum*[2]) und vermuthlich auch *H. Pilosella + H. Auricula.*[3]) Von den Herbst-Sämlingen des vorigjährigen Bastardes *H. praealtum + H. stoloniflorum* (Autor.) haben circa 100 überwintert. Bis jetzt sind diese (allerdings noch kleinen) Pflanzen im Baue und Indumente der Blätter von einander nicht verschieden und stimmen mit der

---

1) *H. Auricula 1. epilosum + H. Pilosella XVII. 4 bruennense = H. auriculiforme* Fries, bei PETER und in der Monographie.

2) *H. magyaricum + aurantiacum = H. calomastix* bei PETER und in der Monographie.

3) Diese schon im ersten Brief genannte Bastardform wird weiterhin nicht mehr erwähnt und kommt auch bei PETER und in der Monographie nicht vor.

Bastard-Mutterpflanze überein. Ihrer weiteren Entwicklung sehe ich mit einiger Spannung entgegen.

Mit der Versicherung der vorzüglichsten Hochschätzung zeichnet sich

Ihr ergebenster Freund
GREGOR MENDEL
Abt und Prälat des Stiftes
St. Thomas

Brünn am 4. Mai 868

Am 11. Mai sandte NÄGELI lebende Hieracien (*H. flagellare Rchb.*, *acutifolium*, *auriculaeforme*, *stoloniflorum WK*, *neglectum*, *fuscum*, *aurantiacum bicolor*, *pratense*, *cymosum*, *alpinum*, *hispidum*, *ochroleucum*, *albidum*, *prenanthoides*, *gothicum*, *Sendtneri*, *laevigatum*, *pulmonarioides* und *Jacquini*) und versprach im Sommer noch mehr zu schicken. Dem Brief waren auch zwei Schemata beigelegt, die die Übergangsformen und Bastarde enthielten, die NÄGELI damals bei Piloselloiden und Archieracien bekannt waren. Um die praktische Anordnung zu zeigen, gebe ich das kleinere, die Piloselloiden betreffende Schema wieder, das sich von selbst erklärt; die Bedeutung der Zeichen (! = Bastarde, ○ = nicht hybride Übergänge??) ist nicht notiert.[1])

Pilosella											
	flagellare (stoloniflorum Aut.)										
		acutifolium (sphaerocephalum)									
			auriculaeforme								
		!	!	stoloniflorum *WK* (versicolor Fr.)							
!		!		!	Auricula						
!				!	○	neglectum (Auricula-glaciale)					
!	○		!	!	!	!	pratense				
!	!	!	!	!	!	!	!	aurantiacum			
!		!					!	○	fuscum		
!		!			!		!	!		cymosum	
!			!		!	!	!	!	!	!	praealtum

1) Wie mir Herr H. ZAHN, einer unserer besten Hieracienkenner, freundlichst mitteilt, ist meine Deutung der Zeichen sicher richtig.

Diese Anordnung ist kompendiöser als die von mir verwendete[1]), erlaubt aber nicht, die beiden Verbindungen $A + B$ und $B + A$ zu unterscheiden.

Die Anrede lautet von nun ab: Hochgeehrter Herr und Freund.

MENDEL schrieb darauf am 12. Juni 1868.

VI.

Mißgeschick mit den übersandten lebenden Pflanzen. — Weiterer Bericht über *Hieracium praealtum* + *H. stoloniflorum (H. florentinum subcymigerum* + *H. flagellare)*, sowie einige weitere Hieracienbastarde.

Hochverehrter Freund!

Verzeihen Sie, dass ich so spät dazu komme, meinen herzlichen und aufrichtigen Dank für die zugesendeten *Hieracium*-Arten abzustatten. Ich erhielt das Kistchen am 12. Mai, an demselben Tage, an welchem ich eine längere Inspectionsreise antreten musste, und fand damals nicht mehr die nötige Zeit um meinen Dank schriftlich aussprechen zu können. Der Gärtner erhielt die Weisung, die Pflanzen mit aller Vorsicht zu behandeln, von jeder Species ein Exemplar in einen Topf und die übrigen in den Grund zu setzen. Als ich vor einigen Tagen zurückkehrte, fand ich zu meinem nicht geringen Bedauern dass die Hälfte der Topfpflanzen abgestorben war, vermuthlich in Folge übermässigen Begiessens. Die im Grunde stehenden Pflanzen blieben mit einiger Ausnahme gut erhalten, müssen jedoch erst sortirt werden, da es der Gärtner unterlassen hat, die Namen beizusetzen. Zu den verunglückten Topfpflanzen gehören die Piloselloiden, mit alleiniger Ausnahme von *H. flagellare*, *H. auriculaeforme* und *aurantiacum*, ferner noch *H. pulmonarioides* und *H. albidum*. Ich hoffe indessen, dass keine Species ganz verloren ist.

Von den mir gütigst zugesendeten Samen haben gekeimt die von *H. amplexicaule, H. elongatum, H. alpinum, H, gothicum, H. tridentatum, H. praenanthoides.* Nicht gekeimt haben die von *H. villosum, H. albidum,* und *H. glaucum.*

Von dem im vorigen Jahre gezogenen Bastarde *H. praealtum* + *H. flagellare* ist nun die erste Generation[2]), aus 112 Pflanzen bestehend, zur Blüthe gelangt. Soweit ich es zu beurtheilen vermag, stimmen sämmtliche Pflanzen in den wesentlichen Merk-

1) Bastarde zwischen Maisrassen. Bibl. Botan. Heft 53, p. 51 (1901).

2) Die zweite nach heutigem Gebrauch.

malen überein, auch weichen sie von der gleichfalls blühenden Bastard-Mutterpflanze nur in sofern ab, als ihre Stengel etwas schwächer, niedriger und etwas weniger verzweigt sind, was der älteren und kräftigeren Mutterpflanze gegenüber nicht auffallen kann. Die Fruchtbarkeit ist, soweit es sich bis jetzt übersehen lässt, bei allen eine vollständige. Das weniger günstige Resultat, welches in dieser Hinsicht die Bastard-Mutterpflanze im vorigen Jahre zeigte[1]), dürfte darin seinen Grund finden, dass dieselbe während des Aufblühens aus dem Boden gehoben und in einen Topf übersetzt wurde, was eine Verletzung der Wurzeln und Schwächung der Pflanze während der Samenbildung zur Folge haben musste.

Aus der vorigjährigen Befruchtung sind 5 weitere Piloselloiden-Bastarde hervorgegangen:

1. *H. praealtum (Bauhini)* + *H. aurantiacum.*[2]) Dieser Bastard steht so ziemlich in der Mitte zwischen den beiden Stammarten. Die Strahlenblüthen sind an der oberen Seite-orangefarbig, an der unteren purpurroth gestreift, die übrigen Blüthen goldgelb bis hellgelb; die Griffel sind gelb, die Narben rostbraun. Wurde vor dem Aufblühen übersetzt, und ist, vielleicht deshalb, wenig fruchtbar. Aus derselben Befruchtung erhielt ich noch eine andere abweichende Form, von der erst zwei Köpfchen geöffnet sind. In der Blatt- und Stolonenbildung besitzt sie eine weit grössere Aehnlichkeit mit H. praealtum, auch sind die Narben gelb; der Stengel hingegen ist borstig und die Blüthen zeigen entschiedene Bastard-Farbe!

2. Ein anderer Bastard: *H. praealtum* (?) + *H. aurantiacum*[3]) ist soeben aufgeblüht. Die eine Stammpflanze scheint eine Mittelform zwischen *H. praealtum* und *H. echioides* zu sein. Der Bastard ist eine Mittelbildung, die Blüthenfarbe wie bei den vorhergehenden, die Narben sind rostbraun.

3. *H. Auricula* + *H. Pilosella*[4]) mit der charakteristischen Gabeltheilung des Stengels steht gleichfalls in Blüthe. Die Köpfchen sind auffallend gross, weit über die Mittelgrösse hinaus,

1) Vergl. S. 213 u. f. und die Anmerkung 2 auf S. 214.

2) *H. magyaricum* + *H. aurantiacum.* Vergl. S. 220 Anm. 2.

3) Später *H. echioides* + *H. aurantiacum* („Hieracienbastarde"), *H. setigerum* + *H. aurantiacum* = *H. monasteriale* bei PETER und in der Monographie.

4) *H. Auricula 1. epilosum* + *H. Pilosella bruennense* = *H. coryphodes* und *H. Mendelii* bei PETER und in der Monographie.

was wohl nur eine Folge der sehr üppigen Entwickelung der Pflanze sein dürfte.

4. 5. *H. praealtum* (*Bauhini*) + *H. Pilosella*[1]), ebenso *H. Auricula* + *H. aurantiacum*[2]) werden erst zur Blüthe gelangen.

Die Pflanzen aus der Frühlingsaussaat sind noch nicht so weit entwickelt, dass sich über den Erfolg der Befruchtung etwas sagen lässt; doch dürfte auch unter diesen einiges gelungen sein. Es sind meist Archieracien.

Im kommenden Frühjahr soll es meine eifrigste Sorge sein, dass sämtliche Bastarde mit den zugehörigen Stammarten in lebenden Exemplaren eingesendet werden.

Ihr höchst freundliches Anerbieten, meine Versuchsflora auch künftighin unterstützen und vermehren zu wollen, muss mich zum innigsten Danke verpflichten und zugleich aneifern, die dargebotenen Mittel auf das beste zu benützen.

Mit der Versicherung der vorzüglichsten Hochachtung zeichnet sich

Ihr ergebenster Freund

GREGOR MENDEL

Brünn am 12. Juni 868

Im September 1868 sandte dann NÄGELI vom Brenner einige lebende Hieracien an MENDEL (*H. albidum* und *H. Hoppeanum*), und am 15. April 1869 dieser die versprochenen Bastarde nach München.

VII.

Begleitschreiben zu einer Sendung lebender Bastarde aus den Gattungen *Hieracium*, *Cirsium*, *Geum* und *Linaria*, nebst Bemerkungen über dieselben und weitere Versuche.

Hochgeehrter Herr und Freund!

Meinem Versprechen gemäss sende ich einige *Hieracium-*, *Cirsium-*, *Geum-* und *Linaria*-Hybriden, die ich aus künstlicher Befruchtung erhalten habe. Das Verzeichnis[3]) derselben liegt bei;

1) *H. magyaricum* + *H. Pilosella bruennense?* Fehlt in MENDELS „Hieraciumbastarden" und bei PETER, sowie in der Monographie.

2) *H. Auricula 1. epilosum* + *H. aurantiacum* = *H. pyrrhanthes*, *H raripilum*, *H. chrysochroum* u. *H. fulvopurpureum* bei PETER und in der Monographie.

3) Dies Verzeichnis ist nicht erhalten geblieben; die kurzen Bezeichnungen, die im folgenden gegeben werden konnten, hat NÄGELI in den Brief geschrieben.

die darin vorkommenden Nummern entsprechen jenen, welche auf den Täfelchen angeschrieben sind, die den Pflanzen beigebunden wurden.

A. Hieracien (N.).

No. 1. war ziemlich fruchtbar; die aus den Samen gezogenen Pflanzen sind bis jetzt im Aussehen von einander nicht verschieden. Diese Hybride, sowie No. 2, 5, 8, 9, stammen vom vorigen Jahre und wurden in Töpfen gezogen. (*H. calomastix* N., *H. magyaricum* + *H. aurantiacum* C.)

No. 2. wurde mit No. 1 aus derselben Befruchtung erhalten, weicht jedoch nicht unbedeutend ab und war ganz unfruchtbar.[1])

No. 3 & 4 sind die beiden Stammarten. (*H. Bauhini* [spaeter *H. magyaricum*], *H. aurantiacum* N.)

No. 5. war sehr reichblühend, brachte jedoch nur 4 keimfähige Samen. (*H. Mendelii* N., *H. Auricula* + *H. Pilosella bruennense* C.)

No. 6 & 7 sind die beiden Stammarten der vorhergehenden Hybride. (*H. Auricula, H. bruennense* N., *H. Pilosella bruennense* C.)

No. 8. war ganz steril. Die beiden Stammarten sind No. 4 und 6. (*H. Auricula* + *H. aurantiacum* C.)

No. 9. war vollkommen fruchtbar. Die noch jungen Nachkommen sind in der Blattbildung nicht verschieden. (*H. monasteriale* N., *H. setigerum* + *H. aurantiacum* C.)

No. 10 ist Stammform der vorhergehenden Hybride. Sie wächst auf der Einfassungsmauer unseres Stiftsgartens; ein anderer Fundort ist mir bis jetzt nicht bekannt. (*H. setigerum* N.) (Die zweite Stammart ist No. 4.)

No. 11. War im Topfe gezogen nur theilweise, im Grunde jedoch vollkommen fruchtbar. (*H. inops* N., *H. florentinum subcymigerum* + *H. flagellare* C.)

No. 12 und 13 sind die beiden Stammarten. (*H. praealtum, H. flagellare* N.)

No. 14. Alle Sämlinge des vorigen Jahres (es waren 112) stimmten mit der Hybriden-Mutter-Pflanze No. 11 überein. Sie waren sämmtlich fruchtbar. (*H. inops* N., *H. flagellare* + (*florentinum*) *subcymigerum* C.)

---

1) Ist offenbar in München bei dem Kulturversuch zugrunde gegangen.

B. Cirsia (N.).

No. 15. Ist eine starke schöne Pflanze von mittlerer Fruchtbarkeit. Nebst dieser Hybride wurde aus derselben Befruchtung noch eine andere abweichende Form erhalten, die unfruchtbar war und im verflossenen Sommer einging.[1])

No. 16 und 17. sind die beiden Stammformen.[1])

No. 18. Uiber die sehr interessanten Abkömmlinge der Hybride No. 15[1]) habe ich in meinem letzten Schreiben Bericht erstattet.[2]) Mit Bedauern muss ich heute melden, dass ich nicht mehr als 4 Stück zu senden im Stande bin, da die übrigen, obwohl sie den ganzen Sommer hindurch sehr kräftig aussahen und reichlich blüthen, gegen alle Erwartung im Winter abgestorben sind. Ich bedaure das um so mehr, als ich auf ihre längere Lebensdauer rechnend es versäumt habe, Zweigchen davon für das Herbar zu trocknen. Der Schaden wird sich hoffentlich ersetzen lassen, da die Mutter-Pflanze gesund und kräftig ist. Bei der grossen Lebenszähigkeit der mehrjährigen Cirsien muss es auffallen, dass mehr als $^2/_3$ der starken und üppigen Pflanzen nach dem ersten Blühen verloren gingen. War denselben vielleicht ihrer Organisation nach nur eine zweijährige Lebensdauer zugemessen? oder würden sie unter anderen mehr zusagenden Verhältnissen noch länger lebensfähig geblieben sein?

No. 19. Ist eine sehr schöne Pflanze von mittlerer Fruchtbarkeit. Die noch jungen Sämlinge lassen ihrer Blattbildung nach eine nicht minder grosse Formenverschiedenheit erwarten, als es bei No. 18 der Fall ist. Merkwürdigerweise zeigen die Hybriden von *Hieracium* und *Cirsium* bei der Bildung ihrer Nachkommenschaft ein sehr ungleiches Verhalten. *Cirsium* wäre für das Studium der variablen Bastarde eine sehr gute Versuchspflanze, wenn sie weniger Raum in Anspruch nehmen würde.[3])

No. 17 u. 20 sind die beiden Stammarten der vorhergehenden Hybride.[3])

C. Geum (N.) *urbanum* + *rivale* (C.).

No. 21. Mehrere Hybriden aus derselben Befruchtung waren in der Blüthengrösse etwas verschieden und von ungleicher Fruchtbarkeit.

---

1) Unzweifelhaft *C. praemorsum (oleraceum + rivulare) + C. canum.*

2) Gemeint ist Brief III, S. 215.

3) *C. canum + C. oleraceum* oder + *C. palustre?*

No. 22 u. 23 sind die beiden Stammformen.

No. 24. 25. 26 werden im heurigen Frühjahre zum ersten Male blühen, N. 27 u. 28 brachten schon im vorigen Jahre einige unvollkommene Blumen. Nach GÄRTNER variiren die Nachkommen dieser *Geum*-Hybride nicht.

D. Linaria (N.).

No. 29. Aus gleicher Befruchtung wurden der Blumenfarbe noch zweierlei Hybriden erhalten. 33 Hybriden hatten eine mehr gelbliche, 21 eine mehr violette Färbung und eine Pflanze brachte beiderlei Farben. Die Fruchtbarkeit ist gering, die Nachkommen variiren.[1])

No. 31. Eine schöne und kräftige Hybride von ebenfalls geringer Fruchtbarkeit.[2])

Von dem interessanten Bastarde *Mirabilis Jalappa* + *M. longiflora* besitze ich nur ein Exemplar. Von den wenigen Samen, welche derselbe im vorigen Sommer brachte, wurden einige Pflanzen erhalten, die jedoch noch zu zart sind, um den Transport vertragen zu können.[3]) Dasselbe gilt von den aus vorigjähriger Befruchtung hervorgegangenen Hybriden (die als solche schon erkennbar sind):

H. cymosum + *H. Pilosella*[4])
H. Auricula + *H. pratense*[5])
(H. praealtum + *H. aurantiacum)* + *H. aurantiacum*[6])
(H. praealtum + *H. aurantiacum)* + *H. praealtum*[6])
(H. Auricula + *H. Pilosella)* + *H. Auricula*[6])
Antirrhinum vulgare + *A. rupestre*[7])
Lychnis diurna + *L. vespertina.*[8])

1) *Linaria vulgaris* + *L. striata.* Vergl. S. 216 u. f.

2) *Linaria vulgaris* + *L. genistaefolia?*

3) Die ersten und besten Beobachtungen hierüber verdanken wir KÖLREUTER. Ich selbst studiere den Bastard seit Jahren und habe in der II. Generation noch keine zwei gleichen Individuen gefunden. Vergl. auch S. 236, Anm. 4.

4) Fehlt bei MENDEL, „Hieracienbastarde"; *H. cymigerum* + *H. (Pilosella) bruennense* = *H. canum* und *H. virenticanum* bei PETER und in der Monographie.

5) Fehlt bei PETER und in der Monographie.

6) Auch diese 3 Rückkreuzungen fehlen bei PETER und in der Monogr

7) Es ist nicht klar, was mit diesem Bastard gemeint ist. Ein *A. vulgare* gibt es nicht; vielleicht handelt es sich um *A. majus* + *A. (glut rupestre* Boiss. et Reut.

8) Bekanntlich gleich *Melandrium rubrum* + *M. alb*

Es ist mir noch nicht geglückt, Bastarde von Archieracien zu gewinnen, will jedoch hoffen, dass die heurige Aussaat ein entsprechendes Resultat liefern werde. Von den mir gütigst zugesendeten Species konnten im vorigen Jahre nur benützt werden: *H. humile, H. Sendtneri, H. picroides, H. prenanthoides, H. hispidum* und *H. canescens.* Da diese, sowie auch die übrigen Arten gut überwintert haben, wird es mir möglich werden, den Versuchen eine grössere Ausdehnung zu geben, und soll das genau nach dem Plane[1]) geschehen, den Sie, verehrter Freund, mir zu übersenden so gefällig waren.

Wir erfreuen uns hier seit Wochen der herrlichsten Frühlings-Witterung. Die Vegetation ist, mit dem mehrjährigen Durchschnitte verglichen, um 13 Tage voraus, die Belaubung eine fast allgemeine.

Indem ich gerne die Gelegenheit benütze, um Ihnen, hochgeschätzter Freund, meine vorzüglichste Hochachtung und Verehrung auszusprechen und mich Ihrem ferneren Wohlwollen zu empfehlen, zeichne ich mich als

Ihren

stets ergebenen

GREGOR MENDEL

Brünn 15. April 869

Am 18. April antwortete NÄGELI; er hob die große Wichtigkeit von MENDELS Hieracienbastarden hervor und versprach lebende Arten, vor allem aus den Alpen, zu schicken.

Am 9. Juni 1869 trug MENDEL in der Sitzung des naturf. Vereines in Brünn über seine Hieracienbastarde vor. Der betreffende Band ist aber 1870 und nicht 1869 datiert.[2])

Der nächste Brief war — wenn kein Brief MENDELS verloren ging — wieder einer NÄGELIS vom 27. April 1870, der eine Sendung lebender Hieracien begleitete (*H. Pilosella incanum*[3]), *H. Pilosella niveum*[4]), *H. Pilosella vulgare, H. praealtum, H. glaucum*), die drei letzten aus Münchens Umgebung. MENDEL antwortete am 3. Juli desselben Jahres, indem er gleichzeitig einige Hieracienbastarde übersandte.

---

1) Vergl. S. 221.

2) Wie bei der Ausgabe des Vortrags in Ostwalds Klassikern angegeben ist.

3) Später, wegen des *H. incanum* M.B., *H. velutinum* Heg. u. Heer genannt, s. S. 243.

4) Das spätere *H. tardans* NÄG. u. PETER.

VIII.

Augenleiden infolge der Kastrationsarbeiten bei *Hieracium*. — Bemerkungen zu den gleichzeitig übersandten Hieracienbastarden. Ungleiche Eignung der verschiedenen Piloselloiden-Arten zur Bastardbildung; Reihe von dem unbrauchbaren *H. aurantiacum* bis zu den vollkommen verläßlichen *H. Auricula* und *H. cymigerum*. Das Art-Material zu diesen Versuchen. — Die Vielförmigkeit der Hieracienbastarde in der I. Generation und Beispiele dazu. Möglichkeit spontaner Bastardierung; ein Tripelbastard. — Fast vergebliches Mühen mit Archieracien. — Wie viel Pollenkörner sind bei *Mirabilis* zur Befruchtung nötig? — Bastarde von *Matthiola*, *Zea* und *Mirabilis*, die sich wie die Erbsenbastarde verhalten. — *Lychnis vespertina* + *L. diurna*. — Schwierigkeiten bei *Matthiola*.

Hochgeehrter Freund!

Zürnen Sie nicht, dass ich so spät meinen Dank für die zugesendeten lebenden Hieracien ausspreche, welche sämmtlich gesund angekommen sind und vortrefflich gedeihen. Bauten in den auswärtigen Maierhöfen und andere ökonomische Angelegenheiten haben mich wochenlang ausschliesslich in Anspruch genommen, und als ich zu Pfingsten nach Brünn zurückkam, fanden sich auch hier dringende und zeitraubende Arbeiten vor. Erst seit wenigen Tagen bin ich Herr meiner Zeit und im Stande, meine Lieblingsbeschäftigung wieder aufzunehmen, die ich in Folge eines Augenleidens gegen Ende Juni des vorigen Jahres abbrechen musste.

Ich befand mich in ernstlicher Gefahr, die Bastardirungsversuche ganz aufgeben zu müssen, und zwar durch eigene Unvorsichtigkeit. Da mir nämlich für die Arbeit an den kleinen Hieracienblüthen das zerstreute Tageslicht nicht ganz ausreichte, nahm ich einen Beleuchtungsapparat (Spiegel mit Sammellinse) zu Hilfe, ohne zu ahnen, welches Unglück ich damit hätte anstellen können. Nachdem ich mich im Mai und Juni viel mit *H. Auricula* und *praealtum* beschäftigt hatte, stellte sich eine eigenthümliche Ermüdung und Abspannung in den Augen ein, welche trotz aller sogleich angewendeten Schonung einen bedenklichen Grad erreichte und mich bis in den Winter hinein für jedwede Anstrengung unfähig machte. Seitdem hat sich glücklicherweise das Uebel fast vollständig verloren, so dass ich wieder anhaltend lesen und auch die Befruchtungsversuche an Hieracien, so gut es eben ohne künstliche Beleuchtung möglich ist, vornehmen kann.

Mit dem heutigen Schreiben sende ich zugleich einige lebende *Hieracium*-Bastarde, denen auch, wo es nothwendig ist, die Stammformen beiliegen.

Das bisherige Ergebnis der Versuche ist noch gering zu nennen und zu mangelhaft, als dass sich daraus schon endgiltige Folgerungen ziehen liessen. Einige Erfahrungen sind indessen doch schon gewonnen und ich erlaube mir dasjenige davon kurz anzuführen, was mir von einiger Wichtigkeit zu sein scheint.

Zuvörderst will ich erwähnen, dass es mir bei einigen Piloselloidformen, trotz vielfacher Versuche noch nicht gelungen ist, durch Bestäubung mit fremdem Pollen auch nur einen einzigen Bastard zu erhalten. Das gilt z. B. von *H. aurantiacum*. Bei dieser Art war ich bis jetzt nicht im Stande, die Einwirkung des eigenen Pollens aufzuheben. Auch *H. Pilosella* und *H. cymosum* machen Schwierigkeiten. Bei anderen z. B. bei den Varietäten von *H. praealtum* gelingt bei ganz gleicher Behandlung die Befruchtung mit fremdem Pollen schon leichter, und *H. Auricula* ist, wie ich mich nun mehrfach überzeugt habe, bei einiger Vorsicht eine vollkommen verlässliche Versuchspflanze. Ich habe mehr als 100 Köpfchen dieser Art im vorigen Jahre mit dem Pollen von *H. Pilosella, cymosum* und *aurantiacum* befruchtet; etwa die Hälfte davon ist zwar in Folge erlittener Verletzungen eingetrocknet und aus den übrigen wurden nur je 2—6 Samen erhalten, allein die aus denselben erzogenen Pflanzen sind ohne Ausnahme Bastarde. Die noch ganz kleinen Pflänzchen von *H. Auricula* + *H. Pilosella*[1]) und *H. Auricula* + *H. cymosum*[2]) wurden mir leider im Warmhause von Schnecken bis auf einige wenige Exemplare abgeweidet, jene von *H. Auricula* + *H. aurantiacum* blieben jedoch erhalten und es sind davon 98 im Garten ausgesetzt. Sie dürften im nächsten Monate zur Blüthe kommen.

Für Versuche sehr geeignet scheint auch eine andere Form zu sein, die ich indessen mit der Bezeichnung No. XII[3]) der Sendung beischliesse, da ich dieselbe nicht einzureihen und zu benennen weiß.[4]) Ich habe sie in Holzschlägen in großer Anzahl gefunden. Der einzige Befruchtungsversuch, den ich an derselben im vorigen Jahre mit dem Pollen von *H. Pilosella* vorgenommen

---

1) Vergl. S. 220, Anm. 1.

2) Fehlt bei MENDEL, bei PETER und in der Monographie, wo neben wildwachsend gefundenen Pflanzen dieser Kombination (*H. sciadophorum*) nur ein im Münchener Garten spontan entstandener Bastard erwähnt wird.

3) *H. cymigerum?* (N.)

4) Vergl. S. 238 und Anm. 1.

habe, ist vollständig gelungen, da die erhaltenen 29 Pflanzen sämmtlich Bastarde sind.[1])

Ich erlaube mir hier zu bemerken, dass von mir bisher nur eine einzige Form von *H. Pilosella* zu Befruchtungen verwendet wurde. Da ich jedoch nicht ganz sicher bin, ob nicht bei der vorjährigen Sendung eine Verwechslung stattgefunden hat, weil ich später zur Zeit der Blüthe wahrnahm, dass eine andere benachbarte *Pilosella*form in das Gebiet meiner Versuchspflanze eingedrungen war, lege ich dieselbe noch einmal bei und zwar mit der Bezeichnung *H. Pilosella* (Brünn).[2]) Ob diese Form zu *H. echioides* in irgend einer Beziehung stehe, darüber wage ich keine Meinung auszusprechen, will nur erwähnen, dass dieselbe hier häufig vorkommt und der nächste bekannte Standort des *H. echioides* etwa 5 Meilen entfernt ist. Dort wurde im vorigen Jahre auch die von mir unter der Bezeichnung *H. praealtum (?)*[3]) eingesendete Pflanze mit *H. echioides* und *H. praealtum* zugleich wachsend angetroffen und damit wohl ausser Zweifel gestellt, dass die Vermuthung, dieselbe gehöre in die Reihe *H. echioides-praealtum*, richtig war. Ein Vergleich mit den Stammarten zeigt sogar, dass dieselbe dem *H. echioides* näher steht.

Ich würde sehr dankbar sein, wenn Sie verehrter Freund mir gelegentlich einmal Ihre Ansicht über das Hieracium No. XII[4]) mittheilen wollten, da diese Pflanze nächst *H. Auricula* zu den besten Versuchspflanzen gehört, insofern sich davon ziemlich leicht Bastarde in grösserer Anzahl gewinnen lassen. Dieser Umstand ist deshalb von Wichtigkeit, weil es nur bei einer grösseren Anzahl aus gleicher Befruchtung stammender Bastard-Individuen möglich werden kann, die an denselben vorkommenden Abweichungen einer Beurtheilung zu unterziehen.

In der That kamen bis jetzt in allen Fällen Varianten zum Vorscheine, wo aus derselben Befruchtung der Bastard in mehreren Exemplaren erhalten wurde. Die Beobachtung, dass aus der Einwirkung des Pollens der einen Art auf die Ovula einer zweiten von einander abweichende, ja wesentlich verschiedene Formen hervorgehen können, war für mich, ich muss es gestehen, sehr über-

1) Fehlt bei MENDEL, „Hieracienbastarde"; *H. cymigerum* + *H.* (*Pilosella*) *bruennense.*

2) *H. Pilosella* XVII. ssp. 4. *bruennense* der Monographie.

3) *H. setigerum* der Monographie. 4) *H. cymigerum* Rchb.? (N.)

raschend, und das um so mehr, als ich mich durch Anbau-Versuche überzeugt hatte, dass die Stammeltern im Falle der Selbstbefruchtung nur formbeständige Nachkommen liefern. Ich hatte bei *Pisum* und anderen Pflanzengattungen nur immer uniforme Bastarde gesehen und konnte demnach bei *Hieracium* dasselbe erwarten. Ich darf es Ihnen, geehrter Freund, verrathen, wie sehr ich mich in dieser Beziehung täuschen liess. Schon vor zwei Jahren kam bei mir der Bastard *H. Auricula* + *H. aurantiacum* in zwei Exemplaren zur Blüthe. Bei dem einen davon war die Vaterschaft des *H. aurantiacum* auf den ersten Blick herauszufinden; nicht so bei dem anderen. Dasselbe wurde vielmehr, weil es andere Blätter und eine ganz verschiedene durchaus gelbe Blüthenfarbe besass, und es meiner damaligen Meinung nach nur eine Bastardform zwischen den beiden Stammarten geben könne, als zufällige Einschleppung angesehen und bei Seite gestellt. Ich hatte desshalb meiner vorigjährigen Sendung auch nur jenes Exemplar beigelegt, welches in der Blüthenfarbe dem *H. aurantiacum* sehr nahe kommt. Erst als später derselbe Bastard aus der $\overline{868}$ger Befruchtung und der Bastard *H. Auricula* + *H. pratense* (*var.*) beide in drei Exemplaren und ebenso vielen Varianten zur Blüthe kamen, war der richtige Sachverhalt nicht mehr zu verkennen.

Da das eingesendete Exemplar von *H. Auricula* + *H. aurantiacum* und eben so die Stammart *H. Auricula*, wie ich aus Ihrem geschätzten Schreiben ersehe, abgestorben sind, ergänze ich dieselben und lege auch den lange verkannten Bastard-Zwillingsbruder mit der Bezeichnung *H. Auric.* + *H. aurant.* 868b hinzu. Die drei Exemplare vom vorigen Jahre sind mit 869c, d, e bezeichnet. Der Variant c ist vollkommen fruchtbar.

Von dem Bastarde *H. Auricula* + *H. pratense* (*var.*) ist ein Variant über den Winter eingegangen, ebenso die Stammart *H. pratense*. Letztere war nicht genau das typische *H. pratense*, da sie einige Sternhaare auf den Blättern brachte. Die mir durch Ihre Güte zugekommenen zwei Exemplare sind gleich im ersten Jahre im Garten zu Grunde gegangen; das eine verkümmerte ohne geblüht zu haben, das andere während der Blüthe. Die reine Art habe ich in der Umgebung noch nicht aufgefunden.

Der Bastard *H.* No XII (*cymigerum* N.) + *H. Pilosella* (Brünn) hat eben abgeblüht. Unter den vorhandenen 29 Exemplaren

kommen sehr auffallende Abweichungen vor. Sie stellen zwar sämmtlich Uebergangsformen von einer Stammart zu der andern dar, Niemand würde sie jedoch für Geschwister halten, wenn er sie wild wachsend anträfe. Ich werde die ganze Collection einsenden, sobald nur die Ausläufer hinreichend bewurzelt sind, was in wenigen Wochen der Fall sein dürfte. Auch hoffe ich zu jener Zeit schon über den diesjährigen Hauptversuch mit *H. Auricula* + *H. aurantiacum* referiren zu können, von dem ich wegen der grösseren Anzahl der vorhandenen Exemplare einigen Aufschluss erwarten darf.

Das *Hieracium* No. XII (*cymigerum* N.) wurde heuer mit *H. pilosella vulgare* (München) befruchtet und es dürfte im nächsten Jahre der Vergleich der beiden Bastardreihen *H.* No XII + *H. Pilosella* (Brünn) und H. No XII + *H. Pilosella vulgare* (München) nicht ohne Interesse sein. Auch wurde schon *H. Auricula* mit *H. Pilosella vulgare* (M.) und *H. Pilosella* (Br.) verbunden, und mit *H. Pilosella niveum* (M.) soll es nächstens geschehen. Von *H. Pilosella incanum* habe ich erst eine Blüthe gesehen, andere kommen hoffentlich nach.

Von dem Bastarde *H. praealtum* (*Bauhini*?) + *H. aurantiacum*[1]), von dem ich im vorigen Jahre zwei Exemplare eingesendet habe, werden 25 Pflanzen zur Blüthe kommen. Auch bei diesen sind, so viel bis jetzt ersichtlich ist, Unterschiede vorhanden. Von zwei Exemplaren, die in Töpfen gezogen wurden und längst abgeblüht haben, ist das eine vollkommen fruchtbar, das andere fast steril. Ebenso kömmt in der Bastardreihe *H. Auricula* + *H. aurantiacum* gänzliche Sterilität neben vollkommener Fruchtbarkeit vor.

Von den Bastarden *H. praealtum* (?) (*setigerum N.*) + *H. aurantiacum* und *H. praealtum* (*Bauhini*?) + *H. aurantiacum*[1]) ist die zweite Generation zur Blüthe gekommen und ebenso von *H. praealtum* + *H. flagellare* die dritte.[2]) Auch in diesen Generationen variirten die Nachkommen nicht. Ich kann bei dieser Gelegenheit die Bemerkung nicht unterdrücken, wie sehr es auffallen muss, dass die Bastarde von *Hieracium* in Vergleich mit jenen von *Pisum* ein geradezu entgegengesetztes Verhalten beobachten. Wir haben es hier offenbar nur mit einzelnen Erscheinungen zu thun, die der Ausfluss eines höheren allgemeinen Gesetzes sind.

1) *H. magyaricum* + *aurantiacum.*

2) die dritte resp. vierte nach heutigem Gebrauch.

Will man die Nachkommen jener Bastarde, die nur eine theilweise Fruchtbarkeit besitzen, in ihrer Entwicklung verfolgen, so ist es nothwendig, dass die Blüthen sehr sorgfältig vor der Einwirkung fremden Pollens geschützt werden, da durch den Pollen anderer Pflanzen leicht einzelne Ovula befruchtet werden können, welche sonst wegen der grossen Theils schlechten Beschaffenheit des eigenen Pollens unbefruchtet geblieben wären. Ich sende zugleich einige Doppelbastarde, die von *H. praealtum (Bauhini ?)* + *H. aurantiacum* stammen, welche Pflanze ich mitten zwischen *H. Pilosella* (Brünn), jedoch entfernt von anderen Hieracien abblühen liess. Diese Bastarde wären demnach als (*H. praealtum (Bauh.* ?) + *H. aurantiacum*) + *H. Pilosella* (Brünn) zu bezeichnen.[1]) Sie sind in mehrfacher Hinsicht sehr interessante Formen.

Werden an den Blüthen theilweise fruchtbarer Bastarde die Narben mit dem Pollen anderer nicht zu weit abstehender Arten belegt, so bilden sie immer mehr Samen, als wenn sie isolirt gehalten und auf Selbstbefruchtung angewiesen werden; was nur von der Mitwirkung des fremden Pollens herrührt, wie man sich durch den Anbau der Samen leicht überzeugen kann. Bei vollkommen fruchtbaren Bastarden hingegen ist eine ängstliche Absperrung nicht nötig. Versuche mit *H. praealtum* ? + *H. aurantiacum* haben gezeigt, dass man fremden Pollen, auch jenen der beiden Stammarten, in Menge auf die Narben auftragen kann, ohne dass die Selbstbefruchtung dadurch gehindert wird. Die Samen gaben sämtlich die ursprüngliche Bastardform.

Ich lege der Sendung noch den Bastard *H. cymosum* (München) + *H. Pilosella* (Brünn) bei. Es ist der einzige Bastard, den ich bis jetzt von *H. cymosum* erhielt, wiewohl ich diese Art schon vielfach zu befruchten suchte.

Bei den Archieracien ist es sehr schwierig die Selbstbefruchtung aufzuhalten. Bis jetzt wurden nur zwei Bastarde erhalten. Die Mutterpflanze des einen ist jene Art mit lichtbraunen Samen, die ich schon einmal getrocknet eingesendet habe[2]); der Pollen wurde von einem schmalblättrigen *H. umbellatum* genommen. Bastard und Stammpflanzen liegen bei. Ferner ist unter den heurigen Sämlingen als gelungen zu erkennen die Befruchtung

1) Fehlt bei MENDEL, Hieracienbastarde; *H. Pilosella brünnense* + *(aurantiacum* + *magyaricum)* = *H. trigenes* bei PETER und in der Monographie.

2) *H. barbatum* Tausch.

einer Form des *H. vulgatum* ebenfalls mit dem erwähnten *H. umbellatum*. Ich suche vergebens nach einem *Archieracium*, welches ebenso gute Dienste leisten könnte, wie das unter den Piloselloiden bei *H. Auricula* und dem *Hieracium* No XII der Fall ist.

Von den Archieracien, die ich Ihrer besonderen Güte verdanke, sind, bis auf *H. glaucum*, alle dem Versuche unterzogen worden. Es sind folgende: *H. amplexicaule, pulmonarioides, humile, villosum, elongatum, canescens, hispidum, Sendtneri, picroides, albidum, prenanthoides, tridentatum* und *gothicum*. An *H. amplexicaule* und *H. albidum* sind die künstlich befruchteten Köpfchen jedesmal eingetrocknet. *H. alpinum* besitze ich nicht. Aus den mir gütigst mitgetheilten Samen, welche mit Breslau und München signirt waren, wurde *H. nigrescens* und eine andere Art erhalten, welche jedoch nicht *H. alpinum* ist.

Bei dieser Gelegenheit will ich bemerken, dass die Archieracien bei mir sämmtlich gut gedeihen. *H. albidum* ist zwar im Topfe etwas empfindlich, namentlich im Winter, erhält sich jedoch im Grunde gut. Dasselbe gilt von den Piloselloiden, jedoch mit Ausnahme von *H. pratense* und *H. Hoppeanum*, welch letzteres gleich im ersten Winter im Topfe und im Grunde abgestorben ist.

Anderweitige Bastardirungs-Versuche konnte ich im vorigen Jahre wegen meines Augenleidens nicht beginnen. Nur ein Experiment schien mir so wichtig, dass ich mich nicht entschliessen konnte, dasselbe auf eine spätere Zeit zu verschieben. Es betrifft die Ansicht NAUDIN'S[1]) und DARWIN'S[2]), dass zur genügenden Befruchtung eines Ovulum, ein einziges Pollenkorn nicht ausreichend sei. Als Versuchspflanze benützte ich, wie es auch NAUDIN that, *Mirabilis Jalappa;* das Resultat meines Versuches ist jedoch ein völlig anderes. Ich erhielt aus der Befruchtung mit einem einzigen Pollenkorn 18 gut entwickelte Samen und davon ebensoviele Pflanzen, von denen bereits 10 in Blüthe stehen. Die Mehrzahl dieser Pflanzen ist ebenso üppig ausgebildet, als die aus freier Selbstbefruchtung stammenden. Einige wenige Exemplare sind bis jetzt allerdings im Wachsthume etwas zurückgeblieben, allein nach dem Erfolge, den die übrigen aufweisen, kann die

1) CH. NAUDIN, Nouvelles recherches sur l'hybridité dans des végétaux, Nouvelles Archives du Museum, Tom I. p. 35—37.

2) CH. DARWIN, Animals and Plants under Domestication, Vol. II. p. 356 (cit. n. d. II. Ausgabe).

Ursache davon doch nur darin zu suchen sein, dass nicht alle Pollenkörner eine gleiche Befruchtungstüchtigkeit besitzen, und dass ferner bei dem in Rede stehenden Versuche die Mitbewerbung anderer Pollenkörner ausgeschlossen war. Wo mehrere concurriren, da dürfen wir annehmen, dass es immer nur dem kräftigsten gelingen wird, die Befruchtung zu vollziehen.[1])

Ich will übrigens diese Versuche wiederholen; auch dürfte es sich durch ein Experiment direct nachweisen lassen, ob bei *Mirabilis* zwei oder mehrere Pollenkörner an der Befruchtung eines Eichens theilnehmen können. Nach NAUDIN sollen wenigstens drei erforderlich sein!

Von den Versuchen aus früheren Jahren wurden jene mit *Matthiola annua* und *glabra*[2]), *Zea*[3]) und *Mirabilis*[4]) im vorigen

---

1) Die Frage ist inzwischen von mir 1896 bis 1900 eingehend experimentell untersucht worden. (Berichte d. Deutsch. botan. Gesellsch. Band XVIII, S. 422—435. 1900). Ich habe nachgewiesen, daß die Zahl der erzielten Früchte bei Verwendung von 1 Pollenkorn und 2, 3 und vielen Pollenkörnern dem entspricht, was die Wahrscheinlichkeitsrechnung verlangt, wenn bei *Mirabilis Jalapa* auf 1 taugliches Pollenkorn 4 untaugliche und auf 3 taugliche Samenanlagen 1 untaugliche kommen, oder, bei *M. longiflora*, auf 1 taugliches Pollenkorn 3 untaugliche und auf eine taugliche Samenanlage eine untaugliche. Diese Zahlen sind für die männlichen Keimzellen vielleicht zu ungünstig, weil bei der Übertragung einzelne Pollenkörner gelitten haben können; groß ist diese Fehlerquelle gewiß nicht.

Den Größenunterschied der Nachkommen, je nach dem 1 oder viele Pollenkörner zur Verwendung kamen, habe ich exakt durch Wägung sicher gestellt und auf dem auch von MENDEL betretenen Wege, durch den Ausschluß der Konkurrenz bei Verwendung nur eines Pollenkornes, erklärt. Bei mir wie bei MENDEL waren NAUDINS und DARWINS Angaben die Veranlassung zu den Versuchen.

Übrigens hatte schon KÖLREUTER mit einem Pollenkorn sowohl bei *M. Jalapa* als bei *M. longiflora* Befruchtung erzielt (Vorläuf. Nachricht S. 11. (1761)). Ich erwähne das nur, weil es zeigt, das MENDEL KÖLREUTER nicht kannte; er hätte sich sonst gewiß auf ihn bezogen.

2) Hier untersuchte MENDEL offenbar nur das Merkmalspaar: behaart — kahl. Meine 1900 veröffentlichten Versuche (Über Levkoyenbastarde. Zur Kenntnis der Grenzen der MENDELschen Regeln, Bot. Centr. Blatt, Bd. 84, S. 97 u. f.) haben inzwischen zum gleichen Ergebnis geführt; behaart dominirt dabei über glatt. BATESON u. SAUNDERS (I. Report to the Evolut. Committee 1902) fanden z. T. kompliziertere Verhältnisse.

3) Ist inzwischen von mir eingehend untersucht worden (Bastarde zwischen Maisrassen, mit besonderer Berücksichtigung der Xenien. Bibliotheca botanica Heft 53, 1901). Neben typisch mendelnden Eigenschaften fanden sich auch sehr verschiedene, abweichend sich verhaltende. Ich habe die Versuche, wie am genannten Ort in Aussicht gestellt wurde, weitergeführt und werde darüber s. Z. berichten.

4) Auch hier kann MENDEL nur wenige Bastarde untersucht haben. Denn wenn auch die Sippen der *M. Jalapa* untereinander Bastarde bilden, die den

Jahre abgeschlossen. Ihre Bastarde verhalten sich genau so, wie jene von *Pisum*. Was DARWIN in dem Werk über „Das Variiren der Thiere und Pflanzen im Zustande der Domestication" auf fremde Berichte hin über die Bastarde aus den genannten Gattungen aufgenommen hat, ist in mancher Hinsicht richtig zu stellen.

Zwei Versuche werden noch fortgeführt. Von *Lychnis diurna* und *L. vespertina* ist der Bastard in etwa 200 uniformen Exemplaren[1]) vorhanden. Die erste[2]) Generation dürfte im August zur Blüthe kommen.

Der Farbenversuch mit *Matthiola*[3]) dauert nun schon ins 6te Jahr und wird sich vermuthlich noch durch einige Jahre hinausziehen. Nach den bereits erlangten Daten hoffe ich der Sache endlich doch auf den Grund zu kommen. Der Mangel einer verlässlichen Farbenskala war den Versuchen sehr hinderlich. Ich hatte zwar ein Sortiment von *Matthiola annua* in 36 benannten Farben von Erfurt kommen lassen, dasselbe erwies sich jedoch für meine Zwecke als unzureichend. Diesem Versuche habe ich meine ganz besondere Zuneigung geschenkt, und will mir auch erlauben, einiges darüber mitzutheilen, sobald nur die Musterung meiner 1500 Zöglinge aus der heurigen Cultur vorüber ist.[5]) Es soll gleichzeitig mit der Übersendung der Bastardreihe *H.* No XII + *H. Pilosella* geschehen.

Indem ich Ihnen, verehrtester Freund nochmals für die gütige Sendung danke, zeichne ich mich zugleich mit dem Ausdrucke der vorzüglichsten Hochschätzung als

Ihren ganz ergebenen

Brünn am 3. Juli 870 GR MENDEL

MENDELschen Regeln folgen, so sind die Verhältnisse z. Th. ganz außerordentlich kompliziert. Eine erste Mitteilung über *Mirabilis*-Bastarde habe ich 1902 gegeben (Berichte d. Deutsch. Botan. Gesellsch. Bd. XX, S. 594 u. f.), weitere werden folgen.

1) Ähnlich fand DE VRIES (Die Mutationstheorie, Bd. II, S. 153, 1902) diesen viel untersuchten Bastard (= *Melandrium rubrum* + *M. album*), während ich merkliche Schwankungen im Ausmaß des Rotes der Blüten konstatierte (Berichte d. Deutsch. botan. Gesellsch., Bd. XXI, S. 145), und BATESON und SAUNDERS sogar eine volle Übergangsreihe vom Rot der *L. diurna* zum blassesten Rosa beobachteten (I. Report, p. 15, 1902).

2) Die zweite nach der jetzt üblichen Zählweise.

3) Vergleiche hierzu vor allem verschiedene Arbeiten von E. TSCHERMAK: Der gegenwärtige Stand der MENDELschen Lehre und die Arbeiten von W. BATESON, (Zeitschr. f. d. landw. Versuchsw. in Österreich 1902) und die folgenden Publikationen, bis zur jüngsten: Weitere Kreuzungsstudien an Erbsen, Levkoyen u. Bohnen, (ebenda, 1904.)

Am 17. September 1871 schrieb MENDEL nochmals an NÄGELI und sandte gleichzeitig die Bastarde von *H. cymigerum* und *H. Pilosella bruennense*.

IX.

Bericht über *H. Auricula* + *H. aurantiacum* und andere Hieracienbastarde. — Wiederholung des Versuches, *Mirabilis Jalapa* mit einem Pollenkorn zu bestäuben. — Können zwei Pollenkörner gemeinschaftlich an der Befruchtung teilnehmen? — Schwierigkeiten bei *Matthiola annua*. — Verhält sich die Geschlechtsdifferenz wie ein Merkmal der Erbsenrassen? (*Lychnis diurna* + *L. vespertina*.)

Hochgeschätzter Herr und Freund!

Mit diesem Schreiben zugleich sende ich die versprochenen 29 Bastarde von *H.* No. XII *(H. cymigerum)* + *H. Pilosella* (Var. von Brünn). Das mit No. XII bezeichnete (schon eingesendete) *Hieracium* ist für mich noch immer eine räthselhafte Form; sollte es etwa das *H. poliotrichum* Wim.[1]) sein?

Von dem Bastarde *H. Auricula* + *H. aurantiacum* haben 84 Exemplare geblüht, einige sind abgestorben, andere noch nicht zur Blüthe gekommen. Die Abweichungen unter denselben sind sehr beträchtlich. Jedes Bastard-Merkmal erscheint in einer gewissen Anzahl von Varianten, welche Uebergänge von einem Stamm-Merkmale zu dem anderen darstellen. Es scheint, dass die Varianten der verschiedenen Merkmale mit einander in allen möglichen Verbindungen auftreten können. Das letztere wird dadurch wahrscheinlich, dass an den vorhandenen Bastardpflanzen die Anordnung der Merkmal-Varianten eine ausserordentlich mannigfaltige und kaum in zwei Fällen eine völlig gleiche ist. Bei der grossen Anzahl von Differenzen, welche zwischen *H. Auricula* und *H. aurantiacum* vorhanden sind, müssten sich für den Bastard viele Hunderte möglicher Formen ergeben, falls diese Vermuthung richtig wäre. Für so weit abstehende Stammarten ist die Anzahl der beobachteten Bastardformen zu gering, um den wirklichen Sachverhalt herauszufinden. Leichter dürfte es mit dem Bastarde *H. Auricula* + *H. Pilosella vulgare* gelingen, von dem ich im nächsten Jahre bei 200 Pflanzen zu erhalten hoffe. Auch *H. Auricula* + *H. Pilosella niveum* und *H. Auricula* + *H. Pilosella var.* von Brünn werden gut vertreten sein. *H. Pilosella incanum*[2]) ist ganz steril, auch konnte mit dem Pollen desselben *H. Auricula* nicht befruchtet werden.

1) *H. cymigerum* Rchb.? (N.) 2) Vergl. Anm. 3 auf S. 228.

Ich will noch erwähnen, dass von den Bastardformen *H. Auricula* + *H. aurantiacum* etwa der vierte Theil als vollkommen fruchtbar, die Hälfte als theilweise und ein Viertel als ganz unfruchtbar zu bezeichnen ist. Der Grad der Fruchtbarkeit erscheint als unabhängig von der Form des Bastardes.

Sollte es, verehrter Freund, Ihrem Wunsche entsprechen, so würde ich im nächsten Frühjahre die ganze Collection einsenden.

Von den heurigen Archieracien-Sämlingen ist bei der anhaltend kalten und regnerischen Witterung nur ein sehr kleiner Theil zur Blüthe gekommen, von *H. humile,* das ich vorzüglich als Versuchspflanze benützte, bis jetzt kein einziges Exemplar. Auch die Sämlinge des schon zugesendeten Bastardes *H*?[1]) — *H. umbellatum* blühen noch nicht, dürften jedoch, wenn der Herbst günstig wäre, zur Blüthe gelangen. Bis jetzt ist unter denselben kein Unterschied wahrnehmbar. Die fragliche Stammart möchte ich am liebsten bei *H. racemosum*[2]) unterbringen, wenn nur nicht die blassbraune Samenfarbe, die sich bis jetzt als beständig erwiesen hat, vorhanden wäre.

Der Versuch zur Lösung der Frage, ob ein einziges Pollenkorn zur Befruchtung ausreiche, wurde an *Mirabilis Jalappa* wiederholt, mit demselben Erfolge, wie im verflossenen Jahre. Die aus vorigjähriger Befruchtung mit einem einzigen Pollenkorne stammenden Pflanzen sind von den aus Selbstbefruchtung herrührenden in keiner Weise zu unterscheiden.[3]) Anfänglich schien es, als ob einzelne Pflanzen in der Entwicklung zurückbleiben wollten, sie haben jedoch das Versäumte später vollständig nachgeholt.

Um zu erfahren, ob auch zwei Pollenkörner gemeinschaftlich an der Befruchtung Theil nehmen können, ist ein anderer Versuch an *Mirabilis J.* im Gange. Wie ich aus Erfahrung weiss, sind die Varietäten mit karmoisinrother, gelber und weisser Blüthenfarbe aus Samen beständig, und die unmittelbar aus der Kreuzung hervorgegangenen Bastarde *Karmoisin* + *Gelb* und *Karmoisin* + *Weiss* variiren nicht in der ihnen eigenthümlichen Färbung. Beide Befruchtungen gelingen gleich leicht und es scheint ein Unterschied in der sexuellen Verwandtschaft nicht vorhanden zu sein.

---

1) *H. barbatum* (N.).

2) *H. barbatum* TAUSCH und *H. racemosum* W. K. werden als identisch angegeben. Die Hieracienmonographie stockt seit NÄGELIS 1891 erfolgtem Tode.

3) Vergl. S. 235. So urteilte ich auch, ehe ich die Wägungen angestellt hatte.

An der karmoisinrothen Varietät wurde eine grössere Anzahl von Befruchtungen in der Weise vorgenommen, dass die Narben gleichzeitig mit zwei Pollenkörnern belegt wurden, und zwar mit einem von der gelben und einem von der weissen Varietät. Da die Blumenfarben von *Karmoisin* + *Gelb* und *Karmoisin* + *Weiss* bekannt sind, muss es sich im nächsten Jahre zeigen, ob nebst den beiden Bastardfarben noch eine dritte Färbung erscheint, welche aus dem Zusammenwirken der beiden Pollenkörner erklärbar wäre.[1])

Im letzteren Falle müsste auch die Entwicklung der Nachkommen eine andere sein, als bei den beiden einfachen Farbenbastarden, welche sich wie *Pisum* verhalten und von denen die erste Generation zur Hälfte wieder die Bastardfarbe bringt, während die andere Hälfte zu gleichen Theilen die beiden Stammfarben erhält und in den nächsten Generationen nicht variirt. Jene Nachkommen des Bastardes *Karmoisin* + *Gelb*, welche in der ersten Generation[2]) die Stammfarben erhielten, haben sich auch in der zweiten Generation aus Samen als ganz farbenbeständig erwiesen. Beide Farben erscheinen so rein, als ob sie niemals hybrid verbunden gewesen wären.[3]) DARWIN und VIRCHOW haben auf den hohen Grad von Selbstständigkeit hingewiesen, welche einzelnen Charakteren und ganzen Charaktergruppen an Thieren und Pflanzen zukommt. Einen wichtigen Beleg für die Richtigkeit dieser Ansicht liefert unstreitig das Verhalten der Pflanzenbastarde.

Die Farben-Versuche mit *Matthiola annua*[4]) haben auch im heurigen Jahre trotz der grossen Anzahl von Versuchspflanzen nur geringe Fortschritte gemacht. Nach den bisherigen Erfahrungen

---

1) Weitere Nachrichten fehlen. Wie dieser Versuch ausfallen muß, wissen wir heutzutage im voraus. Einen ähnlichen Versuch hatte ich 1899 gemacht, um die Frage zu entscheiden, ob bei *Mirabilis Jalapa* — die in hohem Grade selbstfertil ist — der eigene Pollen doch am Ende hinter fremdem zurücktritt. Es wurden an einem Stock der *var. alba* die Narben einer Anzahl kastrierter Blüten mit je 2 Pollenkörnern belegt, mit einem aus derselben Blüte und einem eines bestimmten Individuums der *var. rubra*. Die Aussaat der so erzielten Körner zeigte, daß etwa in der Hälfte der Fälle (8 mal) Selbstbefruchtung, in der Hälfte (7 mal) Fremdbefruchtung eingetreten war. Selbstbestäubung und Fremdbestäubung sind also etwa gleichwertig.

2) In der zweiten Generation nach heutigem Gebrauch.

3) Diesen Bastard habe auch ich gemacht, bei ihm kann in das Karmoisin der einen Stammart Gelb gemischt sein; die Nachkommenschaft spaltet typisch.

4) Vergl. d. Anm. 2 auf S. 195.

ist eine Uebereinstimmung mit *Pisum* wahrscheinlich. Schwierigkeiten verursachen gewisse Erscheinungen, welche sich auf die Intensität der Färbungen beziehen. Oefter erscheint statt der erwarteten Farbenstuffe eine, wenn ich mich so ausdrücken darf, höhere oder tiefere Farben-Octav, oder beide zugleich, und zwar nicht an einem oder dem anderen, sondern an einer ganzen Reihe von Exemplaren. Dadurch wird das Sortieren sehr unsicher, weil es leicht geschieht, dass dabei das Zusammengehörige getrennt oder der umgekehrte Fehler begangen wird. Man erhält dann für die verschiedenen Farben-Varianten Zahlen, welche für die Ableitung einer Entwicklungsformel unbrauchbar sind. Es wurden heuer neue Versuchspflanzen aufgenommen, vielleicht gelingt es, mit diesen einfachere Reihen zu erhalten.

Schliesslich erlaube ich mir noch ein Curiosum mitzutheilen, welches das Zahlenverhältnis betrifft, in welchem die männlichen und weiblichen Pflanzen des Bastardes *Lychnis diurna* + *L. vespertina* vorkommen.[1]) Ich hatte drei Blüthen der *L. diurna* befruchtet und die Samen aus jeder Kapsel getrennt angebaut. Es gab:

Kapsel	I.	74	Pflanzen,	54	weibliche,	20	männliche
„	II.	58	„	43	„	15	„
„	III.	71	„	54	„	17	„
		203		151		52	

Ist es blos Zufall, dass hier die männlichen Pflanzen in dem Verhältnisse 52 : 203 oder 1 : 4 vorkommen, oder hat dieses Verhältnis dieselbe Bedeutung wie in der ersten Generation der Bastarde mit veränderlichen Nachkommen? Ich möchte das Letztere bezweifeln, schon wegen der sonderbaren Folgerungen, die sich aus diesem Falle ergeben würden. Anderseits lässt sich die Frage nicht so leicht von der Hand weisen, wenn man erwägt, dass die Anlage für die functionsfähige Entwicklung entweder blos des Stempels, oder nur der Staubgefässe schon in der Organisation der Grundzellen ausgesprochen sein musste, aus welchen die Pflanzen hervorgegangen sind, und dass dieser Unterschied in den Grundzellen möglicherweise davon herrühren könnte, dass die Eichen sowohl, als auch die Pollenzellen in Bezug auf die ge-

1) *Melandrium rubrum* + *M. album*. Vergl. den Zusatz auf S. 253.

schlechtliche Anlage verschieden waren. Ich will die Sache desshalb doch nicht ganz fallen lassen.

Indem ich mich, verehrter Herr und Freund, Ihrem geschätzten Wohlwollen bestens empfehle, zeichne ich mich mit dem Ausdrucke der vorzüglichsten Hochachtung als Ihren

ganz ergebenen

GR. MENDEL

Brünn am 27. September $\overline{870}$

NÄGELI antwortete hierauf erst am 30. Mai 1871, indem er die Verzögerung mit dem Krieg entschuldigte, seine Teilnahme wegen des Augenleidens aussprach, Vorschläge zu einer bequemeren Kastration der Hieracienblüten (Benetzen mit Wasser) machte, endlich die Namen der fraglichen Hieracien (*H. cinereum* (später *setigerum*) und *H. barbatum*) angab, auch seine Photographie übersandte.

Am 2. April 1873 schrieb NÄGELI wieder.

Der nächste und zugleich letzte Brief MENDELS datiert vom 18. November 1873. Den zu Anfang erwähnten Brief aus dem Frühjahr desselben Jahres hat NÄGELI nicht erhalten, wie er in einer Notiz zu seiner Antwort vom 23. Juni 1874 ausdrücklich hervorhebt. Der Anfang dieses letzten Briefes erklärt auch das Schweigen MENDELS im Jahre 1872.

X.

Begleitende Bemerkungen zu der letzten Sendung von Hieracienbastarden. — Konstante Nachkommenschaft der Hieracienbastarde. — Versuchte Rückbastardierung mit den Stammeltern und ihr Ergebnis. Vergebliche Kastrationsversuche, ihre Ursache. — Arten, von denen zahlreiche Bastarde erwiesen sind, altersschwach?

Brünn 18/11 $\overline{873}$

Hochgeehrter Herr und Freund!

Trotz des bessten Willens war ich nicht im Stande, meine im Frühjahr gegebene Zusage einzuhalten. Die Hieracien sind auch heuer wieder verblüht, ohne dass ich ihnen mehr, als einen oder den anderen flüchtigen Besuch schenken konnte. Ich fühle mich wahrhaft unglücklich, dass ich meine Pflanzen und Bienen so gänzlich vernachlässigen muss. Da ich jetzt einige Zeit gewinne, und nicht wissen kann, ob ich im nächsten Frühjahre in der gleichen Lage sein werde, sende ich Ihnen heute einiges aus meinen letzten Versuchen von $\overline{870}$ und $\overline{871}$. Sollten sich wegen der späten Jahreszeit die Pflanzen nicht mehr im freien Grunde unterbringen lassen, so könnten sie, in mässig feuchte Erde oder Sand eingeschlagen, an einer lichten Stelle des Kalthauses leicht überwintert werden.

Ich sende Ihnen:

1. *H. praealtum* (München) + *H. Pilosella incanum* (München)[1])
   (obscurum N.) *(velutinum N.)*
2. *H. Auricula* + *H. Pilosella vulgare* (München)[2])
3. *H. Auricula* + *H. Pilosella vulgare* (Brünn)
   (bruennense N.)[3])
4. *H. Auricula* + *H. Pilosella niveum* (München)
   (tardiusculum N.)[4])
5. *H. Auricula* + *H. aurantiacum* (Brünn).[5])

Bei den nachfolgenden Notizen musste ich mich auf die Aufzeichnungen von $\overline{871}$ verlassen.

ad 1. 1[6]) Bastard, ganz unfruchtbar.
ad 2. 84 Bastarde, alle unfruchtbar, kaum ein Unterschied.
ad 3. 25 do. alle fruchtbar, alle gleich.
ad 4. 35 do. alle unfruchtbar, alle gleich.
ad 5. circa 90 do. zum Theile fruchtbar, sehr verschieden.

Bei 1—4 ist der Blüthenstand sehr oft einfach, wie bei der Stamm art *H. Pilosella.*

Die nach dem Copulationszeichen + angesetzte Benennung bezieht sich in allen Fällen auf jene Art, von welcher der Pollen genommen wurde. Es hat demnach das Zeichen + die Bedeutung: befruchtet mit dem Pollen von ....

Die zu jeder Nummer gehörigen Bastarde wurden auf abgesonderte Beete ausgesetzt und konnten sich gegenseitig durch Stolonenwucherung nicht stören, dafür aber sind die zusammengehörigen auf demselben Beete stehenden während der Zeit, wo sie ohne Aufsicht und Pflege blieben, so sehr durch einander gewachsen, dass das Sortiren schwierig, zum Theile unmöglich ist. Zur Sendung habe ich nur Exemplare gewählt, von denen ich mit einiger Sicherheit annehmen konnte, dass jedes davon von einem anderen Bastard-Sämlinge herrührt. Nur bei No. 5 *(H.*

1) Fehlt bei PETER, offenbar bald eingegangen.

2) *H. Auricula 1. epilosum* + *H. Pilosella vulgare α genuinum 1 normale* = *H. melanochlorum* und *H. oligotrichum* bei PETER und in der Monographie.

3) Vergl. S. 223 Anm. 4.

4) Später *H. tardans* und der Bastard *H. Auricula* + *H. tardans* = *H. tardiusculum* bei PETER und in der Monographie.

5) Vergl. S. 224 Anm. 2.

6) Hinter den Zahlen stehen im Original Punkte, jedenfalls nur versehentlich.

Auricula + H. aurantiacum) war eine Trennung nicht mehr möglich, da bei diesem Bastarde ausserordentlich luxurirende Individuen vorkommen, welche das Beet wie mit einem Teppich überziehn. Von diesem Bastarde sende ich Pflanzen von drei vollkommen fruchtbaren Varianten, welche ich gleich im ersten Sommer, nachdem sie ihre Samen ausgereift hatten, ausheben und zu einem weiteren Versuche auf ein separirtes Beet übersetzen liess. Zwei davon, welche dem *H. aurantiacum* näher stehen, sind auch auf dem neuen Standorte durch einander gewachsen und konnten nicht mit Sicherheit unterschieden werden. Pflanzen, wie ich hoffe von beiden, befinden sich unter No. 5 in dem mit a bezeichneten Umschlage. Der Umschlag b enthält Pflanzen des 3ten Varianten, welcher der Stammart *H. Auricula* näher steht.

Da die eben genannten drei Bastard-Varianten sich als vollkommen fruchtbar zeigten, sollten sie zu Versuchen über die weiteren Generationen dienen, welche Versuche aber nicht mehr zur Ausführung kamen. Es ist wohl als ziemlich sicher anzunehmen, dass die aus der Selbstbefruchtung dieser Varianten hervorgehende Descendenz nicht einer gleichen Variirung unterliegen werde, wie es bei den ursprünglichen Bastarden selbst der Fall ist. Die Pflanzen wenigstens, welche zur Probe aus jenen Samen gezogen wurden, welche im Jahre 870 von diesen Varianten im Freien, ohne allen Schutz und mitten unter den übrigen Bastarden gebildet wurden, variirten nicht, sie stimmten mit den Mutterpflanzen ohne Ausnahme überein. Auch *H. Auricula* und *H. aurantiacum* blühten in der Nähe und zu gleicher Zeit mit den genannten Bastard-Varianten, ohne dass eine Einwirkung ihres Pollens ersichtlich wurde.

GÄRTNER hat die Präpotenz des stammelterlichen Pollens über den Pollen der Bastarde bei verschiedenen Gewächsen nachgewiesen. Für *Hieracium* habe ich einen einzigen Versuch angestellt, dessen Resultat, wenn es auch vereinzelt dasteht, doch eine kurze Mittheilung zu verdienen scheint. Als Versuchspflanze wurde der Bastard *H. praealtum + H. aurantiacum*[1]) benützt, welcher nur theilweise fruchtbar ist, sodass an jedem Köpfchen nur etwa der dritte oder vierte Theil der Blüthen gute Samen entwickelt.

Die Versuchspflanze wurde im Topfe am Fenster gezogen.

---

1) *H. monasteriale? (N.)*, wahrscheinlicher *H. calomastix*, vergl. S. 220 Anm. 2.

Nachdem einige Köpfchen abgeblüht hatten, wurden alle blühenden entfernt und von jenen mit noch geschlossenen Blüthen nur zwei für den Versuch ausgewählt. Sobald sich an diesen die ersten Blüthchen öffneten, wurden die aus dem Antheren-Röhrchen hervortretenden Narben sogleich und ausgiebig mit Pollen von *H. aurantiacum* belegt, und so wurde durch drei oder vier Tage fortgefahren, bis alle Blüthchen geöffnet und alle Narben belegt waren. Zur Zeit der Reife zeigte es sich, dass jedes von den beiden künstlich befruchteten Köpfchen bedeutend mehr Samen gebildet hatte, als die übrigen, welche der Selbstbefruchtung überlassen waren. Von letzteren wurden die Samen abgezählt und die auf ein Köpfchen entfallende Durchschnittszahl bestimmt.

Im folgenden Jahre wurden aus den Samen der künstlich befruchteten beiden Köpfchen zweierlei Pflanzen erhalten, solche nämlich, welche mit der Bastard-Mutterpflanze ganz übereinstimmten, und andere, welche dem *H. aurantiacum* um vieles näher standen. Der numerische Vergleich ergab ferner, dass die Anzahl jener Sämlinge, welche sich von der Bastard-Mutter nicht entfernt hatten, somit aus Selbstbefruchtung hervorgegangen waren, fast genau so gross war, als sie nach dem gefundenen Durchschnitte hätte sein sollen, wenn die beiden Köpfchen ausschliesslich der Selbstbefruchtung überlassen geblieben wären.

Der Pollen von *H. aurantiacum* war demnach nur in solchen Blüthchen wirksam, die ohne seine Dazwischenkunft steril geblieben wären, den Bastard-Pollen konnte er jedoch nicht verdrängen.

Es sei hier ausdrücklich bemerkt, dass ich diesem Versuche, der übrigens leicht durchzuführen ist, die möglichste Aufmerksamkeit schenkte, dass ich die Zeit von 7—9 Uhr Morgens, wo täglich eine neue Zone von Blüthchen vom Rande aus gegen die Mitte der Scheibe hin sich öffnete, nie versäumt habe, und auf die Narbe ganz frischer Pollen von *H. aurantiacum* übertragen wurde, sobald sie nur zum Vorscheine kam.

Ich bin weit entfernt, das Resultat dieses Versuches in dem Sinne zu deuten, als hätte GÄRTNER Unrecht, wenn er behauptet, der Pollen des Bastardes bleibe bei Concurrenz des stammelterlichen Pollens wirkungslos.[1]) Aus diesem Versuche lässt sich kein Beweis für das Gegentheil ableiten, es muss sich vielmehr in dem

1) Es bezieht sich das natürlich nur auf Bastarde zwischen entfernt stehenden Sippen.

eigenthümlichen Baue der Blüthchen und dem Verhalten der Befruchtungsorgane für die Ausnahme, welche *Hieracium* in dieser Hinsicht zu machen scheint, eine ganz natürliche Erklärung finden.[1])

Ich vermuthe, dass bei diesem Genus jede freie Concurrenz ausgeschlossen bleibt, so lange der eigene Pollen gut entwickelt und befruchtungsfähig ist, weil in diesem Falle der fremde Pollen immer zu spät und schon aus diesem Grunde nur erfolglos in Mitbewerbung treten kann. Wie ich mich oft zu überzeugen Gelegenheit hatte, öffnen sich bei *Hieracium* die Antheren schon in der Knospe und theilen den Pollen der von ihnen enge umschlossenen Narbe mit, sodass dann letztere während des Aufblühens schon mit Pollen bedeckt aus dem Röhrchen hervortritt. Vielmal habe ich an *H. aurantiacum, H. murorum* u. a. einen vollen Tag vor dem Aufblühen das Antheren-Röhrchen am Grunde behutsam abgelöst und über den Griffel weggezogen, ohne dasselbe auf der Seite aufzuschlitzen, auch sonst alle mögliche Vorsicht angewendet, dann die Narbe mit dem fremden zur Befruchtung bestimmten Pollen wiederholt belegt, und dennoch aus den erhaltenen Samen niemals etwas anderes gezogen, als *H. aurantiacum, H. murorum.*

Auf diese Erfahrungen hin halte ich es für sehr wahrscheinlich, dass eine Befruchtung durch fremden Pollen nur dann eintreten kann, wenn der eigene fehlschlägt, während die Empfänglichkeit des Eichens erhalten bleibt; was bei diesem Genus nicht selten der Fall zu sein scheint.

Es ist bekannt, dass ungünstige Aenderungen in den vitalen Verhältnissen bei Menschen und Thieren eine verminderte Fortpflanzung, somit eine geschlechtliche Schwächung, auch gänzliche Sterilität zur Folge haben können; wobei der männliche Antheil immer zuerst leidet (wie bei Thieren in der Gefangenschaft). Bei Pflanzen dürfte es nicht anders sein. *H. Pilosella incanum*[2]) vermag sich dem hiesigen Klima nicht gut anzupassen. Die Luft scheint dieser Pflanze hier im Sommer zu trocken vielleicht auch zu warm zu sein. Im Jahre 870 waren die Mai- und Juni-Blüthen ganz steril, im folgenden Jahre von theilweiser Fruchtbarkeit, die gegen den Herbst erschienenen einzelnen Köpfchen aber vollkommen

1) Zu damaliger Zeit war eben die Parthenogenesis (sens. lat.) eine zwar sichergestellte *(Caelebogyne, Chara crinita)*, aber so seltene Erscheinung, daß es begreiflich erscheint, daß weder MENDEL noch NÄGELI an sie dachten.

2) *H. P. velutinum* HEER u. HEG. der Monographie.

fruchtbar. Vermuthlich lag bei den Sommerblüthen die Ursache der Sterilität in der schlechten Beschaffenheit des eigenen Pollens, da es mir auch nicht gelingen wollte, mit demselben *H. Auricula* zu befruchten, während zu derselben Zeit die Befruchtung mit dem Pollen der übrigen *Pilosella*-Varietäten keine Schwierigkeit hatte. Gegen Ende August jedoch gelang eine Befruchtung mit dem Pollen des *H. Pilosella incanum*. Auch GÄRTNER hat aus seinen Versuchen die Ueberzeugung gewonnen, dass das männliche Prinzip (wie er sich ausdrückt) immer zuerst afficirt wird.[1])

Verhielte sich die Sache wirklich so, dann wäre die freiwillige Bastardbildung bei *Hieracium* auf Rechnung temporärer Störungen zu setzen, welche, wenn sie sich oft wiederholen oder bleibend würden, schliesslich das Verschwinden der betroffenen Art selbst zur Folge haben müssten, während es einem oder dem anderen glücklicher organisirten Bastard-Nachkommen, dem die eben bestehenden tellurischen und kosmischen Verhältnisse zusagen, gelingen könnte, den Kampf ums Dasein mit Erfolg aufzunehmen und durch lange Zeiträume fortzuführen, bis auch ihn endlich ein gleiches Schicksal ereilt.

Ich möchte die Arten von denen zahlreiche Bastarde erwiesen sind, für altersschwach halten oder doch annehmen, dass dieselben ihre Lebenshöhe weit überschritten haben *(H. Auricula, H. praealtum)*.

Uiber den Erfolg der durch Prof. NIESSL eingeleiteten Sammlung mährischer Hieracien-Bastarde kann ich noch nicht Bericht erstatten. Die Sendungen von den auswärtigen Mitgliedern des Vereines werden erst im Verlaufe des Winters erwartet.

Mit dem Ausdrucke der vorzüglichsten Hochachtung und Verehrung zeichne ich mich als

Ihren ganz ergebenen

GR. MENDEL.

NÄGELI hat dann noch am 23. Juni 1874 und im Jahre 1875 an MENDEL geschrieben, z. T. sehr eingehend, aber keine Antwort mehr erhalten. Er wollte z. B. wissen, ob die vielförmigen Bastarde auch neben der gleichen Mutter stets den gleichen Vater gehabt hätten.

1) Ausnahmen dieser Regel hat schon W. O. FOCKE (Pflanzenmischlinge, S. 480) angegeben. Einen typischen Fall habe ich selbst beobachtet: *Polemonium flavum* + *P. coeruleum*, *f. alba* und *f. typica*, von denen ich zahlreiche Exemplare besaß, gaben weder spontan noch künstlich befruchtet eine Nachkommenschaft, während ihr Pollen die Stammeltern, wenn auch nur selten, befruchten konnte.

Zusätze des Herausgebers.

Zusatz zu S. 192.

(Hieracienbastarde.)

Seit der außerordendlich wichtigen Entdeckung C. Ostenfelds und C. Raunkiärs[1]), die inzwischen auch von anderer Seite bestätigt worden ist[2]), daß sicher kastrierte Hieracienblüten keimfähige Früchtchen tragen, daß also in dieser Gattung die Keimbildung auf parthenogenetischem Wege (im alten, weiteren Sinne genommen) erfolgen kann[3]), sind die Hieracienbastarde schnell in Mißkredit gekommen, daß man sie schon mit Gänsefüßchen verziert und daran denkt, sie als Mutanten zu erklären. Das hätte schon ein aufmerksames Studium der kurzen Veröffentlichung Mendels über seine Bastarde unmöglich machen müssen; die vorliegenden Briefe werden den letzten Zweifel daran zerstreuen, daß Mendel bei seinen Versuchen wirklich Bastarde gewonnen hat. Um ihre Existenz festzustellen, braucht niemand neue Versuche zu machen.[4])

Während Mendel selbst 6 Bastarde veröffentlichte, und Peter weitere 4 behandelt, ist nach dem Verzeichnis auf S. 258 u. f. die Zahl

---

1) C. H. Ostenfeld og C. Raunkiär, Kastrerings forsøg med Hieracium og andre Cichorieae. Botanisk Tidsskrift 25. Band, 3 Hefte, 1903. Ferner C. Ostenfeld, Zur Kenntnis der Apogamie in der Gattung Hieracium. Ber. d. Deutsch. Botan. Gesellsch. Bd. XXII, S. 376. 1904.

2) H. Zahn (s. unten), J. B. Overton, nach Strasburger, Die Apogamie der Eualchimillen etc. (Jahrb. f. wiss. Botan., Bd. 41, S. 117).

3) Daß der Embryo aus einer Eizelle gebildet wird, wie zu erwarten war, hat inzwischen S. Murbeck gezeigt (Parthenogenese bei den Gattungen Taraxacum und Hieracium. Botan. Notiser 1904, Häft 6, d. 16. dec.)

4) Sehr energisch hat sich jüngst vom Standpunkt des Systematikers aus H. Zahn für die Hieracienbastarde gewehrt (Allgemeine botanische Zeitschrift von A. Kneucker, Nov. 1904). Inzwischen hat auch Ostenfeld selbst über einen Bastard zwischen *H. Pilosella* und *H. aurantiacum* berichtet, den er in einem Exemplar erhalten hat. (Weitere Beiträge zur Fruchtentwicklung bei der Gattung *Hieracium*. Ber. d. Deutsch. Botan. Gesellsch., Bd. XXII, S. 537 (1904).)

der unzweifelhaften, von MENDEL selbst dargestellten Bastarde 21; auch 2 Archieracienbastarde sind darunter. Während MENDEL anfangs nur 1—3 Exemplare von jedem seiner 6 Bastarde besaß, konnte er später von einzelnen Verbindungen gegen 100, bei *H. Auricula* + *H. Pilosella* sogar gegen 200 Individuen vergleichen. Sie sind aber, das ist nicht zu vergessen, das Resultat einer ganz außerordentlichen Arbeit, die nicht so leicht jemand wiederholen wird! Was der Kunst des Experimentators gelang, wird natürlich auch im Freien den Pollen übertragenden Insekten hie und da gelingen. Es muß also auch spontane Hieracienbastarde geben.

Umgekehrt wissen wir nun durch die Versuche OSTENFELDS und RAUNKIÄRS, warum MENDEL diese außerordentliche Mühe aufwenden mußte, warum er bei einigen Hieracienarten auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten stieß und bei andern trotz allen Anstrengungen kein Resultat erhielt. Die Archieracien scheinen noch ausschließlicher parthenogenetisch zu sein, als die Piloselloiden.[1]) Aber auch bei diesen läßt sich aus MENDELS Versuchen nach dem Grad, in dem die Fähigkeit zur geschlechtlichen Fortpflanzung erhalten geblieben ist, eine Reihe bilden, die mit dem stets versagenden *H. aurantiacum* anfängt, in der dann *H. Pilosella* und *H. cymosum* folgen, weiter *H. praealtum*, und die mit *H. cymigerum* und *H. Auricula* schließt, die „vollkommen verläßlich" sind. Damit sind die besten Objekte für Versuche mit der einen oder anderen Fragestellung schon gegeben.

Sicher ist, daß auch bei jenen Formen, die ganz parthenogenetisch geworden sind (*H. aurantiacum*), der Pollen nicht (ganz) untauglich geworden ist. Wenn er künstlich nicht zur Schlauchbildung zu bringen war, so will das nicht viel sagen. Alle meine Bemühungen, den Pollen von *Mirabilis* zum Keimen zu bringen, sind z. B. auch fehlgeschlagen, obwohl diese Gattung normal sexuell ist.

Die Hieracien können also zum Teil sowohl parthenogenetisch als auch nach einer Befruchtung keimfähige Früchtchen ausbilden. Die nächste Frage ist die, ob dieselben Eizellen zu beidem tauglich

---

1) Ein Verzeichnis der von NÄGELI stammenden und von MENDEL geprüften Archieracien findet sich S. 235; es kommen dazu jene, die MENDEL schon besaß (*H. barbatum*, *H. murorum*, *H. vulgatum*, *H. umbellatum* und gewiß noch andere).

sind, oder ob die einen für die parthenogenetische Entwicklung — etwa durch den Ausfall der Reduktionsteilung — vorgebildet sind, und die andern für die Befruchtung — nach Ausführung der Reduktionsteilung. Nachdem, was wir durch J. B. OVERTON[1]) von *Thalictrum purpurascens* wissen, wäre das gut möglich. Eine Entscheidung werden erst neue Versuche bringen können. Für die zweite Annahme kann eine Beobachtung MENDELS angeführt werden, nach der ein Hieracienköpfchen, das durch Parthenogenesis („Selbstbestäubung" bei MENDEL) *a* keimfähige Früchtchen hervorbringt, nach möglichst frühzeitiger Belegung aller Narben mit fremdem Pollen *a* + *b* keimfähige Früchtchen bringt, von den *a* die Mutterpflanze, *b* den Bastard geben (S. 234 und vor allem S. 245).[2]) Ein einfacher Versuch mit *H. Auricula* kann die definitive Entscheidung bringen. Wenn nach der Kastration alle Fruchtknoten eines Köpfchens keimfähige Früchtchen geben, muß dieselbe Eizelle im stande sein, sich parthenogenetisch und nach normaler Befruchtung zu entwickeln; denn daß hier normale Befruchtung möglich ist, geht aus MENDELS Versuchen sicher hervor.[3])

Auffallend ist, wenn Apogamie im Sinne STRASBURGERS[4]) vorliegt, daß es zwar unter den sicheren Hieracienbastarden vollkommen fertile gibt (*H. magyaricum* + *H. aurantiacum*), daß die Fruchtbarkeit aber auch oft herabgesetzt ist, ja daß ganz sterile Bastarde vorkommen, und daß aus derselben Befruchtung fertile und sterile entstehen können, (z. B. S. 239). Bei dem Bastard ist also nicht bloß die geschlechtliche, sondern auch die ungeschlechtliche, wahrscheinlich apogame Keimbildung behindert, während die Sterilität oder mangelhafte Fruchtbarkeit

1) J. G. OVERTON, Über Parthenogenesis bei *Thalictrum purpurascens*. Ber. d. Deutsch. Botan. Gesellschaft. Bd. XXII, S. 274, 1904.

2) Auch schon „Hieracienbastarde", S. 51 der Ausgabe in Ostwalds Klassikern.

3) Es wäre natürlich auch noch zu prüfen, ob die gerade zum Versuche verwendete Sippe des *H. Auricula* sich wie die von MENDEL benützte verhält.

4) STRASBURGER hat in allerjüngster Zeit nach Vorarbeiten JUELS zwischen „Parthenogenesis" und „Apogamie" unterschieden; bei jener entwickelt sich das Ei nach vorheriger Reduktionsteilung, bei dieser ohne eine solche, ohne Befruchtung weiter (Die Apogamie der Eualchimillen etc., Jahrb. f. wiss. Botan. Bd. 41, S. 88 u. f. (1904)). Ich folge ihm hierin, hätte es aber für besser gehalten, wenn die Bezeichnung „Parthenogenesis" entweder als Sammelbegriff für beide Erscheinungen, oder dann für die häufigere, die jetzige oogene „Apogamie", beibehalten worden wäre.

der Bastarde sonst auf die Schwierigkeiten bei der Keimzellbildung zurückgeführt zu werden pflegt, speziell auf solche während der Reduktionsteilung.[1])

Die Hieracienbastarde haben bisher wegen zwei besonders ausgeprägten Eigentümlichkeiten hervorragendes theoretisches Interesse besessen: erstens, weil die erste Generation außerordentlich vielförmig ausfällt, zweitens, weil jedes Individuum dieser vielförmigen ersten Generation eine ihm gleiche, völlig konstante Nachkommenschaft gibt.

Der erste Punkt erfährt durch das neue, hier gegebene Material noch eine Ausdehnung, indem MENDEL diese Eigentümlichkeit bestätigt fand, als er nicht nur bis drei, sondern bis hundert und mehr Exemplare derselben Bastardkombination vergleichen konnte. Der Punkt wird von der Entdeckung OSTENFELDS und RAUNKIÄRS nur soweit berührt, als es sich nun frägt, ob diese Vielförmigkeit des Bastardes wirklich in dem schroffen Gegensatz zur vollkommenen Konstanz der Eltern steht, die MENDEL festgestellt hatte. Ob die einzelnen, zu den Bastardierungen benutzten Sippen auch in einer durch Inzucht entstandenen Nachkommenschaft ebenso einförmig sind (wie es sehr wahrscheinlich ist), müssen neue Versuche zeigen. Bei *H. Auricula* wird das unschwer zu prüfen sein. Es sei gleich darauf hingewiesen, daß MENDEL später auch zwei einförmige Hieracienbastarde in größeren Individuenzahlen, den einen in 25, den andern in 35 Stück, beobachtet hat (S. 243).[2])

---

1) Eine Erscheinung, die damit verglichen werden kann, habe ich wiederholt beobachtet, als ich versuchte (Mitte der 90er Jahre) die typische *Funkia ovata* mit *F. Sieboldiana* und der *f. aurea* der *F. ovata* zu bastardieren. Die Kapseln entwickelten sich, die Samen blieben aber taub; wie die mikroskopische Untersuchung zeigte, waren die Adventivembryonen nur bis zu einem gewissen — immerhin vielzelligen — Stadium entwickelt, dann aber stehen geblieben. Die Versuche wurden abgebrochen, als das Problem, zu dessen Lösung sie angestellt wurden, durch WEBBERS Kreuzungsversuche mit *Citrus* gelöst war; ich komme auf sie gelegentlich noch zurück.

2) Die vielförmigen Bastarde MENDELS haben wohl meist oder immer das gleiche Individuum zur Mutter gehabt (vergl. S. 222, wo erzählt wird, daß von NÄGELIS Sendung je ein Exemplar jeder Art in einen Topf gepflanzt wurde); daß auch der Vater stets der gleiche war, erscheint mir nicht ausgemacht. Bei der völligen Konstanz der Nachkommenschaft hat MENDEL möglicherweise nicht so scharf darauf geachtet, wie es uns jetzt erwünscht wäre.

Daß bei NÄGELI und PETER die Zahl der bei einem Bastard unterschiedenen Formen geringer ist, als bei MENDEL — die mehr als 90 eingesandten Exemplare

Ob im zweiten Punkt eine Änderung eintreten wird und die Hieracien ganz aus der Klasse der konstante Nachkommen liefernden Sippen zu streichen sind, müssen erst weitere Untersuchungen zeigen. Liegt Parthenogenesis im engeren Sinne, dem STRASBURGERS, vor, entwickelt sich, nach einer Reduktionsteilung, ein normales Ei ohne Befruchtung zum neuen Individuum, so werden die Hieracienbastarde das schönste Beispiel solcher, eine konstante Nachkommenschaft liefernder Verbindungen bleiben. Denn wenn, wie ich zuerst vermutet habe, und jetzt wohl allgemein angenommen wird, bei den mendelnden Bastarden die Spaltung der Anlagen bei der Reduktionsteilung erfolgt, so müßten sich ihre Folgen in der zweiten Generation, trotz der parthenogenetischen Entwicklung der Eizellen, zeigen. Ein Erbsenbastard würde unter diesen Bedingungen die gleichen Nachkommen bilden müssen, wie bei sexueller Fortpflanzung, wenn auch die Gleichheit zum Teil nur äußerlich, und das Zahlenverhältnis verschieden wäre; seine dritte Generation und die folgenden wären dann freilich völlig konstant. Liegt aber Apogamie im Sinne STRASBURGERS vor, unterbleibt die Reduktionsteilung, so ist die Konstanz der Nachkommenschaft selbstverständlich. Ich glaube, daß die Entscheidung in diesem Sinne ausfallen wird. Es ist nach dem, was wir aus anderen Versuchen wissen, jetzt zu unwahrscheinlich, daß gerade bei *Hieracium* sämtliche Bastarde zwischen so verschiedenen Eltern lauter nicht spaltende Merkmalspaare liefern sollten.

Ist die Konstanz der Hieracienbastarde einmal wirklich auf Apogamie zurückzuführen, so ist doch nicht zu vergessen, daß damit zwar ein klassisches Beispiel für solche Bastarde fällt, die Tatsache ihre Existenz aber nicht angetastet wird. Man könnte dann, statt von einem *Hieracium*-Typus, vielleicht von einem *Oenothera*-Typus sprechen. Das Gleiche wäre der Fall hinsichtlich der Vielförmigkeit der ersten Generation gewesen, wenn die Hieracienbastarde gar nicht existierten. Wir hätten genug andere Fälle dafür.

---

des Bastardes *H. Auricula* + *H. aurantiacum* erscheinen als 8 Sippen, vergl. S. 259, — mag zum Teil daher rühren, daß einzelne der übersandten Stöcke vor der Untersuchung zugrunde gingen, im wesentlichen aber daher, daß immer eine Anzahl Formen in eine Sippe zusammengezogen werden konnten. Wie weit das nur durch rein zufällig vorhandene Lücken in der Reihe ermöglicht wurde, entzieht sich jetzt unserer Beurteilung.

Zusatz zu S. 241.

(Verhält sich die Geschlechtsdifferenz wie ein Merkmal der Erbsenhybriden, „spaltet" sie?)

Es ist in der Tat verlockend, die Geschlechtsbildung in den Kreis der Vererbungserscheinungen einzubeziehen, für die die MENDELschen Regeln gelten, und BATESON[1]) hat erst jüngst sich energisch für den einstigen Erfolg derartiger Bemühungen ausgesprochen. Ohne Hilfshypothesen kann es nicht abgehen; die Forderungen sind sonst, wie schon MENDEL selbst hervorhebt, zu sonderbar. Es scheint mir aber außerdem auch ein prinzipieller Unterschied zu bestehen.

Nehmen wir zunächst an, es treten beim Bastard *Melandrium rubrum*♀ + *album*♂ die Individuen wirklich stets im Verhältnis 3♀ zu 1♂ auf, wie MENDEL beobachtete, und es gelten die MENDELschen Regeln. Dann müßten wir annehmen 1.) daß ♂ gegenüber ♀ rezessiv sei, 2.) daß beide Eltern, *Melandrium rubrum* sowohl als *M. album*, „Heterozygoten" im Sinne BATESONS gewesen seien und je 50% der Keimzellen mit der Anlage für ♂ und je 50% mit der Anlage für ♀ gebildet hätten. Dann könnte die erste Generation des Bastardes wirklich aus dreierlei Individuen bestehen:

1) zu $^1/_4$ aus Pflanzen, die als Homozygoten, ♂ + ♂, entstanden und männlich wären,

2) zu $^2/_4$ aus Pflanzen, die als Heterozygoten, ♂ + ♀ und ♀ + ♂, entstanden und weiblich wären,

3) zu $^1/_4$ aus Pflanzen, die als Homozygoten, ♀ + ♀, entstanden und ebenfalls weiblich wären.

Was geschähe nun bei der Keimzellbildung? Alle ♂ Pflanzen könnten nur (♂) Keimzellen mit der Anlage für ♂ liefern, von den ♀ Pflanzen würde $^1/_3$ nur (♀) Keimzellen mit der Anlage für ♀ geben, und $^2/_3$ (♀) Keimzellen mit der ♂ oder der ♀ Anlage, zur Hälfte die einen, zur Hälfte die andern. Wenn sich nun alle Pflanzen entwickelten und die gleichen Chancen für die Verwertung der Sexualzellen hätten, müßte die zweite Generation des Bastardes wieder aus dreierlei Pflanzen bestehen, nämlich:

---

1) W. BATESON, Address to the Zoological Section, British Association f. the Adv. of Science, Cambrigde, 1904. S. 11 des S.-A.

1) zu $^1/_3$ aus Pflanzen, die die Anlagen für ♂ und ♀ enthielten, also ♀ und Heterozygoten wären (sie entstünden auf den 25% ♀ Homozygoten der ersten Generation),

2) zu $^1/_3$ aus Pflanzen, die nur die Anlage für ♂ enthielten, also ♂ wären (sie entstünden auf den 50% ♀ Heterozygoten der ersten Generation, und zwar aus deren (♀) Keimzellen mit der Anlage für ♂).

3) zu $^1/_3$ aus Pflanzen, die sowohl die Anlage für ♂ als die für ♀ enthielten, also ♀ und Heterozygoten wären (sie entstünden auf den 50% ♀ Heterozygoten der ersten Generation, und zwar aus deren (♀) Keimzellen mit der Anlage für ♀).

Das Zahlenverhältnis wäre also in der zweiten Generation 2 ♀ auf 1 ♂ geworden, die ♀ wären jetzt lauter Heterozygoten, die ♂ dagegen lauter Homozygoten.

Bei der Keimzellbildung der zweiten Generation würden nun also sämmtliche ♂ Individuen nur (♂) Keimzellen mit der Anlage für ♂, sämliche ♀ Individuen dagegen (♀) Keimzellen bilden, von den $^1/_2$ die Anlage für ♂, $^1/_2$ die Anlage für ♀ enthielten. Und so würde, bei gleichen Chancen aller Individuen, die dritte Generation nur mehr aus zweierlei Individuen bestehen, nämlich:

1) zu $^1/_2$ aus Homozygoten, die nur die Anlage für ♂ enthielten und männlich wären,

2) zu $^1/_2$ aus Heterozygoten, die beide Anlagen, für ♂ und ♀, enthielten und, infolge der Dominanz der Anlage für ♀, weiblich wären.

Das Zahlenverhältnis müßte also in der dritten Generation 1 ♂ auf 1 ♀ sein, und so würde es sich in Zukunft halten; die ♂ wären stets Homozygoten, die ♀ stets Heterozygoten. Es liegt ja in der Annahme, die ♀ Anlage dominiere, daß die ♂ nur Homozygoten sein können.

Wovon mußten wir aber ausgehen? Davon, daß sowohl die ♂ Pflanze des *Melandrium album* als die ♀ des *M. rubrum* Heterozygoten gewesen seien, die Keimzellen mit beiderlei Anlagen in gleicher Zahl hervorbrächten; nur so könnte ja das Verhältnis 3 ♀ zu 1 ♂ beim Bastard herauskommen. Und damit stürzt das ganze Kartenhaus zusammen.

Aber MENDELS Beobachtung: 151 ♀ auf 52 ♂ ist überhaupt nur das Ergebnis eines Zufalls. STRASBURGER fand beim gleichen Bastard 79 ♀ auf 62 ♂ (129 : 100).[1]) Meine eigenen Versuche ergaben:

1) Biologisches Centralblatt, Bd. 20, S. 764 (1900).

I. Generation: 92 ♀ auf 9 ♂[1]), II. Generation: 28 ♀ auf 15 ♂ (187 : 100), III. Generation; 37 ♀ auf 14 ♂ (246 : 100); verschiedene Rückbastardierungen: 34 ♀ auf 29 ♂ (112 : 100), 14 ♀ auf 7 ♂ (200 : 100), 6 ♀ auf 10 ♂ (60 : 100), 44 ♀ auf 24 ♂ (183 : 100), 34 ♀ auf 20 ♂ (170 : 100), 37 ♀ auf 13 ♂ (285 : 100). Dem entspricht, daß STRASBURGER bei *M. album* im Freien das Zahlenverhältnis 128 ♀ auf 100 ♂ fand.

Beides, Dominanz der Anlage des einen Geschlechtes und Spalten bei der Keimzellbildung, kann also sicher nicht gleichzeitig gelten. Deshalb hat auch schon seiner Zeit STRASBURGER, der zuerst die Trennung der Geschlechter in Zusammenhang mit den Versuchsergebnissen MENDELS zu bringen strebte[2]), von der Dominanzregel ganz abgesehen und angenommen, „daß bei dem Zusamentreffen der mit bestimmten Geschlechtstendenzen ausgestatteten Geschlechtsprodukte, die Vereinigung darüber entscheidet, welches Geschlecht dominieren, welches latent bleiben soll."

CASTLE[3]) folgt hierin STRASBURGER, macht aber noch die weitere Annahme, daß sich nicht jede ♂ Keimzelle mit jeder ♀ Keimzelle vereinigen könne, sondern nur Keimzellen mit den entgegengesetzten geschlechtlichen Tendenzen, also z. B. eine männliche mit der Anlage für ♀ nur mit einer weiblichen mit der Anlage für ♂. Dadurch umgeht CASTLE die 50% Homozygoten (25% ♂ + ♂, 25% ♀ + ♀) und erhält lauter Heterozygoten, die bei der Keimzellbildung wieder beiderlei Keimzellen, ♀ und ♂, hervorbringen. Experimentell ist diese Annahme noch nicht geprüft. Ich glaube aber, daß sich die Spaltungsregel überhaupt nicht auf die Geschlechtsverhältnisse anwenden läßt, so wenig wie die Dominanzregel.

Bei der Vererbung des Geschlechtes einer diözischen Spezies handelt es sich wohl um etwas ganz anderes, als etwa bei der Vererbung der Blütenfarbe eines „mendelnden" Bastardes zwischen

1) Dieses eine Verhältnis ist vielleicht dadurch modifiziert, daß die Pflanzen 1902 vor der ersten Blüte aus dem Boden gehoben und von Tübingen nach Leipzig transportiert werden mußten. Dabei gingen möglicher Weise mehr ♂ als ♀ zu grund. Es ist aber auch gut möglich, daß sich die schwächere Konstitution der Bastardpflanzen bei den ♂ stärker zeigt, als bei den ♀, schon bei der Samenreife oder beim Keimen. Denn *M. rubrum* hat gewiß ein ähnliches Geschlechtsverhältnis, wie *M. album*, und der Bastard also ebenfalls ein ähnliches.

2) l. c. S. 766. Vergl. auch mein Referat in der Botan. Zeitg. Bd. 59, II. Abt., Sp. 198, 1901.

3) W. E. CASTLE, The Heredity of Sex. Contrib. fr. the Zoölogical Laboratory of the Museum of Comp. Zoölogy at Harvard College. Bullet. Vol. XL. No 4.

einer rot- und einer weißblühenden Sippe. Gleich ist, daß im einen und anderen Falle in der Zygote eine Anlage latent ist — im einen die des andern Geschlechtes, im andern die der einer Farbe (des Weiß). Daß es sich bei der Geschlechtsbildung eigentlich um eine ganze Anlagengruppe handelt, macht keinen wesentlichen Unterschied aus, ebenso wenig, daß bei der Geschlechtsbildung bald die eine, bald die andere Anlage dominieren müßte, während bei der Blütenfarbe dieselbe zu dominieren pflegt. Verschieden ist aber, daß die Keimzellen mit der Anlage für das Weiß oder das Rot, die der Bastard bei der Spaltung bildet, rein sind — nichts spricht dafür, daß in jenen für Rot noch die Anlage für Weiß, in jenen für Weiß noch die Anlage für Rot stecke —, während die Keimzellen mit den Anlagen für Geschlechterbildung nicht rein sein können, und die Keimzelle mit den Anlagen für ♂ noch die Anlagen für ♀ aktiv enthalten muß, so gut wie die Keimzelle mit den Anlagen für ♀ jene für ♂. Denn jede Keimzelle überträgt, selbst wenn sie eine bestimmte geschlechtliche Tendenz besitzt, auch die Anlagen des anderen Geschlechtes, wie Bastardierungsversuche zeigen. Mit andern Worten: Bei der Keimzellbildung wird von einem typisch spaltenden Anlagenpaar (wie es weiß-rot sein kann) eben stets die eine Anlage abgespalten resp. ganz aus der Keimzelle entfernt; von den beiderlei Geschlechtsanlagen aber werden, wenn überhaupt die Keimzelle schon eine bestimmte geschlechtliche Tendenz besitzt, die einen nur unterdrückt; es wird hier gar nichts gespalten.

Melandrium album unterscheidet sich von *M. rubrum* unter anderm durch die Zähne der Kapsel; bei *M. album* sind sie vorgestreckt, bei *M. rubrum* zurückgerollt.[1]) Dies ist einer der primären Charaktere der weiblichen Pflanzen; er wird aber sicher durch alle Keimzellen, mögen sie nun ♂ oder ♀ Tendenz besitzen, übertragen, wie der Bastard zwischen diesen zwei Arten lehrt. (In der I. Generation haben alle ♀ Individuen zurückgerollte Kapselzähne; in der II. Generation treten neben 75% ♀ Individuen mit derartigen Zähnen auch 25% ♀ Individuen mit vorgestreckten Zähnen auf.[2])

1) Ob eine *Melandrium*-Pflanze ♀ oder ♂ wird, hängt nicht davon ab, ob sich eine „Anlage" für „männlich" oder „weiblich" entfaltet, sondern davon, ob sich ein Komplex von weiblichen Merkmalen (zu denen auch das oben genannte Merkmal gehört) entfaltet, oder ein Komplex männlicher Merkmale.

2) Vergl. dazu De Vries, Mutationstheorie, Bd. II, S. 191.

Wollten wir annehmen, daß die Keimzellen ausschließlich die Anlagen eines Geschlechts besäßen, so würde, auch bei Zugrundelegung der schon angedeuteten, weiteren Hypothese CASTLES, das tatsächlich beobachtbare Verhalten (der I. oder II. Generation) völlig unerklärbar sein, sowohl unter der Annahme, der Zufall entscheide, ob die Geschlechtstendenz der von *M. album* oder der von *M. rubrum* stammenden Keimzelle in der „Zygote" dominiert, als auch unter der Annahme, es dominiere stets die Geschlechtstendenz der Keimzellen einer bestimmten Sippe in der Zygote (in unserem Falle müßte es *M. rubrum* sein). Eine eingehende Überlegung zeigt das bald; ich gehe nicht näher darauf ein, da der Zusatz ohnehin schon zu lang wird. — Es müssen also alle Keimzellen unserer diözischen Melandrien beiderlei Anlagen enthalten. Dabei bleibt es für uns hier gleich, ob in der Keimzelle der eine Anlagenkomplex über den anderen dominiert, sodaß jede Keimzelle schon eine bestimmte Tendenz besitzt, oder ob das nicht der Fall ist. Bei der Bastardbefruchtung[1]) kommen dann viererlei Anlagen zusammen: Die Komplexe für ♂ und ♀ aus der Sippe *M. album „a"*, und jene für ♂ und ♀ aus der Sippe *M. rubrum „r"*. Nun wird erst — auf jeden Fall — definitiv über das Geschlecht der „Zygote" entschieden. Die einen oder die anderen Anlagen dominieren, je nachdem wird die Pflanze ♂ oder ♀. Wird sie weiblich, so zeigt sie die zurückgerollten Kapselzähne des *M. rubrum*, weil in dem Punkte ♀ *r* über ♀ *a* dominiert, wird sie männlich, so zeigt sich z. B. eine intermediäre Ausbildung der Pollenkörner, speziell in der Größe und der Skulptur der Exine, weil die betreffenden Anlagen von *a* und *r* sich kombinieren.[2])

Bei der Keimzellbildung tritt nun freilich eine typische Spaltung der Komplexe ein, aber nicht so, daß, wie CASTLE annimmt, diese nach den verschiedenen Geschlechtsanlagen getrennt würden; sie erfolgt nach den beiden Elternsippen, nach *a* und *r*. Die männlichen und die weiblichen Exemplare des Bastardes bilden in gleichen Zahlen zweierlei Keimzellen; die einen enthalten aber nicht die Anlagen ♂ *a* ♂ *r* und die andern die Anlagen ♀ *a* ♀ *r*, sondern jene die Anlagen ♂ *a* ♀ *a*, diese die

1) Das Folgende gilt natürlich auch für die Inzucht, mutatis mutandis.

2) Vergl. dazu: Über den Modus und den Zeitpunkt der Spaltung der Anlagen bei den Bastarden vom Erbsen-Typus. Bot. Zeitg., Bd. 60, II. Abth. Sp. 79 (7. März 1902).

Anlagen ♂ *r* ♀ *r*. Hat jede Keimzelle wirklich eine bestimmte geschlechtliche Tendenz[1]), dann wird diese durch Unterdrückung eines der beiden Komplexe, jenes für ♂ oder jenes für ♀, die zunächst wieder gleichwertig sind, nach der Spaltung ausgebildet.

Bei der Bildung der II. Generation kommt nun zusammen: 25mal ♂ *a* ♀ *a* und ♂ *a* ♀ *a*, 50mal ♂ *a* ♀ *a* und ♂ *r* ♀ *r*, 25mal ♂ *r* ♀ *r* und ♂ *r* ♀ *r*. Welches Geschlecht entsteht, wird wieder erst jetzt von Fall zu Fall entschieden; bei der Dominanz von ♀ *r* über ♀ *a* müssen jetzt 75% der weiblichen Nachkommen zurückgerollte, 25% vorgestreckte Kapselzähne zeigen.

Bei Geschlechtsverhältnissen, die durch das Auftreten von Zwittern kompliziert sind (Triözie, Gynodiözie etc.), ist das typische Spalten nach der Geschlechtstendenz — nicht das nach der Herkunft der Anlagen — ebenso unwahrscheinlich, wie bei reiner Diözie. Dazu stimmt auch das, was wir bis jetzt an experimentellen Daten besitzen.[2])

Daß gewisse Abänderungen bei Schmetterlingen nur bei einem bestimmten Geschlecht auftreten und rezessiven Charakter haben[3]), scheint mir nicht viel zu beweisen; die Merkmale können, wie die typischen sekundären Sexualcharaktere, mit den primären verkoppelt sein und ihnen folgen. Ich würde sie am liebsten an die Fälle anschließen, wo, ebenfalls bei Schmetterlingen, das Weibchen in 2 oder 3 verschiedenen Formen auftreten kann *(Papilio Turnus* etc.*)*. Die Heterostylie, für die nach BATESONS noch nicht ausführlicher veröffentlichten Beobachtungen die MENDELschen Regeln gelten, hat meiner Meinung nach mit der Geschlechtsdifferenzierung gar nichts zu tun.

1) Ganz zwingende Beweise dafür kenne ich nicht. Auch meine diözischen Bastarde, die durch Befruchtung der monözischen *Bryonia alba* mit der diözischen *B. dioica* entstanden sind, halte ich nicht mehr für ganz beweisend. Sicher ist, daß die Anlage zur Diözie über jene zur Monözie dominiert; ob die „Zygote" aber ♂ oder ♀ wird, kann ebensogut vom Zufall abhängen, wenn die männliche, von *B. dioica* stammende Keimzelle beiderlei Anlagen aktiv enthält, als davon, daß die männliche Keimzelle eine bestimmte, ♂ oder ♀ Tendenz hatte, wenn sie nur einerlei Sexualanlagen aktiv enthält (Berichte der Deutsch. Botan. Gesellsch. Bd. XXI. S. 196, 1903).

2) Experimentelle Untersuchungen über Gynodiöcie. Berichte d. Deutsch. Botan. Gesellsch. Bd. XXII. S. 506. 1904.

3) W. BATESON l. c. S. 13 des S.-A.

Zusammenstellung der von G. Mendel experimentell erzeugten Hieracienbastarde.

	Brief:	Mendels Hieracien-arbeit	Übersandt an Nägeli	Nr. bei Peter
I. *Piloselloidea.*				
A. Einfache Bastarde.				
a. *H. Auricula* als ♀.				
1. ***H. Auricula* + *H. aurantiacum.***	VI, VII, VIII, IX, X	+	1869 1870 1873	15—18
H. aurantiacum + *H. Auricula* 1. *epilosum* ♀ bei Peter, in 8 Formen: 15, a. *H. pyrrhanthes α genuinum* I. *obtusum;* II. *acutulum α majoriceps; β. minoriceps;* 15, b. *β. purpuriflorum;* 15, c. *γ. inquilinum;* 16. *H. r. ripilum;* 17. *H. chrysochroum;* 18. *H. fulvopurpureum;* p. 459 bis 463.				
2. ***H. Auricula* + *H. cymosum.***	VIII	—	—	—
3. ***H. Auricula* + *H. Pilosella* (Brünn).**	V, VI, VII, VIII, IX, X	+	1869 1873	6, 7
H. (Pilosella) bruennense + *H. Auricula* 1. *epilosum* ♀ bei Peter; in 2 Formen: 6. *H. coryphodes* und 7. *H. Mendelii*, p. 453.				
4. ***H. Auricula* + *H. Pilosella niveum.***	IX, X	—	1873	8
H. tardans + *H. Auricula* 1. *epilosum* ♀ bei Peter; in einer Form: *H. tardiusculum*, p. 454.				
5. ***H. Auricula* + *H. Pilosella vulgare* (resp. München).**	IX, X	—	1873	3, 4
H. P. vulgare α genuinum 1. *normale* + *H. Auricula* 1. *epilosum* ♀ bei Peter, in 2 Formen: 3. *H. melanochlorum* und 4. *H. oligotrichum*, p. 451.				
6. ***H. Auricula* + *H. pratense.***	VII, VIII	+	—	—
b. *H. Pilosella (bruennense)* als ♀.				
7. ***H. Pilosella* (Brünn) + *H. Auricula.***	I, V	—	—	—
(H. Auricula 1. *epilosum* + *H. Pilosella bruennense).*				

	Brief:	MENDELS Hieracienarbeit	Übersandt an NÄGELI	Nr. bei PETER
H. Pilosella (Brünn) + *H. praealtum*. Fraglich.	I	—	—	—
H. Pilosella (Brünn) + *H. pratense*. Fraglich.	I	—	—	—
c. H. cymosum (s. lat.) als ♀.				
α. H. cymosum als ♀.				
8. ***H. cymosum* + *H. Pilosella* (Brünn?)**	VIII	—	1870	—
β. H. cymigerum als ♀.				
9. ***H. XII* + *H. Pilosella* (Brünn).** *H. (Pilosella) bruennense* + *H. cymigerum* ♀ bei PETER, in 9 Formen: 40, a. *H. canum α. genuinum* 1. *pilosius*; 2. *calvius α. obtusum*; b. *acutum*; 3. *setuliferum*; 40, b. *β. hirticanum* 1. *epilosum*; 2. *subpilosum*; 40, c. *γ. pilosicanum*; 40, d. *δ. setosicanum*; 41. *H. virenticanum*; p. 481—485.	VII, VIII, IX	—	1870	40, 41
10. ***H. XII* + *H. Pilosella* (München).** *(H. (Pilosella) vulgare α. genuinum* 1. *normale* + *H. cymigerum* ♀.)	VIII	—	—	—
d. *H. praealtum* (sens. lat.) als ♀.				
α. H. florentinum II. obscurum als ♀.				
11. ***H. praealtum* (München) + *H. Pilosella incanum* (München).** *(H. Pilosella XX. velutinum* + *H. florentinum II. obscurum* ♀).	X	—	1873	—
β. H. florentinum V. b. *subcymigerum* als ♀.				
12. ***H. praealtum* + *stoloniflorum*** später ***H. p.* + *flagellare*.** *H. praealtum* + *H. flagellare Rchb.* bei MENDEL, 1870, *H. flagellare* + *H. subcymigerum* ♀ bei PETER, in einer Form: 50. *H. inops*, p. 492.	II, VII, VIII	+	1867 1869	50
γ. H. magyaricum als ♀.				
13. ***H. praealtum (Bauhini)* + *H. aurantiacum*.** *H. aurantiacum* + *H. magyaricum* ♀ bei PETER, in einer Form: 70. *H. calomastix*, p. 121.	V,VI,VII, VIII	+	1869	70
14. ***H. praealtum (Bauhini)* + *H. Pilosella* (Brünn).**	VI	—	—	—

	Brief:	MENDELS Hieracien-arbeit	Übersandt an NÄGELI	Nr. bei PETER
e. *H. setigerum (echioides > Pilosella)* als ♀.				
15. ***H. praealtum?* + *H. aurantiacum.*** *H. echioides* + *H. aurantiacum* MENDEL 1870, *H. aurantiacum* + *H. setigerum* ♀ bei PETER, in 2 Formen: 44. *H. monasteriale* 1. *multipilum;* 2. *parcipilum;* p. 488.	VI, VII, VIII	+	1869	44
B. Rückbastardierungen mit den Stammeltern.				
16. ***(H. praealtum* + *H. aurantiacum)* + *H. aurantiacum.*** (*H. praealtum* = *H. magyaricum*).	VII	—	—	—
17. ***(H. praealtum* + *H. aurantiacum)* + *H. praealtum.*** (*H. praealtum* = *H. magyaricum*).	VII	—	—	—
18. ***(H. Auricula* + *H. Pilosella* [Brünn]) + *H. Auricula.***	VII	—	—	—
C. Tripelbastarde.				
19. ***(H. praealtum* + *H. aurantiacum)* + *H. Pilosella* (Brünn).** *H. brünnense* + (*H. aurantiacum* + *H. magyaricum* ♀) ♀ bei PETER, in einer Form: *H. trigenes*, p. 122.	VIII	—	1870	71
II. *Archieracia.*				
20. ***H. (barbatum)* + *H. umbellatum.***	VIII	—	1870	—
21. ***H. vulgatum f.* + *H. umbellatum.***	VIII	—	—	—

Daraus, daß drei von MENDEL nach München gesandte Bastarde, Nr. 8, 11, 20, bei PETER und in der Monographie fehlen, darf man nicht schließen, daß sie nicht anerkannt worden wären. Nr. 11 bestand sicher, Nr. 8 wahrscheinlich aus einem einzigen Exemplar, das leicht verloren gehen konnte, Nr. 20 liegt außerhalb des Rahmens der Arbeit PETERS und der Monographie.

Verzeichnis
der in den Briefen Mendels erwähnten Pflanzennamen.[1])

Antirrhinum majus 210.
(A. striatum = Linaria str. 216.)
A. vulgare + rupestre 227.
Aquilegia 210.
A. canadensis + atropurpurea 209.
A. canadensis + vulgaris 209.
A. canadensis + Wittmaniana 209.
Calceolaria salicifolia + rugosa 209.
Carex 210.
(Cheiranthus annuus = Matthiola a. 210.)
Cirsium 196, 197, 208, 224, 226.
C. arvense 196.
C. arvense + canum 208.
C. arvense + oleraceum 208.
C. canum 196, 209, 212, 216.
C. canum + oleraceum 212.
C. canum + palustre 209.
C. lanceolatum 196.
C. oleraceum 196, 212.
(C. oleraceum + rivulare = C. praemorsum 208.)
C. palustre 209.
C. praemorsum 208, 209, 216.
C. praemorsum + canum 215, 226.
C. rivulare + palustre 209.
Erbsen, siehe **Pisum.**
Geum 196, 197, 224, 227.
G. intermedium Ehrh. 197, 216.
G. rivale 197, 208, 216.
G. urbanum 197, 208, 216.
G. urbanum + rivale 196, 197, 208, 210, 216, 217, 226, 227.
Hieracium 196–198, 212, 224–226, 229, 232, 233, 244, 246, 247.
H. albidum 219, 222, 235.
H. alpicola 219.
H. alpinum 207, 219, 222, 235.
H. amplexicaule 207, 219, 222, 235.
H. aurantiacum 214, 222, 230, 232, 244, 246.
H. Auricula (*H. A. 1. epilosum*) 196, 214, 229–232, 235, 238, 244, 247.
H. Auricula + aurantiacum (*H. A. 1. epilosum* + *a.*) 224, 225, 230, 232, 233, 238, 239, 243, 244.
H. Auricula + cymosum 230.
H. Auricula + Pilosella und H. A. + Pilosella (Brünn) (*H. A. 1. epilosum* + *P. XVII. 4. bruennense*) 220, 223, 225, 230, 233, 238, 243.
H. (Auricula + Pilosella (Brünn)) + Auricula 227.
H. Auricula + Pilosella vulgare (München) (*H. A.* + *P. vulgare α. genuinum 1. normale*) 233, 238, 243.
H. Auricula + Pilosella niveum (= *H. A.* + *tardans*) 238, 243.
H. Auricula + pratense 227, 232.
H. auriculaeforme 222.
H. boreale 214.
H. canescens 228, 235.
H. cymigerum Rchb. 215.
H. cymosum (genuinum) 219, 230.
H. cymosum + Pilosella (Brünn) 227, 234.
H. echioides 207, 208, 231.
H. echioides-praealtum 231.
H. elongatum 222, 235
H. flagellare (= H. stoloniflorum Aut.) 222.
H. glaciale 219.
H. glanduliferum 219.
H. glaucum 207, 219, 222, 235.
H. gothicum 222, 235.
H. hispidum 228, 235.
H. Hoppeanum 235.
H. humile 219, 228, 235, 239.
H. murorum 196, 207, 214, 246.
H. nigrescens 235.
H. picroides 228, 235.
H. piliferum 219.

1) Die Benennungen nach der Monographie von Nägeli und Peter, die bei den Hieracienbastarden hinzugefügt wurden, sind *kursiv* gehalten.

H. Pilosella und H. P. (Brünn) (*H. P. XII. trichadenium 4. Subsp. bruennense*) 196, 214, 215, 230, 231, 234, 243.
H. Pilosella incanum (*H. P. XX. velutinum 2. Subsp. velutinum Heg. u. Heer*) 233, 238, 246, 247.
H. Pilosella niveum (*H. tardans Naeg. u. Peter*) 233.
H. Pilosella (Brünn) + Auricula 213, 220.
H. Pilosella (Brünn) + praealtum 213.
H. poliotrichum Wimm. 238.
H. porrifolium 219.
H. praealtum u. var. obscurum (*H. florentinum V. poliocladum 6. Subsp. subcymigerum*) 196, 207, 208, 211, 213–215, 229, 231, 247.
H. praealtum + flagellare = H. p. + stoloniflorum Aut. 222, 233.
H. praealtum + stoloniflorum Aut. (= H. p. + flagellare) (*H. subcymigerum + flagellare*) 211—214, 220, 222 (H. p. + flagellare), 225, 233 (H. p. + flagellare).
H. praealtum? (*H. setigerum*) 231.
H. praealtum (?) + aurantiacum (*H. setigerum + aurantiacum*) 223, 225, 233, 234, 244.
H. praealtum (München) + Pilosella incanum (*H. florentinum II. obscurum + Pilosella velutinum*) 243.
H. praealtum var. Bauhini + Pilosella (*H. magyaricum + Pilosella bruennense*) 225.
H. praealtum var. Bauhini + aurantiacum (*H. magyaricum + aurantiacum*) 214, 220, 223, 225, 233, 234.
H. (praealtum + aurantiacum) + aurantiacum (*praealtum = magyaricum*) 227.
H. (praealtum + aurantiacum) + praealtum (*praealtum = magyaricum*) 227.
H. (praealtum (Bauh.?) + aurantiacum) + Pilosella (Brünn) (*praealtum = magyaricum*) 234.
H. pratense 196, 232, 235.
H. prenanthoides (praenanthoides) 207, 219, 222, 228, 235.
H. pulmonarioides 222, 235.
H. racemosum 239.
H. rigidum 214.
H. Sendtneri 228, 235.
H. staticifolium 219.
H. stoloniflorum Aut. 212—214.
H. stoloniflorum WK. 197.
H. tridentatum 207, 219, 222, 235.
H. umbellatum 196, 214, 234, 235.
H. villosum 219, 222, 235.
H. vulgatum 207, 214, 235.
H. XII. (*H. cymosum IX cymigerum*) 230, 238.
N. No XII + Pilosella (Brünn) (*H. cymigerum + Pilosella bruennense*) 230, 232, 233, 235, 237, 238,
H. No XII + Pilosella (München) (*H. cymigerum + Pilosella vulgare α. genuinum 1. normale*) 233.
H? + umbellatum (*H. barbatum + umbellatum*) 239.
Ipomoea purpurea 210.
Linaria 224, 227.
L. genistifolia 217.
(L. purpurea = L. striata 216.)
L. striata DC. 216, 217.
L. triphylla 217.
L. vulgaris 216, 217.
(L. vulgaris + purpurea = L. vulgaris + striata 209.)
L. vulgaris + striata (209 L. v. + purpurea) 216, 227.
Lychnis diurna 241.
Lychnis diurna + vespertina 227, 237, 241.
Mais, siehe **Zea.**
Matthiola annua 210 (Cheiranthus a.) 236, 237, 240, 241.
Matthiola glabra 236.
Melandrium rubrum + album siehe *Lychnis diurna + vespertina.*
Mirabilis 236.
Mirabilis Jalapa 235, 239, 240.
Mirabilis Jalapa + longiflora 227.
Pisum 194—5, 199—207, 233, 240.
Potentilla 210.
Tropaeolum majus + minus 210.
Verbascum 217.
V. phoeniceum + Blattaria 217, 218.
Veronica 210.
Viola 210.
Zea 236.
Z. Cuzko 209.
Z. Mays major + Cuzko 209.
Z. Mays major + minor 209.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung . . . . . 189—193

Die Briefe Mendels . . . . . 194—247

I. Anknüpfung. — Reihenbildung der Nachkommenschaft der Erbsenhybriden. Vergleich mit GÄRTNERS Angaben. — Neue Bastardierungsversuche mit *Hieracium*, *Cirsium* und *Geum*. Bitte um Unterstützung bei den Versuchen mit den ersten zwei Gattungen . . . . . 194—198

II. Vorgeschichte der Publikation der Abhandlung über die Erbsenhybriden. — Antwort auf NÄGELIS Einwurf hinsichtlich der dauernden Konstanz der aus den Bastarden isolierten konstanten Sippen. Ein Versuch im großen. Antwort auf die Frage nach der Natur der Formeln. — Übersendung von Erbsensamen für Kontrollversuche und Vorschlag zu einem solchen Versuch. — Vorhandenes Material für die Versuche mit Hieracien; Bericht über Versuche mit *Geum*, *Cirsium*, *Aquilegia*, *Linaria*, *Calceolaria*, *Zea*, *Ipomoea*, *Matthiola annua*, *Antirrhinum majus*, *Tropaeolum majus* + *minus*. Pläne für den kommenden Sommer (*Veronica*, *Viola*, *Potentilla*, *Carex*) . . . . . 198—211

III. Bericht über *Hieracium praealtum* + *H. stoloniflorum* (*H. florentinum subcymigerum* + *H. flagellare*). Die Stammarten. Methodisches zur Castration der Hieracienblüten. Fruchtbarkeit des Bastardes; seine Blütenzahl das geometrische Mittel zwischen den Blütenzahlen der Stammeltern. — Neue Bastardierungsversuche mit Hieracien. — Beobachtungen an *Cirsium praemorsum* (= *oleraceum* + *rivulare*) + *C. canum* (2 Formen), an *Geum urbanum* + *G. rivale*, *Linaria vulgaris* + *L. striata*. *Verbascum phoeniceum* + *V. Blattaria* (Verlängerte Lebensdauer und Fertilität eines Individuums). . . . . 211—218

IV. Bitte um Überlassung von Material für die Bastardierungsversuche mit Hieracien . . . . . 218—219

V. Dank für die gesandten Samen. — Bericht von der Wahl zum Abte. — Nachricht von einigen neuen Hieracienbastarden. . . 219—222

VI. Mißgeschick mit den übersandten lebenden Pflanzen. — Weiterer Bericht über *Hieracium praealtum* + *H. stoloniflorum* (*H. florentinum subcymigerum* + *H. flagellare*), sowie einige weitere Hieracienbastarde . . . . . 222—224

VII. Begleitschreiben zu einer Sendung lebender Bastarde aus den Gattungen *Hieracium*, *Cirsium*, *Geum* und *Linaria*, nebst Bemerkungen über dieselben und weitere Versuche . . . . . 224—228

Seite

VIII. Augenleiden infolge der Kastrationsarbeiten bei *Hieracium*. — Bemerkungen zu den gleichzeitig übersandten Hieracienbastarden. Ungleiche Eignung der verschiedenen Piloselloiden-Arten zur Bastardbildung; Reihe von dem unbrauchbaren *H. aurantiacum* bis zu den vollkommen verläßlichen *H. Auricula* und *H. cymigerum*. Das Art-Material zu diesen Versuchen. — Die Vielförmigkeit der Hieracienbastarde in der I. Generation und Beispiele dazu. Möglichkeit spontaner Bastardierung; ein Tripelbastard. — Fast vergebliches Mühen mit Archieracien. — Wie viel Pollenkörner sind bei *Mirabilis* zur Befruchtung nötig? — Bastarde von *Matthiola*, *Zea* und *Mirabilis*, die sich wie die Erbsenbastarde verhalten. — *Lychnis vespertina* + *L. diurna*. — Schwierigkeiten bei *Matthiola* . . . . . 229—237

IX. Bericht über *H. Auricula* + *H. aurantiacum* und andere Hieracienbastarde. — Wiederholung des Versuches, *Mirabilis Jalapa* mit einem Pollenkorn zu bestäuben. — Können zwei Pollenkörner gemeinschaftlich an der Befruchtung teilnehmen? — Schwierigkeiten bei *Matthiola annua*. — Verhält sich die Geschlechtsdifferenz wie ein Merkmal der Erbsenrassen? (*Lychnis diurna* + *L. vespertina*.) . . . . . 238—242

X. Begleitende Bemerkungen zu der letzten Sendung von Hieracienbastarden. — Konstante Nachkommenschaft der Hieracienbastarde. — Versuchte Rückbastardierung mit den Stammeltern und ihr Ergebnis. Vergebliche Kastrationsversuche, ihre Ursache. — Arten, von denen zahlreiche Bastarde erwiesen sind, altersschwach? . . . . . 242—247

Zusätze des Herausgebers . . . . . 248—258

Hieracienbastarde . . . . . 248—252

Verhält sich die Geschlechtsdifferenz wie ein Merkmal der Erbsenhybriden, „spaltet“ sie? . . . . . 253—258

Zusammenstellung der von G. MENDEL experimentell erzeugten Hieracienbastarde . . . . . 259—261

Verzeichnis der in den Briefen MENDELS erwähnten Pflanzennamen . 262—263

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

ÜBER DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN RÄUMLICHER GELENKSYSTEME

VON

OTTO FISCHER,

AO. MITGLIEDE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

DES XXIX. BANDES
DER ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

N° IV.

MIT 6 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1905.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 27. Februar 1905.
Das Manuskript eingeliefert am 28. Februar 1905.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 28. April 1905.

ÜBER DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN RÄUMLICHER GELENKSYSTEME

VON

OTTO FISCHER,

AO. MITGLIEDE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 27. Februar 1905
Das Manuscript eingeliefert am 25. Februar 1905.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 28 April 1905

ÜBER DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN RÄUMLICHER GELENKSYSTEME

VON

OTTO FISCHER,

AO. MITGLIEDE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Scharniergelenk, also ein Gelenk von nur 1 Grad der Freiheit verbunden sind, die Achsen der beiden Scharniergelenke parallele Richtung besitzen, und die Schwerpunkte der drei Glieder in einer zu den Gelenkachsen senkrechten Ebene liegen und bei der Bewegung stets in dieser Ebene bleiben. Auch über die Massenverteilung im Innern eines jeden Gliedes wurde noch die spezielle Annahme gemacht, daß die zu den Gelenkachsen parallele Schwerpunktsachse für das betreffende Glied eine Hauptträgheitsachse darstellt, und daß der Schwerpunkt des mittleren Gliedes in der Ebene der beiden Gelenkachsen liegt. Unter diesen vereinfachenden Voraussetzungen nahmen dann die Bewegungsgleichungen eine verhältnismäßig einfache Form an, so daß die Bedeutung der einzelnen Ausdrücke in denselben unschwer zu erkennen war.

Die am dreigliedrigen System gewonnenen Resultate ließen sich weiterhin auf das allgemeine aus n Gliedern bestehende ebene Gelenksystem mit lauter Scharniergelenken und parallelen Gelenkachsen übertragen. Damit war aber die Grundlage für eine exakte Untersuchung gewisser Bewegungen des menschlichen und tierischen Körpers gegeben, soweit dieselben den vereinfachenden Annahmen über die Art der Gelenkbewegung und die Massenverteilung innerhalb der als starr aufgefaßten Körperteile entsprechen.

Von den Bewegungen des ganzen Körpers sind es namentlich die Lokomotionsbewegungen, insbesondere die des menschlichen Ganges, welche wenigstens annähernd den gemachten Voraussetzungen entsprechen. Wenn auch der menschliche Körper beim Gehen seitliche Schwankungen ausführt, die an verschiedenen Stellen des Körpers verschieden groß ausfallen, so treten dieselben an Ausdehnung doch beträchtlich hinter den Bewegungen zurück, welche von vielen Abschnitten des Körpers in der Richtung nach vorn und auch in vertikaler Richtung ausgeführt werden. Man kommt daher den tatsächlichen Verhältnissen schon ziemlich nahe, wenn man den Gang als eine ebene Bewegung auffaßt, bei welcher alle Körperteile sich parallel einer im Raume festen Vertikalebene, der sogenannten Gangebene, bewegen. Die Auffassung des Ganges als ebene Bewegung involviert aber zugleich die Annahme, daß beim Gehen in allen Gelenken nur Bewegungen um parallele, zur Gangebene senkrechte Achsen ausgeführt werden. Da auch die übrigen eben angeführten Voraussetzungen beim menschlichen Körper nahezu erfüllt sind, so ließen sich die für das allgemeine

ebene Gelenksystem gefundenen Bewegungsgleichungen der kinetischen Untersuchung des menschlichen Ganges zugrunde legen, wie man aus einer Reihe von Arbeiten über den Gang des Menschen, welche jedoch noch keineswegs abgeschlossen ist, deutlich zu erkennen vermag. Die Untersuchung des menschlichen Ganges bildet nur ein spezielles Beispiel für die Verwendung der gefundenen Bewegungsgleichungen. Es gibt aber, wie ich in anderen Arbeiten über die Wirkungweise verschiedener Muskeln gezeigt habe, noch zahlreiche andere Fragen der Bewegungsphysiologie, welche die Kenntnis der Bewegungsgleichungen der ebenen Gelenksysteme voraussetzen. Schließlich können auch viele Untersuchungen aus der technischen Mechanik dieser Kenntnis nicht entraten, wenn es sich auch bei den in den Maschinen verwendeten Gelenksystemen in der Regel um viel einfachere Verhältnisse handelt, insofern die Bewegungen derselben mit wenig Ausnahmen, dem Zwecke der Maschine entsprechend, zwangläufige sind, so daß also das ganze System überhaupt nur 1 Grad der Freiheit besitzt.

Die ebenen Bewegungen des menschlichen und tierischen Körpers oder einzelner Abschnitte derselben bilden nun nur einen Spezialfall, der sich jedoch fast niemals ganz exakt verwirklicht findet. Genau genommen führt der Mensch bei seinen verschiedenen Lokomotionsbewegungen und Arbeitsleistungen räumliche Bewegungen aus. Darauf weist auch schon der Umstand hin, daß die großen hierbei hauptsächlich in Frage kommenden Gelenke, welche die Teile der Extremitäten untereinander und mit dem Rumpfe verbinden, ausnahmslos mehr wie 1 Grad der Freiheit besitzen. So ist der Oberarm gegen den aus Schulterblatt, Schlüsselbein und Brustbein bestehenden Schultergürtel, ebenso wie der Oberschenkel gegen das Becken, mit 3 Graden der Freiheit beweglich verbunden. Der Unterarm kann sich gegen den Oberarm, ebenso wie der Unterschenkel gegen den Oberschenkel mit 2 Graden der Freiheit bewegen, und, wenn man die ganze Hand auf ihre Beweglichkeit gegen den Unterarm und den ganzen Fuß auf seine Beweglichkeit gegen den Unterschenkel untersucht, so findet man in beiden Fällen wiederum 2 Grade von Bewegungsfreiheit. Es werden sich daher beispielsweise schon die Bewegungen des Unterarms gegen den Oberarm, ebenso wie die Bewegungen des ganzen Armes gegen den Schultergürtel oder des ganzen Beines gegen das Becken im allgemeinen als räumliche Bewegungen herausstellen.

Zur Untersuchung der räumlichen Bewegungen des menschlichen Körpers reichen naturgemäß die in der früheren Abhandlung aufgestellten Bewegungsgleichungen nicht aus, da dieselben die ebene Bewegung aller Teile des Körpers zur Voraussetzung haben. Es sollen daher in der vorliegenden Arbeit die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme abgeleitet und damit die notwendige Unterlage für die kinetische Untersuchung der allgemeinsten Bewegungen des menschlichen und tierischen Körpers und seiner Teile geschaffen werden.

Da im Raume sich alle Verhältnisse komplizierter gestalten als in der Ebene, so ist es ratsam, von dem zweigliedrigen räumlichen Gelenksystem auszugehen und zunächst für dieses die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Die am zweigliedrigen System gewonnenen Resultate lassen dann schon die charakteristischen Unterschiede zwischen den Bewegungen räumlicher und ebener Gelenksysteme erkennen, so daß die zuletzt auf das n-gliedrige räumliche System ausgedehnte Untersuchung keine wesentlich neuen Gesichtspunkte mehr zutage fördert, und die Ergebnisse derselben sich leicht deuten lassen.

Das ebene Gelenksystem von n Gliedern besitzt $n + 2$ Grade der Freiheit, falls die ebene Bewegung desselben keinerlei einschränkenden Bedingungen unterworfen ist, und nicht mehrere Glieder untereinander eine geschlossene kinematische Kette bilden. Damit steht im Einklang, daß eine beliebige Stellung des Systems durch $n + 2$ allgemeine Koordinaten eindeutig bestimmt ist; denn dieselbe ist gegeben, sobald man die zwei ebenen Koordinaten eines Punktes des Systems und außerdem für jedes der n Glieder einen Richtungswinkel kennt. In der Wahl des Punktes hat man dabei ziemliche Freiheit. Derselbe kann mit dem in seiner Lage gegenüber den einzelnen Gliedern veränderlichen Gesamtschwerpunkt zusammenfallen, er kann aber auch in einem der n Glieder eine feste Lage besitzen. Das letztere wird man wählen, wenn im gegebenen Falle ein bestimmter Punkt eines Gliedes eine von vornherein genau bekannte Bewegung ausführt, dessen Koordinaten man dann zweckmäßigerweise als zwei der allgemeinen Koordinaten des Systems gelten läßt; im übrigen wird man die erstere Wahl bevorzugen, weil die Bewegung des Gesamtschwerpunktes sich nach bekannten mechanischen Gesetzen aus den äußeren Kräften ableiten läßt. Bleibt im besonderen Falle ein Punkt eines Gliedes

bei der Bewegung des ganzen Systems fest, so wird man natürlich die Koordinaten dieses Punktes zur Bestimmung der Lage des ebenen Gelenksystems verwenden; da dieselben konstant bleiben, so hat man dann nur n veränderliche allgemeine Koordinaten, oder mit anderen Worten, es besitzt das System in diesem Falle nur noch n Grade von Bewegungsfreiheit.

So groß die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems ist, so groß ist auch die Anzahl der Bewegungsgleichungen. Es waren daher im Falle vollkommen freier Beweglichkeit des n-gliedrigen ebenen Gelenksystems $n + 2$ Gleichungen, in dem Falle, daß ein Punkt eines Gliedes festbleibt, nur n Gleichungen aufzustellen, wie es in der früheren Arbeit geschehen ist. Gruppieren sich mehrere Glieder eines ebenen Gelenksystems zu einer geschlossenen kinematischen Kette, ein Fall, welcher bei Getrieben der Maschinen die Regel ist, in organischen Gelenksystemen jedoch nur ausnahmsweise vorkommt, so wird durch diesen Umstand gewöhnlich die Bewegungsfreiheit des ganzen Systems wesentlich heruntergedrückt, so daß also eine viel geringere Anzahl von Bewegungsgleichungen erforderlich wird. Die bei den Maschinen verwendeten Getriebe besitzen infolge der Kettenbildung in der Regel überhaupt nur noch 1 Grad von Bewegungsfreiheit; es genügt daher bei diesen eine einzige Gleichung zur vollständigen Formulierung des Bewegungsvorganges. Man erkennt hieraus auch, daß die zahlreichen Arbeiten über die Kinetik der Getriebe der Untersuchung der allgemeinen n-gliedrigen Gelenksysteme nur wenig nützen können, da sie sich nur mit einem ganz speziellen Falle, dem einfachsten, der überhaupt möglich ist, befassen.

Das räumliche Gelenksystem von n Gliedern besitzt im allgemeinen viel mehr Grade der Freiheit als das ebene. Für die Menge derselben ist nicht allein die Anzahl der Glieder maßgebend, sondern vor allen Dingen auch die Bewegungsfreiheit in den Gelenken, welche die einzelnen Glieder untereinander verbinden. Da in der Regel die in der organischen Natur auftretenden Gelenke nicht mehr als 3 Grade der Freiheit aufweisen, so wäre der allgemeinste Fall dadurch charakterisiert, daß alle Gelenke mit 3 Graden von Bewegungsfreiheit behaftet sind. Ist ein derartiges räumliches Gelenksystem keinerlei einschränkenden Bedingungen für seine Bewegung und die seiner Glieder unterworfen, treten also insbesondere dabei nicht mehrere Glieder zu einer kine-

matischen Kette zusammen, so besitzt das ganze System $3n + 3$ Grade der Freiheit. Eine beliebige Stellung desselben im Raume kann also nur durch $3n + 3$ allgemeine Koordinaten eindeutig bestimmt werden; davon geben 3 die Lage eines Punktes des Systems an, und je 3 beziehen sich auf die Orientierung eines jeden der n Glieder im Raume. Es können daher 3 der Bestimmungsstücke als die rechtwinkligen räumlichen Koordinaten eines Punktes gedeutet werden, während die übrigen $3n$ Größen Richtungskoordinaten, also Winkel darstellen, wie schon ausführlich in der früheren Arbeit[1]) auseinandergesetzt worden ist.

Entsprechend der Anzahl der allgemeinen Koordinaten wären also in dem angenommenen Falle freiester Beweglichkeit des ganzen Gelenksystems nicht weniger als $3n + 3$ Bewegungsgleichungen, also nahezu dreimal so viel wie für das ebene Gelenksystem, aufzustellen. Während man beim dreigliedrigen ebenen System mit fünf Bewegungsgleichungen auskam, verlangt demnach das dreigliedrige räumliche Gelenksystem schon deren zwölf im Falle freiester Beweglichkeit. Es ist weiterhin leicht einzusehen, daß die Festlegung eines Punktes in einem der n Glieder die Anzahl der Bewegungsgleichungen des räumlichen Systems um 3 vermindert, so daß nur noch $3n$ Gleichungen übrig bleiben, während im gleichen Falle das ebene System nur n Gleichungen, also genau den dritten Teil erforderte.

Der Fall, daß alle Gelenke des Systems 3 Grade der Freiheit besitzen, findet sich nun bei den organischen Gelenksystemen fast nicht vor. In der Regel kommen nur einigen Gelenken 3 Grade der Freiheit zu, während die anderen geringere Beweglichkeit aufweisen. Durch diesen Umstand wird natürlich auch die Bewegungsfreiheit des ganzen Gelenksystems verringert. Denkt man beispielsweise die ganze untere Extremität des Menschen aus den drei als starr aufgefaßten Teilen: Oberschenkel, Unterschenkel und Fuß zusammengesetzt, so kann sich dieselbe, weil das Hüftgelenk drei, das Kniegelenk und Fußgelenk dagegen nur zwei Grade der Freiheit besitzen, relativ zum festgestellten Becken im ganzen mit 7 Graden der Freiheit bewegen. Eine kinetische Untersuchung der Beinbewegungen gegenüber dem im Raume fixierten Becken müßte sich also auf sieben Bewegungsgleichungen stützen. Dabei würde es

1) a. a. O. Seite 58 u. 59.

sich jedoch nicht um den allgemeinsten Fall der Bewegung des gegliederten Beins handeln, da ja das Becken und damit der Mittelpunkt des Hüftgelenks als fixiert angenommen wurden. Gibt man diesem Gelenkmittelpunkte auch noch freie Beweglichkeit im Raume, wie er sie tatsächlich bei den Bewegungen des ganzen Körpers besitzt, so kommen zu den 7 Graden der Freiheit noch 3 hinzu. Die Anzahl der nötigen Bewegungsgleichungen beträgt demnach bei ganz freier Beweglichkeit des Beins 10; sie ist also gerade doppelt so groß, als wenn man sich bei der Untersuchung auf ebene Bewegungen des Beins beschränken würde, wozu man beispielsweise bei der Untersuchung der nahezu ebenen Schwingungsbewegung des Beins beim Gehen berechtigt ist, wie ich in den beiden zuletzt veröffentlichten Teilen[1]) meiner Untersuchungen über den Gang des Menschen gezeigt habe.

Alle die Fälle beschränkterer Beweglichkeit des räumlichen Gelenksystems können aber als Sonderfälle des Gelenksystems mit lauter Gelenken von 3 Graden der Freiheit aufgefaßt werden. Man hat daher die zu den ersteren gehörenden Bewegungsgleichungen schon mit gewonnen, wenn man die zu dem Falle freiester Beweglichkeit gehörenden Gleichungen aufgestellt hat. Dies gilt auch insbesondere für die schon früher abgeleiteten Bewegungsgleichungen des ebenen Gelenksystems, wie man aus den später mitzuteilenden Resultaten erkennen wird. Aus diesem Grunde soll im Folgenden zunächst an der Annahme festgehalten werden, daß die sämtlichen Gelenke des jeweils in Betracht gezogenen Systems nur einen festen Gelenkmittelpunkt, im übrigen aber 3 Grade der Freiheit besitzen.

Für die Ableitung der Bewegungsgleichungen ebener Gelenksysteme leisteten gewisse als „reduzierte Systeme“ bezeichnete fingierte Massensysteme und bestimmte als „Hauptpunkte der einzelnen Glieder“ bezeichnete Punkte innerhalb der letzteren wesentliche Dienste. Infolge der Einführung derselben nahmen nicht nur die an und für sich verhältnismäßig komplizierten Formeln eine möglichst einfache Gestalt an, was natürlich für die Anwendung derselben von ganz besonderer Wichtigkeit ist, sondern es gewann auch die ganze Untersuchung von vornherein an Anschaulichkeit und Klarheit. Es ergaben sich genau so viel reduzierte Systeme als das Gelenksystem Glieder besitzt, denn jedes reduzierte System

1) Abhandlungen der mathem.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Band XXVIII. Nr. V und VII. 1903 und 1904.

geht aus einem bestimmten der n Glieder dadurch hervor, daß man im Mittelpunkte eines jeden Gelenks, welches das betreffende Glied begrenzt, die Masse desjenigen Abschnittes des ganzen Gelenksystems konzentriert denkt, welcher nach der Trennung dieser Gelenkverbindung von dem Gliede abfallen würde. Demnach bildet jedes Glied des Systems die Grundlage, oder mit anderen Worten, den Kern für ein bestimmtes reduziertes System. Der Schwerpunkt des letzteren stellt daher auch einen bestimmten Punkt des ihm zugrunde liegenden Gliedes dar; dies der Hauptpunkt des betreffenden Gliedes. Wie man leicht sieht, hängt die Zusammensetzung der verschiedenen reduzierten Systeme und die Lage der Hauptpunkte in keiner Weise davon ab, wie viel Grade von Bewegungsfreiheit den einzelnen Gelenken zukommen. Die reduzierten Systeme und Hauptpunkte werden daher für die räumlichen Gelenksysteme die gleiche Bedeutung gewinnen wie für die ebenen. Ja, man kann voraussagen, daß der Nutzen ihrer Einführung, der sich bei den ebenen Systemen vor allen Dingen in einer wesentlichen Vereinfachung der kinetischen Untersuchungen kund gab, bei den räumlichen Gelenksystemen infolge der an und für sich hier viel komplizierteren Verhältnisse noch viel mehr zutage treten wird.

Um die Bedeutung der reduzierten Systeme und Hauptpunkte würdigen und dieselben für die kinetische Untersuchung der Gelenksysteme verwenden zu können, muß man sich zunächst eine genaue Kenntnis ihrer Eigenschaften verschaffen. Diese sind in der früheren Arbeit zunächst für das ebene Gelenksystem ausführlich abgeleitet und bewiesen worden. Auch wurde daselbst schon zum Teil auf ihre Geltung für ein bestimmtes räumliches aus dem menschlichen Körper abgeleitetes Gelenksystem hingewiesen. Es erübrigt daher nur noch, den Beweis ihrer allgemeinen Gültigkeit bei jedem beliebigen räumlichen Gelenksystem zu erbringen. Dies soll in einem ersten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung geschehen. Die übrigen Abschnitte werden sich dann mit der Ableitung der lebendigen Kraft und der Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme beschäftigen, und zwar soll zunächst im II. Abschnitt das zweigliedrige räumliche Gelenksystem eingehend untersucht werden. Die hierbei gewonnenen Resultate lassen sich dann ohne Mühe auf das allgemeine räumliche Gelenksystem übertragen, wie man aus den Darlegungen im III. Abschnitt erkennen wird.

I. Über die Eigenschaften der reduzierten Systeme und Hauptpunkte des allgemeinen räumlichen Gelenksystems.

Die einzige Voraussetzung, welche für das allgemeine räumliche Gelenksystem im Interesse der Bestimmtheit der aus ihm hervorgehenden reduzierten Systeme gemacht werden soll, ist die, daß nach Durchtrennung irgend einer Gelenkverbindung des Systems das letztere in zwei nicht mehr miteinander zusammenhängende Teile zerfällt. Diese Voraussetzung ist damit gleichbedeutend, daß an dem Gelenksystem sich keine geschlossenen kinematischen Ketten vorfinden, und auch das ganze System nicht selbst eine solche geschlossene Kette bildet; denn es ist leicht einzusehen, daß die sämtlichen Glieder immer noch in irgend einer Weise zusammenhängen werden, falls man ein Gelenk innerhalb einer solchen kinematischen Kette durchtrennt. Beim menschlichen Körper und bei den tierischen Körpern, für deren kinetische Untersuchung sich die Methode der reduzierten Systeme vor allen Dingen sehr fruchtbar erweist, ist mit wenig Ausnahmen, wie schon oben erwähnt wurde, diese notwendige Voraussetzung erfüllt; bei den Maschinen dagegen in der Regel nicht. Man kann aber auch im letzteren Falle die reduzierten Systeme verwenden und die Zusammensetzung derselben stets zu einer eindeutig bestimmten Aufgabe machen, wenn man entweder ein an und für sich ruhendes Glied einer kinematischen Kette für die Betrachtung ganz aus dem Gelenksystem ausschaltet, oder, falls kein solches Glied vorhanden ist, an je einem Gelenk innerhalb einer solchen Kette die Verbindung gelöst denkt und dann die Annahme macht, daß bei den Bewegungen des ganzen Systems die mit dem Mittelpunkte dieses Gelenks zusammenfallenden Punkte der beiden benachbarten Glieder immer gerade die gleiche Bewegung ausführen, ohne doch miteinander in direktem Zusammenhange zu stehen; natürlich muß man dann zugleich den Einfluß dieser Gelenkverbindung auf die Bewegung der beiden Nachbarglieder durch entsprechende an diesen Punkten

angreifende äußere Kräfte ersetzt denken. Da die vorliegende Arbeit in erster Linie dem Zwecke dienen soll, die Grundlage für weitere Untersuchungen über die Kinetik des menschlichen und tierischen Körpers und seiner Teile zu bilden, so mögen vorläufig die Fälle räumlicher Gelenksysteme mit geschlossenen kinematischen Ketten außer Betracht bleiben.

Mit Ausnahme der hiermit gestellten Voraussetzung und der schon früher angeführten Annahme, daß alle Gelenke wenigstens einen festen Gelenkpunkt haben, der kurz als Gelenkmittelpunkt bezeichnet sein mag, soll das räumliche Gelenksystem keinerlei weiteren einschränkenden Bedingungen unterworfen sein. Insbesondere ist es durchaus zulässig, daß, wie beim Rumpf des Menschen, ein Glied des Systems mit mehr als zwei Gliedern in Gelenkverbindung ist, wie ja andererseits auch Glieder vorhanden sein müssen, die nur mit einem einzigen Glied in einem Gelenk zusammenhängen. Die letzteren Glieder mögen Endglieder heißen. Am menschlichen Körper stellen der Kopf, sowie die beiden Hände und Füße solche Endglieder dar, falls man die letzteren als starr auffaßt. Berücksichtigt man dagegen die Bewegungen in den Finger- und Zehengelenken, so stellen dann die Nagelglieder der sämtlichen Finger und Zehen Endglieder des ganzen Gelenksystems dar. Endlich ist auch der Fall nicht auszuschließen, daß in einem Gelenk mehr wie zwei Glieder miteinander verbunden sind.

Das Prinzip der Bildung eines reduzierten Systems wird nach den Auseinandersetzungen in der früheren Arbeit und nach dem nochmals in der Einleitung zur vorliegenden Arbeit Gesagten klar sein. Man hat sich einfach alle Gelenke an dem Glied, welches den Kern des reduzierten Systems bilden und daher kurz als Kernglied bezeichnet sein soll, durchtrennt zu denken. Dann fällt an jedem Gelenk ein Teil des ganzen Systems ab, so daß zuletzt nur noch das Kernglied von allen anderen losgelöst allein übrig bleibt. Im Mittelpunkte eines jeden dieser durchtrennten Gelenke hat man sich dann die Masse des an ihm abgefallenen Abschnittes des ganzen Gelenksystems konzentriert zu denken und dem Kernglied hinzuzufügen, so daß also schließlich infolge der Beschwerung durch alle diese Massenpunkte das Kernglied die Gesamtmasse des ganzen Gelenksystems erhalten hat. Da die Massen in den Mittelpunkten der Gelenke des Kerngliedes angebracht sind, so wird die Zusammensetzung des reduzierten

Systems in keiner Weise durch die Stellung und Bewegung der übrigen Glieder beeinflußt. Es verhält sich also das reduzierte System wie ein einziger starrer Körper. Der Schwerpunkt desselben hat daher eine feste Lage innerhalb des Kerngliedes; er stellt den Hauptpunkt des letzteren dar.

Wenn es auch im Interesse der bequemeren Bestimmung der Lage dieses Hauptpunktes innerhalb des Kerngliedes zweckmäßig ist, außer den in den Gelenkmittelpunkten angebrachten Massen der übrigen Glieder auch noch die Masse des Kerngliedes selbst in seinem eignen Schwerpunkt konzentriert zu denken, so hat man doch nicht aus dem Auge zu verlieren, daß zum Begriff des reduzierten Systems durchaus gehört, daß die Verteilung der Masse des Kerngliedes innerhalb desselben nicht geändert wird. Wie schon aus den Untersuchungen der ebenen Gelenksysteme hervorgeht, spielen die Trägheitsmomente eines reduzierten Systems eine wesentliche Rolle in den Formeln. Diese würden natürlich ganz andere Werte annehmen, wenn man die Masse des Kerngliedes auch, wie es für die Konstruktion des Schwerpunktes bequem war, in seinem eigenen Schwerpunkt konzentriert annehmen wollte. Das Trägheitsmoment des reduzierten Systems für irgend eine Achse wird stets auf die Weise erhalten, daß man zu dem ursprünglich vorhandenen Trägheitsmoment des Kerngliedes für diese Achse die Trägheitsmomente der sämtlichen in den Gelenkmittelpunkten des Kerngliedes konzentriert gedachten Massen hinzufügt. Ich würde es für überflüssig gehalten haben, noch einmal so ausführlich auf die Entstehung der reduzierten Systeme einzugehen, wenn ich nicht aus einer brieflichen Mitteilung ersehen hätte, daß eine an anderer Stelle von mir gegebene Definition der reduzierten Systeme und Hauptpunkte zu einem Mißverständnis Veranlassung gegeben hat. Auch ist in der früheren Arbeit, in welcher zum ersten Male die reduzierten Systeme und Hauptpunkte von mir eingeführt werden, nach dem Satz auf Seite 22 vergessen worden, ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß man zwar zur Bestimmung des Hauptpunktes die Masse des Kerngliedes in seinem Schwerpunkt vereinigt annehmen kann, daß dies aber sonst nicht statthaft ist, worüber allerdings andererseits sowohl der auf Seite 60 derselben Arbeit stehende Satz für das allgemeine Gelenksystem, als auch die Verwendung der Trägheitsmomente der reduzierten Systeme zur Ableitung der Bewegungs-

gleichungen der ebenen Gelenksysteme wohl nicht im Zweifel lassen konnten.

Der Begriff der reduzierten Systeme soll nun in Hinsicht auf die am Gelenksystem angreifenden Kräfte noch eine Erweiterung erfahren, welche sich im Laufe der Untersuchung als recht zweckmäßig erweisen wird. Bisher war bei der Zusammensetzung eines reduzierten Systems immer nur auf die Massen Rücksicht genommen worden. Es empfiehlt sich aber, auch die an den übrigen Gliedern angreifenden Kräfte ohne Änderung ihrer Größe und Richtung mit den Massen nach dem nächsten Gelenkmittelpunkte des Kerngliedes zu verlegen und diese parallel verschobenen Kräfte zusammen mit den direkt auf das Kernglied einwirkenden als die am reduzierten System angreifenden Kräfte aufzufassen. Der Vorteil dieser Erweiterung und die Berechtigung zu derselben wird sich später bei der Interpretation der Bewegungsgleichungen deutlich zeigen.

Die Vereinfachung der Untersuchung, welche die Einführung der reduzierten Systeme und Hauptpunkte nach sich zieht, gründet sich auf eine Reihe von Eigenschaften derselben, die schon in der früheren Arbeit für das ebene Gelenksystem und für ein spezielles räumliches System, welches bei bestimmten Bewegungen des menschlichen Körpers von Bedeutung ist, abgeleitet worden sind; dieselben besitzen nun ganz allgemeine Gültigkeit für jedes beliebige räumliche System, wie im Folgenden bewiesen werden soll. Es sind dies einmal der enge Zusammenhang der Schwerpunkte der reduzierten Systeme, d. h. also der Hauptpunkte der Glieder, sowohl mit dem Gesamtschwerpunkte des ganzen Gelenksystems als auch mit den Schwerpunkten der Teilsysteme, in welche das ganze System durch Trennung einzelner Gelenkverbindungen zerlegt werden kann — ein Zusammenhang, welcher eine möglichst einfache Bestimmung des Ortes wie auch der Bewegung des Gesamtschwerpunktes und der Schwerpunkte der Teilsysteme ermöglicht. Es ist dies weiterhin die Eigenschaft der Hauptpunkte, daß jede Drehung eines Gliedes um eine beliebige durch seinen Hauptpunkt hindurchgehende Achse mit gleichzeitiger Translationsbewegung aller übrigen Glieder den Gesamtschwerpunkt des ganzen Gelenksystems an seiner Stelle läßt — eine Eigenschaft, welche vor allen Dingen eine sehr einfache Ableitung des Ausdrucks für die lebendige Kraft relativ zum Gesamtschwerpunkt des ganzen Systems

ermöglicht. Es ist fernerhin die Eigenschaft eines jeden Hauptpunktes, als Angriffspunkt für die Kraft zu dienen, mit welcher die Schwere auf das Glied, dem der Hauptpunkt angehört, infolge des Zusammenhanges mit den übrigen Gliedern einwirkt — eine Eigenschaft, die es ermöglicht, in einfacher Weise die Elementararbeiten zu bestimmen, welche die Schwere bei irgend welchen Verrückungen des Systems leistet. Und es ist dies noch eine Reihe enger Beziehungen zwischen den Hauptpunkten und den Elementararbeiten der übrigen äußeren und inneren Kräfte des Systems bei den verschiedenen Verrückungen desselben, welche ebenso wie die Haupteigenschaft der reduzierten Systeme, eine sehr einfache und anschauliche Deutung der Bewegungsgleichungen zu ermöglichen, besser erst nach der Ableitung der Bewegungsgleichungen des räumlichen Gelenksystems ausführlich besprochen werden.

a) Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und dem Gesamtschwerpunkte des räumlichen Gelenksystems.

Den Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten der Glieder eines beliebigen räumlichen Gelenksystems und dem Gesamtschwerpunkte desselben kann man am besten beurteilen, wenn man sich zunächst die Verhältnisse an einem besonders einfachen ebenen n-gliedrigen Gelenksystem vergegenwärtigt, welches sich als die Verallgemeinerung des in der früheren Arbeit eingehend untersuchten ebenen dreigliedrigen Systems darstellt. Die einzelnen Glieder desselben seien durch lauter Scharniergelenke mit parallelen Achsen so untereinander verbunden, daß außer den beiden Endgliedern jedes mit zwei anderen, aber niemals mit mehr als zwei direkt zusammenhängt. Die Schwerpunkte der sämtlichen Glieder sollen alle in einer einzigen zu den Gelenkachsen senkrechten Ebene liegen, und die Schnittpunkte der Scharnierachsen mit dieser Ebene als Gelenkmittelpunkte aufgefaßt werden. Die Verbindungslinie der beiden Gelenkmittelpunkte eines inneren Gliedes möge als die Längsachse dieses Gliedes bezeichnet sein; dieselbe soll bei jedem Glied durch den Schwerpunkt desselben hindurchgehen. Für die beiden Endglieder soll die von dem einem Gelenkmittelpunkt ausgehende und bis an das Ende O_1 bezw. O_n des Gliedes fortgeführte Längsachse ebenfalls den Schwerpunkt enthalten. Unter diesen Voraussetzungen bilden die n Glieder eine fortlaufende kinematische

Kette, die aber offen ist, da die Endglieder nicht etwa miteinander direkt noch durch ein weiteres Gelenk verbunden sein sollen. Da die Gestalt der einzelnen Glieder für die folgenden Betrachtungen ohne Belang ist, so wird das Gelenksystem am einfachsten durch den gebrochenen Linienzug der n Längsachsen zur Darstellung gebracht, so wie es in Figur 1 auf Seite 284 für ein 6-gliedriges Gelenksystem geschehen ist. Die aufeinander folgenden Glieder sollen von einem Endglied an fortlaufend numeriert werden, und die Richtung, in welcher diese Numerierung ausgeführt worden ist, möge innerhalb eines jeden Gliedes sowohl für die Längsachse desselben als auch für die einzelnen auf der Längsachse abgegrenzten Strecken die positive Richtung bezeichnen und daher das Vorzeichen dieser Strecken bestimmen. Ist j die Nummer, welche einem Gliede zukommt, so sollen alle Strecken innerhalb dieses Gliedes, sowie auch alle anderen auf dasselbe sich beziehenden Größen, wie die Massen, Trägheitsmomente, Trägheitsradien usw. diese Nummer als Index tragen. Unter der Länge eines Gliedes werde bei den inneren Gliedern die Entfernung der beiden das Glied begrenzenden Gelenkmittelpunkte, und bei den beiden äußeren Gliedern (Endgliedern) die Entfernung des einen Gelenkmittelpunktes vom äußersten Endpunkt der Längsachse verstanden; dieselbe sei mit l_j bezeichnet. Durch den Schwerpunkt S_j eines jeden Gliedes wird seine Länge l_j in zwei Teile zerlegt; derjenige Teil von l_j, auf welchen man beim Durchlaufen des Linienzuges der Längsachsen in positiver Richtung zuerst stößt, sei mit r_j, der andere mit s_j bezeichnet. Es gilt also für diese drei dem $j$ten Gliede angehörenden Strecken die Beziehung

$$r_j + s_j = l_j. \tag{1}$$

Da der Schwerpunkt S_j des $j$ten Gliedes auf der Längsachse desselben liegen soll, so muß dies nach der Bedeutung der Hauptpunkte auch für den Hauptpunkt H_j desselben Gliedes der Fall sein. Es wird daher auch durch den Hauptpunkt die Länge eines Gliedes in zwei Strecken zerlegt, für welche schon früher die Bezeichnung Hauptstrecken des $j$ten Gliedes eingeführt worden ist. Dieselben seien mit c_j und d_j bezeichnet, wobei wiederum die erstere bei positiver Durchlaufung der Längsachsen zuerst angetroffen werden soll. Auch für die Hauptstrecken gilt die Beziehung

$$c_j + d_j = l_j. \tag{2}$$

Bezeichnet man mit m_0 die Gesamtmasse des ganzen Gelenksystems und mit m_j die Masse des $j$ten Gliedes, so folgen unmittelbar aus der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reduzierten Systeme zwischen den Hauptstrecken c_j und d_j einerseits und den Strecken l_j, r_j und s_j anderseits die Beziehungen

$$\begin{aligned} m_0 c_j &= m_j r_j + (m_{j+1} + m_{j+2} + \cdots m_n) l_j \\ m_0 d_j &= m_j s_j + (m_1 + m_2 + \cdots m_{j-1}) l_j . \end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man μ_j für das Verhältnis der Masse m_j des $j$ten Gliedes zu der Gesamtmasse m_0 des Gelenksystems, und bezeichnet die Summe einer Reihe dieser Verhältniszahlen μ, welche zu mehreren direkt aufeinanderfolgenden Gliedern gehören, einfach dadurch, daß man dem μ die beiden Indices durch ein Komma voneinander getrennt beilegt, welche zum ersten und letzten Glied der Summe gehören, so kann man die obigen Beziehungen auch kurz in der einfachen Form schreiben.

$$\begin{aligned} c_j &= \mu_j r_j + \mu_{j+1,n} l_j \\ d_j &= \mu_j s_j + \mu_{1,j-1} l_j . \end{aligned} \tag{4}$$

Unter Verwendung dieser Formeln lassen sich die Hauptstrecken c_j und d_j für alle n Glieder ohne Mühe berechnen.

In Figur 1 findet sich der Streckenzug der Längsachsen eines 6-gliedrigen Systems für eine beliebige Stellung desselben mit den eingetragenen Schwerpunkten und Hauptpunkten aufgezeichnet.

Mit Hilfe der Hauptstrecken läßt sich nun, wie früher ausführlich bewiesen wurde, die Lage des Gesamtschwerpunktes S_0 des ganzen Gelenksystems für jede Stellung der Längsachsen zu einander leicht finden. Man braucht nur beispielsweise von H_1 aus die Vektorsumme der zu den fünf übrigen Gliedern gehörenden Hauptstrecken c zu bilden, so wie es in Fig. 1 ausgeführt ist. Anstatt von H_1 auszugehen, kann man auch irgend einen anderen Hauptpunkt H_j zum Ausgangspunkt nehmen; nur muß man dann die Vektorsumme der fünf den übrigen Gliedern angehörenden Hauptstrecken bilden, welche innerhalb des Gelenksystems dem $j$ten Gliede am nächsten liegen, und dabei dieselben in einer von dem $j$ten Gliede abgewendeten Richtung nehmen. So hat man von H_3 aus die Vektorsumme $-\bar{d}_1 - \bar{d}_2 + \bar{c}_4 + \bar{c}_5 + \bar{c}_6$ zu bilden, wobei die Striche andeuten sollen, daß es sich um eine Summe von Vektoren handelt. Von H_6 aus muß man dagegen die fünf

in negativer Richtung zu nehmenden, zum ersten bis fünften Glied gehörenden Hauptstrecken d geometrisch addieren; auch das letztere ist in Fig. 1 ausgeführt worden.

Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf einen bekannten Lehrsatz, nach welchem der von einem beliebigen Punkte O aus nach dem Gesamtschwerpunkt S_0 gezogene Vektor gleich der Summe aller nach den Schwerpunkten S_j der n Glieder gezogenen

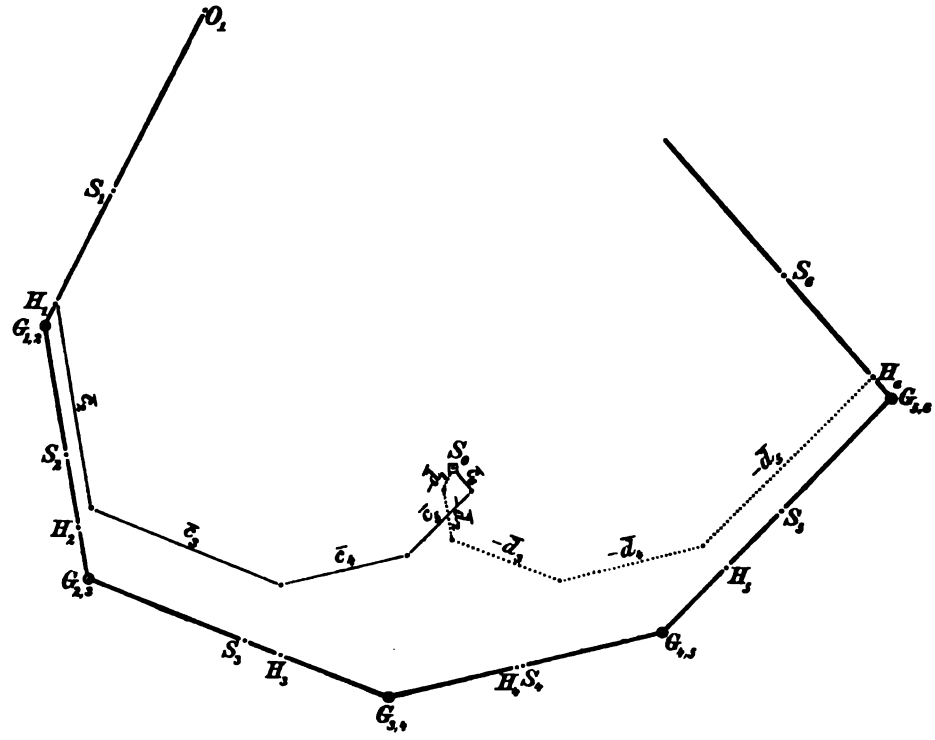


Fig. 1.

Vektoren ist, nachdem man einen jeden der letzteren im Verhältnis der Masse m_j seines Gliedes zu der Gesamtmasse m_0 des Systems verkleinert hat. Es ist also

$$\overline{OS_0} = \sum_1^n \mu_j \cdot \overline{OS_j}, \tag{5}$$

wobei wiederum die Striche über den von O ausgehenden Strecken andeuten sollen, daß es sich um eine Vektorsumme handelt.

Nimmt man als Ausgangspunkt den freien Endpunkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes und ersetzt jeden von O_1 nach einem Einzelschwerpunkte S_j gezogenen Vektor durch die zwischen O_1 und S_j sich erstreckende Vektorsumme auf dem Streckenzug der

Längsachsen, so läßt sich in Rücksicht auf (4) nach dem in der früheren Arbeit gegebenen ausführlichen Beweis für das ebene dreigliedrige Gelenksystem der obige Satz leicht einsehen. Man braucht zu diesem Zwecke nur alle Glieder der Vektorsumme auf der rechten Seite zusammenzufassen, welche sich auf Strecken mit gleichem Index beziehen. Es ergibt sich zunächst

$$\overline{O_1 S_o} = \sum_1^n \bar{c}_j. \tag{6}$$

Da der Vektor $\bar{c}_1$ von O_1 nach dem Hauptpunkte H_1 führt, so folgt für den von H_1 nach S_o gezogenen Vektor

$$\overline{H_1 S_o} = \sum_2^n \bar{c}_j. \tag{7}$$

Auf ganz entsprechende Art wird man durch (5) zu der Konstruktion des Gesamtschwerpunktes S_o von irgend einem anderen Hauptpunkte H_j aus geführt. Wählt man zu diesem Zwecke als Ausgangspunkt O einen der beiden Gelenkmittelpunkte des $j$ten Gliedes, so erhält man bei geeigneter Zusammenfassung mit Hilfe von (4) zunächst eine Summe von Vektoren, von denen einer den Verbindungsvektor des betreffenden Gelenkmittelpunktes mit H_j darstellt; läßt man diesen fort, so erhält man dann von H_j den oben angegebenen Vektorzug bis S_o. Natürlich kann man auch gleich H_j zum Ausgangspunkt in (5) wählen; dann verschwindet jener zum $j$ten Gliede gehörende Vektor von vornherein.

Da die Beziehung (5) ganz allgemein gilt, also auch in dem Falle, daß die sämtlichen Schwerpunkte nicht mehr in einer Ebene liegen, so läßt sich ohne weiteres erkennen, daß der angeführte Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und dem Gesamtschwerpunkte seine Geltung behält, wenn das der Betrachtung zugrunde gelegte Gelenksystem nicht mehr eben ist, und die Gelenke desselben mehrere Freiheitsgrade besitzen.

Es ist daher nur noch nötig, nachzuweisen, daß der Satz auch allgemein für räumliche Gelenksysteme gilt, welche den bisher gemachten vereinfachenden Voraussetzungen über die Zusammensetzung und Natur des Systems nicht entsprechen, bei denen also insbesondere an einem Glied mehr als zwei andere hängen, und durch ein Gelenk mehr als zwei Glieder miteinander in Verbindung sein können.

Zur Fixierung der Ideen soll der Beweisführung das durch Figur 2 angedeutete sehr allgemeine räumliche Gelenksystem zugrunde gelegt werden. Man wird ohne weiteres einsehen, daß die an dasselbe anknüpfenden Betrachtungen sich in ganz entsprechender Weise auf jedes beliebige andere System anwenden lassen, und

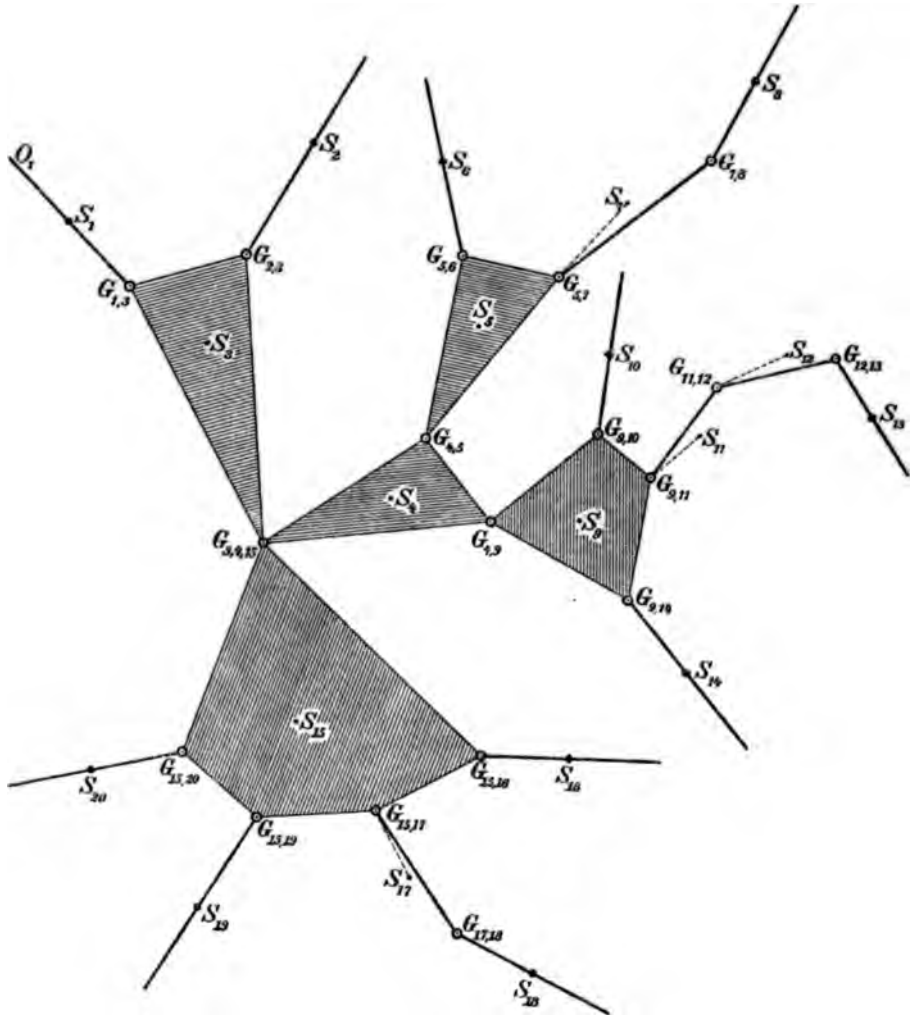


Fig. 2

daß daher die Allgemeingültigkeit des Beweises nicht dadurch beeinträchtigt wird, daß derselbe an einem bestimmten System geführt wird. Das durch Figur 2 veranschaulichte Gelenksystem besteht aus nicht weniger als 20 Gliedern, welche in bestimmter Weise mit den Nummern 1 bis 20 versehen sind. Die zu einem Glied gehörende Nummer soll auch dem Schwerpunkte und Haupt-

punkte, sowie der Masse desselben als Index beigelegt werden, während jeder Gelenkmittelpunkt mehrere Indices besitzt, nämlich die Nummern aller Glieder, die in dem betreffenden Gelenk mit einander zusammenhängen. Unter den zwanzig Gliedern befinden sich fünf, welche mit mehr als zwei anderen Gliedern gelenkig verbunden sind, nämlich 3, 4, 5, 9 und 15. Das räumliche Polygon, welches die an einem dieser fünf Glieder befindlichen Gelenkmittelpunkte verbindet, ist in Fig. 2 gezeichnet und durch Schraffierung hervorgehoben worden, um eine Verwechselung mit einer geschlossenen kinematischen Kette zu vermeiden. Es kommt in dem System außerdem ein Gelenk vor, in welchem mehr als zwei Glieder zusammenstoßen; dasselbe verbindet die Glieder 3, 4 und 15. Demnach hängt das Glied 3 mit den vier Gliedern 1, 2 4 und 15, das Glied 4 ebenfalls mit vier Gliedern, nämlich 3, 5, 9 und 15, ferner das Glied 5 mit den drei Gliedern 4, 6 und 7, das Glied 9 mit den vier Gliedern 4, 10, 11 und 14 und endlich das Glied 15 mit den sechs Gliedern 3, 4, 16, 17, 19 und 20 direkt durch ein Gelenk zusammen. Endlich gibt es in dem System nicht weniger als elf sogenannte Endglieder, die nur ein einziges Gelenk besitzen, nämlich 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14, 16, 18, 19 und 20; bei diesen ist der Gelenkmittelpunkt durch eine Gerade mit dem Schwerpunkt verbunden worden. Bei den dann noch übrig bleibenden vier Gliedern 7, 11, 12 und 17, welche nur zwei Gelenke tragen, sind die Mittelpunkte der letzteren durch eine Gerade verbunden. Diese Gerade soll jedoch, um keine vereinfachenden Annahmen zu machen, nicht den Schwerpunkt des Gliedes enthalten; der letztere ist daher noch besonders durch eine unterbrochen gezeichnete Linie mit einem der beiden Gelenkmittelpunkte des Gliedes verbunden worden. Im übrigen finden sich in Figur 2 keine weiteren Umrisse der einzelnen Glieder eingezeichnet, um dieselbe dadurch nicht unklar zu machen. Die einzelnen Gelenke können 1, 2 oder 3 Freiheitsgrade besitzen, und die ganze Figur ist natürlich nicht in der Ebene der Zeichnung, sondern räumlich zu denken.

Für ein derartiges kompliziertes Gelenksystem gilt nun die Beziehung (5) ebenfalls. Nimmt man beispielsweise als Ausgangspunkt der nach dem Gesamtschwerpunkt S_0 einerseits und den Schwerpunkten S_j der einzelnen Glieder andererseits gezogenen Vektoren den freien Endpunkt O_1 der von $G_{1,3}$ nach dem Schwer-

punkt S_1 gezogenen Geraden, so hat man also für die Ableitung der Vektorsumme auf der rechten Seite der Gleichung (5) die sämtlichen Schwerpunkte S_j mit diesem Punkte verbunden zu denken und einen jeden Vektor mit dem Verhältnis μ_j der Masse m_j des $j$ten Gliedes zu der Gesamtmasse m_0 des ganzen Systems zu multiplizieren. Um zu dem in Frage stehenden Satz über den Zusammenhang der Hauptpunkte H_j zu gelangen, ist man dann nur noch genötigt, jeden dieser Vektoren $\overline{O_1 S_j}$ durch eine Summe von Vektoren zu ersetzen, die man dadurch erhält, daß man von O_1 innerhalb des Systems nach S_j eine gebrochene Linie zieht, die über die Mittelpunkte aller zwischen dem ersten und $j$ten Glied eingeschalteten Gelenke hindurch geht und nur an diesen Gelenkmittelpunkten Ecken besitzt. Setzt man dabei noch fest, daß dieser Vektorzug nur so viel Gelenkmittelpunkte passieren soll, als unbedingt nötig ist, so ist er damit vollkommen bestimmt.

Für die Verbindung des Punktes O_1 mit dem Schwerpunkte S_2 erhält man z. B. die Vektorsumme:

$$\overline{O_1 G_{1,3}} + \overline{G_{1,3} G_{2,3}} + \overline{G_{2,3} S_2},$$

für die Verbindung von O_1 mit S_5 die Vektorsumme:

$$\overline{O_1 G_{1,3}} + \overline{G_{1,3} G_{3,4,15}} + \overline{G_{3,4,15} G_{4,5}} + \overline{G_{4,5} S_5},$$

für die Verbindung von O_1 mit S_{12} die Vektorsumme:

$$\overline{O_1 G_{1,3}} + \overline{G_{1,3} G_{3,4,15}} + \overline{G_{3,4,15} G_{4,9}} + \overline{G_{4,9} G_{9,11}} + \overline{G_{9,11} G_{11,12}} + \overline{G_{11,12} S_{12}},$$

für die Verbindung von O_1 mit S_{18} die Vektorsumme:

$$\overline{O_1 G_{1,3}} + \overline{G_{1,3} G_{3,4,15}} + \overline{G_{3,4,15} G_{15,17}} + \overline{G_{15,17} G_{17,18}} + \overline{G_{17,18} S_{18}}$$

usf. Es würde zu weit führen, wollte man alle diese Vektorsummen hier niederschreiben. An der Hand der Figur 2 überzeugt man sich leicht, daß man stets zu einer ganz bestimmten Summe von Vektoren geführt wird, und daß dies auch bei jedem anderen Gelenksystem, mag es so kompliziert gestaltet sein, wie es wolle, immer nur auf eine einzige ganz bestimmte Art möglich ist, sofern nur die oben gemachte Veraussetzung erfüllt ist, daß das System keine geschlossenen kinematischen Ketten enthält.

Denkt man sich nun für das durch Figur 2 dargestellte Gelenksystem in der angegebenen Weise die sämtlichen von O_1 nach den zwanzig Einzelschwerpunkten S_j gehenden Vektorzüge ausgeführt, so kann man folgendes konstatieren.

Mit Ausnahme des von O_1 nach S_1 gehenden Vektors passieren alle Vektorzüge den Gelenkmittelpunkt $G_{1,3}$. Es haben also dieselben den Vektor $\overline{O_1 G_{1,3}}$ gemeinsam. Beachtet man nun, daß die einzelnen Teile des nach S_j gehenden Vektorzuges mit der Verhältniszahl μ_j zu multiplizieren sind und faßt aus der ganzen Vektorsumme die innerhalb des Gliedes 1 liegenden Vektoren für sich zusammen, so erhält man die Vektorsumme

$$\mu_1 \overline{O_1 S_1} + \mu_{2,20} \overline{O_1 G_{1,3}}, \tag{8}$$

wobei nach der früheren Festsetzung für die fortlaufende Summe aller Verhältniszahlen μ vom zweiten bis zum 20ten Glied kurz $\mu_{2,20}$ gesetzt ist. Man kann auch sagen $\mu_{2,20}$ ist die Summe aller Zahlen μ, welche zu den Gliedern des Systems gehören, die vom ersten Glied abfallen, sobald man das Gelenk $G_{1,3}$ durchtrennt; das sind aber im vorliegenden Fall die sämtlichen anderen Glieder.

Der Hauptpunkt H_1 des ersten Gliedes stellt den Schwerpunkt des ersten reduzierten Systems dar. Das letztere wird dadurch erhalten, daß man in $G_{1,3}$ die Massen der sämtlichen bei Durchtrennung von $G_{1,3}$ abfallenden Glieder konzentriert und dem ersten Gliede hinzugefügt denkt; das sind aber hier die Massen m_2, m_3, $m_4 \ldots m_{20}$. Nach dem allgemein gültigen Satze (5) erhält man daher für den Vektor $\overline{O_1 H_1}$, welcher den Ausgangspunkt O_1 mit dem Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes verbindet, gerade den Ausdruck (8).

Während innerhalb des ersten Gliedes von jedem nach einem Schwerpunkt S_j gehenden Vektorzug wenigstens ein Teil verläuft, enthält das zweite Glied aus der ganzen Summe nur den Vektor $\overline{G_{2,3} S_2}$; dieser ist mit der Zahl μ_2 zu multiplizieren, so daß man erhält

$$\mu_2 \cdot \overline{G_{2,3} S_2}. \tag{9}$$

Dieses Produkt stellt aber gerade den von $G_{2,3}$ nach dem Hauptpunkte H_2 gezogenen Vektor $\overline{G_{2,3} H_2}$ dar, was man unmittelbar daraus erkennt, daß bei der Zusammensetzung des zweiten reduzierten Systems mit Ausnahme von m_2 die sämtlichen Massen der übrigen Glieder in $G_{2,3}$ selbst konzentriert anzunehmen sind.

Im dritten Gliede verlaufen dreierlei verschiedene Vektoren der ganzen Summe, nämlich die Vektoren $\overline{G_{1,3} G_{2,3}}$, $\overline{G_{1,3} S_3}$ und $\overline{G_{1,3} G_{3,4,15}}$; dieselben gehen also alle drei vom Gelenkpunkte $G_{1,3}$ aus. Der Vektor $\overline{G_{1,3} G_{2,3}}$ kommt nur in dem von O_1 nach S_2 führenden, und der Vektor $\overline{G_{1,3} S_3}$ nur in dem von O_1 nach S_3

gehenden Vektorzuge vor; der erstere ist also allein mit μ_2, der letztere allein mit μ_3 zu multiplizieren. Der Vektor $\overline{G_{1,3}G_{3,4,15}}$ tritt dagegen als Bestandteil der sämtlichen nach dem vierten bis zum 20ten Schwerpunkt führenden Vektorzüge auf; derselbe ist daher mit der Summe sämtlicher μ mit Ausnahme der drei ersten zu multiplizieren. Bezeichnet man diese letztere Summe wiederum kurz durch $\mu_{4,20}$, so erhält man aus der ganzen Vektorsumme für das dritte Glied den Bestandteil

$$(10) \qquad \mu_2 \cdot \overline{G_{1,3}G_{2,3}} + \mu_3 \overline{G_{1,3}S_3} + \mu_{4,20} \overline{G_{1,3}G_{3,4,15}}.$$

Beachtet man, daß beim dritten reduzierten System in $\overline{G_{1,3}}$ die Masse m_1, in $G_{2,3}$ die Masse m_2 und in $G_{3,4,15}$ die Massen m_4, m_5, m_6 ... m_{20} konzentriert sind, und daß der Schwerpunkt dieses Systems mit dem Hauptpunkt H_3 des dritten Gliedes indentisch ist, so erkennt man aus (5), daß (10) mit dem Vektor $G_{1,3}H_3$ übereinstimmt.

So kann man Schritt für Schritt weiter gehen und zeigen, daß der Teil der ganzen Vektorsumme, welcher nur Vektoren enthält, die zu einem bestimmten der zwanzig Glieder gehören, allemal die Bedeutung des von einem Gelenkmittelpunkt dieses Gliedes nach dem Hauptpunkt desselben gehenden Vektors besitzt. Welcher Gelenkmittelpunkt des betreffenden Gliedes, das die Nummer j tragen soll, dabei in Frage kommt, ist leicht zu erkennen. Es ist derjenige, welcher dem von O_1 nach dem Schwerpunkte S_j dieses Gliedes gehenden Vektorzuge angehört. Man kann von ihm sagen, daß er innerhalb des ganzen Gelenksystems dem 1. Gliede am nächsten liegt, oder mit anderen Worten, daß er im System die Verbindung des $j$ten Gliedes mit dem ersten herstellt; denn wenn man das betreffende Gelenk durchtrennt, so wird dadurch auch die Verbindung mit dem 1. Gliede unterbrochen, was bei Durchtrennung eines anderen Gelenkes des $j$ten Gliedes nicht der Fall sein würde.

Faßt man, um nur noch ein Beispiel anzuführen, alle Glieder der ganzen Vektorsumme zusammen, welche dem 9. Gliede angehören, so findet man viererlei verschiedene Vektoren, nämlich $\overline{G_{1,9}S_9}$, $\overline{G_{4,9}G_{9,10}}$, $\overline{G_{4,9}G_{9,11}}$ und $\overline{G_{4,9}G_{9,14}}$. Wie man sieht, gehen dieselben alle vom Gelenkmittelpunkt $G_{4,9}$ aus; dieser gehört aber gerade zu demjenigen Gelenk, welches im System die Verbindung des 9. Gliedes mit dem 1. herstellt. Der Vektor $\overline{G_{4,9}S_9}$ kommt

allein in dem von O_1 nach S_9 führenden Vektorzuge vor; er ist also nur mit μ_9 zu multiplizieren. Der Vektor $\overline{G_{4,9}G_{9,10}}$ gehört nur dem von O_1 nach S_{10}, und der Vektor $\overline{G_{4,9}G_{9,14}}$ nur dem von O_1 nach S_{14} führenden Vektorzuge an; der erstere ist daher mit μ_{10}, der letztere mit μ_{14} zu multiplizieren. Dagegen ist der Vektor $\overline{G_{4,9}G_{9,11}}$ gemeinsamer Bestandteil der nach S_{11}, S_{12} und S_{13} führenden Vektorzüge und ist daher mit der Summe $\mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13}$ zu multiplizieren, für welche kurz $\mu_{11,13}$ geschrieben werden soll. Demnach gehört zu dem 9. Gliede die Vektorsumme

$$(11) \quad \mu_9 \cdot \overline{G_{4,9}S_9} + \mu_{10} \cdot \overline{G_{4,9}G_{9,10}} + \mu_{11,13} \cdot \overline{G_{4,9}G_{9,11}} + \mu_{14} \cdot \overline{G_{4,9}G_{9,14}}.$$

Beim 9. reduzierten System sind in $G_{4,9}$ die Massen aller Glieder angebracht, welche nach Durchtrennung dieses Gelenks von dem 9. Gliede abfallen. Da der Vektor nach dem Hauptpunkte des 9. Gliedes von eben diesem Gelenkmittelpunkt ausgeht, so ist es nicht nötig, diese Massen besonders aufzuführen. Außerdem findet sich in $G_{9,10}$ die Masse m_{10}, in $G_{9,11}$ die Massensumme $m_{11} + m_{12} + m_{13}$ und in $G_{9,14}$ die Masse m_{14} konzentriert. Der nach dem Schwerpunkte H_9 des 9. reduzierten Systems von $G_{4,9}$ aus gezogene Vektor besitzt daher nach (5) gerade den Wert (11).

Bezeichnet man die von den Gelenkmittelpunkten eines Glieds nach seinem Hauptpunkte gezogenen Vektoren in der Richtung vom Gelenkmittelpunkt zum Hauptpunkt wieder allgemein als Hauptstrecken dieses Gliedes und sagt von einer Hauptstrecke, daß sie innerhalb des Gelenksystems einem anderen Gliede am nächsten liegt, wenn sie gerade von dem Gelenk ausgeht, welches im System die unmittelbare oder mittelbare Verbindung der beiden Glieder herstellt, so kann man die auf der rechten Seite von (5) stehende Vektorsumme im vorliegenden Falle ersetzen durch die Vektorsumme aus $\overline{O_1H_1}$ und den sämtlichen zu den neunzehn übrigen Gliedern gehörenden Hauptstrecken, welche innerhalb des Systems dem 1. Gliede am nächsten liegen. Nimmt man als Ausgangspunkt nicht O_1, sondern den Hauptpunkt H_1 des 1. Gliedes, so verschwindet der erste Vektor, und man hat von H_1 aus nur noch die Vektorsumme der neunzehn Hauptstrecken zu bilden, um zu dem Gesamtschwerpunkte S_0 des ganzen Systems zu gelangen.

Daß man zu ganz entsprechenden Ergebnissen kommen muß, wenn man nicht von O_1, sondern vom freien Endpunkt eines der

übrigen Endglieder ausgeht, ist ohne weiteres klar; es kommen nur dann in den einzelnen Gliedern Hauptstrecken in Frage, die im allgemeinen an anderen Gelenkmittelpunkten beginnen, nämlich immer an denen, welche innerhalb des Systems dem Ausgangsgliede am nächsten liegen. Es erübrigt daher nur noch zu untersuchen, wie sich die Verhältnisse stellen, wenn man von einem im Innern des Systems befindlichen Glied ausgeht und als Anfangspunkt der einzelnen Vektoren in (5) etwa einen an diesem Glied befindlichen Gelenkmittelpunkt nimmt.

Setzt man z. B. in (5) für O den Gelenkmittelpunkt $G_{4,9}$ und bildet von diesem aus sowohl den geradlinigen Vektor nach dem Gesamtschwerpunkt S_0, als auch die innerhalb des Systems über die zwischenliegenden Gelenkmittelpunkte führenden Vektorzüge nach den Einzelschwerpunkten S_j, so wird man bei geeigneter Gruppierung der Glieder auf der rechten Seite von (5) ebenfalls zu einer einfachen Konstruktion des Gesamtschwerpunktes mit Hilfe der Hauptstrecken geführt. Denn es läßt sich nach den bisherigen Auseinandersetzungen leicht einsehen, daß die aus der ganzen Vektorsumme herausgegriffenen Glieder, welche nur Vektoren mit dem gleichen Index enthalten, zusammen eine Hauptstrecke des Gliedes von diesem Index ergeben, und zwar diejenige Hauptstrecke, welche innerhalb des Systems dem Ausgangspunkt $G_{4,9}$ am nächsten liegt. Es kommt dabei auf dasselbe hinaus, ob man den Gelenkmittelpunkt $G_{4,9}$ dem 4. oder dem 9. Gliede zurechnet. Vergleicht man den vorliegenden Fall mit dem zuerst betrachteten, bei welchem der Punkt O_1 des 1. Gliedes den Ausgangspunkt für alle Vektorzüge bildete, so erkennt man, daß jetzt nur bei den Gliedern 1, 3 und 4 andere Hauptstrecken auftreten, während man bei den übrigen Gliedern ohne Ausnahme zu den früheren Hauptstrecken geführt wird. An diesen drei Gliedern kommen jetzt in Frage bezüglich die Hauptstrecken $\overline{G_{1,3}H_1}$, $\overline{G_{3,4,15}H_3}$ und $\overline{G_{4,9}H_4}$, während sich z. B. beim 9. Gliede wie im ersten Falle die Hauptstrecke $\overline{G_{4,9}H_9}$ einstellt. Geht man nicht von $G_{4,9}$, sondern vom Hauptpunkte H_4 aus, so verschwindet die Hauptstrecke $\overline{G_{4,9}H_4}$, während die übrigen Hauptstrecken sich nicht ändern; man hat daher von H_4 nur die Summe der letzteren Hauptstrecken, welche zu den übrigen neunzehn Gliedern gehören, zu bilden, um zu dem Gesamtschwerpunkte S_0 zu gelangen. Wählt man dagegen H_9 als Ausgangspunkt, so verschwindet $\overline{G_{4,9}H_9}$,

und es bleibt wiederum nur noch die Summe der neunzehn Hauptstrecken übrig, welche zu den sämtlichen anderen Gliedern gehören und innerhalb des Systems dem 9. Gliede am nächsten liegen. Das Prinzip der Konstruktion des Gesamtschwerpunktes bleibt also im wesentlichen dasselbe, wenn man von dem Hauptpunkte eines inneren Gliedes, als wenn man von dem Hauptpunkte eines Endgliedes ausgeht. Es gilt daher ganz allgemein der

Satz: Bei jedem beliebigen räumlichen Gelenksystem wird man stets zu dem Gesamtschwerpunkte geführt, wenn man vom Hauptpunkte irgend eines der n Glieder aus die Vektorsumme der $n-1$ zu den übrigen Gliedern gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Systems dem Gliede, von dessen Hauptpunkt man ausgeht, am nächsten liegen; dabei ist jede Hauptstrecke in der von dem betreffenden Gliede abgewendeten Richtung zu nehmen.

b) Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und den Schwerpunkten der Teilsysteme.

Der Zusammenhang der Hauptpunkte mit den Schwerpunkten bestimmter Teile des ganzen Gelenksystems ist in der früheren Arbeit noch nicht untersucht worden. Es ist daher zweckmäßig, sich diese Beziehungen zunächst für das ebene Gelenksystem abzuleiten; die Verallgemeinerung auf das allgemeine räumliche Gelenksystem ist dann leicht zu machen.

Es mag der Betrachtung wieder das durch Figur 1 dargestellte sechsgliedrige ebene Gelenksystem zugrunde gelegt werden. In Figur 3 ist dasselbe in der früheren Weise noch einmal mit dem von H_1 nach dem Gesamtschwerpunht S_0 führenden Vektorzuge aufgezeichnet worden. Die Eckpunkte dieses Vektorzuges, welche hier mit $H_{1,2}$, $H_{1,3}$, $H_{1,4}$ und $H_{1,5}$ bezeichnet sind, haben eine ganz bestimme Bedeutung.

So stellt $H_{1,2}$ den Hauptpunkt des aus dem ersten und zweiten Gliede bestehenden Systems dar. Derselbe hat nur so lange eine feste Lage in diesem zweigliedrigen System, als die beiden Glieder zu einander festgestellt sind, so daß sie sich wie ein einziger starrer Körper verhalten; bei Beweglichkeit des Gelenks $G_{1,2}$ stellt $H_{1,2}$ dagegen einen gegen beide Glieder veränderlichen Punkt dar. Daß derselbe als Hauptpunkt des Gelenksystems der zwei ersten Glieder

aufgefaßt werden muß, geht unmittelbar aus seiner Beziehung zum Gesamtschwerpunkte S_0 hervor. Denn man gelangt zu S_0, indem man von $H_{1,2}$ aus die Vektorsumme der zu den vier übrigen Gliedern gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Systems dem ersten und zweiten Gliede am nächsten liegen. Daraus ergibt sich aber rückwärts, daß er der Schwerpunkt des aus den beiden ersten Gliedern zusammengesetzten reduzierten Systems ist, d. h. des Massensystems, welches man erhält, indem

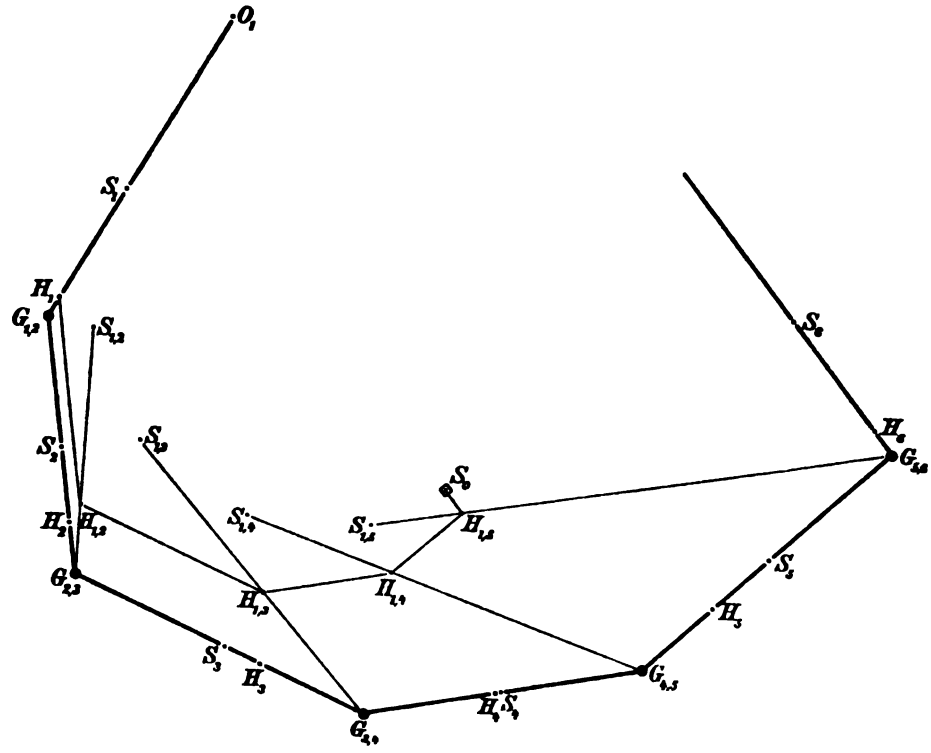


Fig. 3.

man in $G_{2,3}$ die Massen m_3, m_4, m_5 und m_6 konzentriert und dem zweiten Gliede, und damit dem aus dem ersten und zweiten Gliede bestehenden Teilsystem hinzugefügt denkt. Um $H_{1,2}$ zu finden, hätte man also $G_{2,3}$ mit dem Schwerpunkte $S_{1,2}$ des aus den beiden ersten Gliedern bestehenden Gelenksystems zu verbinden und diese Verbindungslinie im Verhältnis $(m_1+m_2):(m_3+m_4+m_5+m_6)$ zu teilen. Hieraus geht aber hervor, daß $S_{1,2}$ auf der Verlängerung der Strecke $\overline{G_{2,3}H_{1,2}}$ liegt und zwar so, daß

$$\overline{G_{2,3}S_{1,2}} = \frac{1}{\mu_{1,2}} \cdot \overline{G_{2,3}H_{1,2}}. \tag{12}$$

Wie $H_{1,2}$ als veränderlicher Hauptpunkt des aus dem ersten und zweiten Glied bestehenden Gelenksystems aufzufassen ist, so hat $H_{1,3}$ die Bedeutung des, natürlich ebenfalls veränderlichen Hauptpunktes des Systems der drei ersten Glieder. Weiterhin stellen $H_{1,4}$ und $H_{1,5}$ die veränderlichen Hauptpunkte der Teilsysteme dar, welche sich aus den vier ersten und aus den fünf ersten Gliedern zusammensetzen. Davon kann man sich ohne alle Rechnung überzeugen, wenn man von dem Gesamtschwerpunkte S_0 aus rückwärts zu den Hauptpunkten übergeht.

Da man von H_1 zu S_0 gelangt, indem man von H_1 die Vektorsumme $\sum_{2}^{6} \bar{c}_j$ bildet, so wird man rückwärts zu H_1 geführt, wenn man von S_0 aus diese fünf Hauptstrecken in entgegengesetzter Richtung an einander setzt, also die Vektorsumme $-\sum_{6}^{2} \bar{c}_j$ bildet. Wenn man nun einige aufeinanderfolgende Glieder zu einem System vereinigt denkt, so wird hierdurch die Lage der Hauptpunkte und die Größe der Hauptstrecken bei den übrigen Gliedern in keiner Weise geändert. Dies folgt ohne weiteres aus der Zusammensetzung der reduzierten Systeme, welche zu diesen letzteren Gliedern gehören. Nimmt man also z. B. die drei ersten Glieder zu einem System zusammen, so muß man zu dem Hauptpunkte desselben gelangen, wenn man von S_0 aus die in entgegengesetzter Richtung zu nehmenden Hauptstrecken $\bar{c}_6$, $\bar{c}_5$ und $\bar{c}_4$ nach einander abträgt; derselbe fällt also, wie man aus Figur 3 erkennt, mit $H_{1,3}$ zusammen. Faßt man die vier ersten Glieder oder die fünf ersten Glieder für sich zu einem System zusammen, so hat man von S_0 aus entweder die Vektorsumme $-\bar{c}_6 - \bar{c}_5$ oder nur den Vektor $-\bar{c}_6$ abzutragen. Man kommt dann auf $H_{1,4}$ oder $H_{1,5}$, so daß also diese Punkte in der Tat die veränderlichen Hauptpunkte der beiden Systeme darstellen. Würde man schließlich alle sechs Glieder des Systems zusammennehmen, so käme man auf diese Weise zu dem Resultat, daß der Gesamtschwerpunkt S_0 mit dem Hauptpunkt des ganzen Gelenksystems identisch ist. Das stimmt aber vollständig mit der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reduzierten Systeme überein; denn das zu dem System der sechs Glieder gehörende reduzierte System ist von dem ganzen Gelenksystem nicht verschieden.

Da das zum Teilsystem der drei ersten Glieder gehörende reduzierte System dadurch erhalten wird, daß man in $G_{3,4}$ die Massensumme $m_4 + m_5 + m_6$ konzentriert denkt, so muß der Schwerpunkt $S_{1,3}$ dieses Teilsystems auf der Verlängerung von $\overline{G_{3,4}H_{1,3}}$ liegen, und zwar so, daß

$$\overline{G_{3,4}S_{1,3}} = \frac{1}{\mu_{1,3}} \cdot \overline{G_{3,4}H_{1,3}}. \tag{13}$$

Bei der Zusammensetzung des zu dem Teilsystem der vier ersten Glieder gehörenden reduzierten Systems hat man in $G_{4,5}$ die Massen m_5 und m_6 zu konzentrieren und dem System der vier ersten Glieder hinzuzufügen. Deshalb liegt $H_{1,4}$ auf der Verbindungslinie von $G_{4,5}$ und $S_{1,4}$ so, daß

$$\overline{G_{4,5}S_{1,4}} = \frac{1}{\mu_{1,4}} \cdot \overline{G_{4,5}H_{1,4}}. \tag{14}$$

Schließlich erkennt man auch, daß $G_{5,6}$, $H_{1,5}$ und $S_{1,5}$ in gerader Linie liegen müssen, und daß

$$\overline{G_{5,6}S_{1,5}} = \frac{1}{\mu_{1,5}} \cdot \overline{G_{5,6}H_{1,5}}. \tag{15}$$

Hieraus ergibt sich also ein sehr einfaches Mittel, von dem Hauptpunkte eines aus mehreren aufeinanderfolgenden Gliedern bestehenden Teilsystems zu dem Schwerpunkte des letzteren zu gelangen. Die Lage des betreffenden Systemhauptpunktes, welche sich mit den Gelenkstellungen ändert, ist aber leicht mit Hilfe der Hauptstrecken abzuleiten, wie man aus Figur 3 erkennt. Man braucht zu diesem Zwecke nur von dem Hauptpunkte eines Gliedes dieses Teilsystems aus die Vektorsumme der zu den übrigen Gliedern desselben gehörenden Hauptstrecken zu bilden, welche innerhalb des Teilsystems dem Gliede, von dessen Hauptpunkt man ausgeht, am nächsten liegen. Die Hauptpunkte der Teilsysteme hängen also auf genau dieselbe Weise mit den Hauptpunkten ihrer Glieder zusammen, wie der Gesamtschwerpunkt mit den Hauptpunkten der sämtlichen Glieder. Der Schwerpunkt des ganzen Gelenksystems stellt daher gewissermaßen nur einen Spezialfall eines Systemhauptpunktes dar. Es ist infolgedessen kein Wunder, wenn die Hauptpunkte der einzelnen Glieder und die Systemhauptpunkte in der Kinetik der Gelenksysteme eine gleich wichtige Rolle spielen, wie der Schwerpunkt in der Kinetik eines einzigen starren Körpers.

Da bei der Ableitung des geschilderten Zusammenhanges zwischen den Hauptpunkten und Schwerpunkten der aus dem

ganzen Gelenksystem herausgegriffenen Teilsysteme in keiner Weise darauf Rücksicht genommen wurde, daß die einzelnen Glieder durch Scharniergelenke mit parallelen Achsen verbunden sein sollten, so wird derselbe auch noch bestehen bleiben, wenn man die Gelenke als solche von zwei und drei Freiheitsgraden mit festem Gelenkmittelpunkt auffaßt, und somit von dem ebenen Gelenksystem zu einem räumlichen von entsprechender Zusammensetzung übergeht. Es ist daher nur noch nötig, zu zeigen, daß eine ganz gleiche Beziehung zwischen den Hauptpunkten und den Schwerpunkten der Teilsysteme eines jeden beliebigen räumlichen Gelenksystems bestehen muß.

Um diesen Nachweis zu führen, soll wieder auf das sehr allgemeine durch Figur 2 veranschaulichte System zurückgegriffen werden. Da die Anzahl der Teilsysteme, welche man hier aus dem ganzen System absondern kann, infolge der großen Anzahl der Glieder und der Mannigfaltigkeit der Gelenkverbindungen sehr groß ist, so wird es genügen, den angedeuteten Zusammenhang zwischen Hauptpunkten und Schwerpunkten an einem einzigen möglichst vielgliedrigen Teilsystem festzustellen.

Es soll zu diesem Zwecke das größere der beiden Systeme in Betracht gezogen werden, in welche das ganze Gelenksystem zerfällt, wenn man die Gelenkverbindung $G_{4,9}$ durchtrennt. Dasselbe setzt sich aus den Gliedern 1 bis 8 und 15 bis 20 zusammen. Denkt man sich dieses Teilsystem bei irgend einer Stellung seiner einzelnen Glieder zu einander für einen Augenblick als starr, so verhält sich dasselbe wie ein einziges Glied des ganzen Gelenksystems; außer demselben sind dann nur noch die sechs Glieder 9 bis 14 vorhanden, von denen das Glied Nr. 9 mit dem als erstes Glied aufzufassenden Teilsystem durch das Gelenk $G_{4,9}$ zusammenhängt. Zur Konstruktion des Gesamtschwerpunktes S_0 des ganzen Gelenksystems hat man in diesem Falle nur sieben Hauptpunkte nötig, nämlich den Hauptpunkt H_t des genannten Teilsystems und die sechs Hauptpunkte H_9, H_{10}, H_{11}, H_{12}, H_{13} und H_{14} der Glieder 9 bis 14; die letzteren haben innerhalb der sechs Glieder genau dieselbe Lage wie in dem Falle freier Beweglichkeit der sämtlichen zwanzig Glieder des Systems; denn die aus diesen sechs C
hervorgehenden sechs reduzierten Systeme sind
abhängig, ob das Teilsystem starr ist, oder s
system darstellt. Zur Konstruktion von S_0 hat

H_t aus die Vektorsumme der zu den Gliedern 9 bis 14 gehörenden Hauptstrecken zu bilden, welche innerhalb des Gelenksystems dem Gelenk $G_{4,9}$ am nächsten liegen, und zwar in einer von diesem Gelenk abgekehrten Richtung. Trägt man rückwärts vom Gesamtschwerpunkte S_0 aus diese sechs Hauptstrecken in umgekehrter Richtung nach einander ab, so muß man infolgedessen zum Hauptpunkte H_t des Teilsystems gelangen, gleichgültig wie die Glieder desselben zu einander gestellt sind.

Andererseits gelangt man aber auch zu dem Hauptpunkte H_t, wenn man von dem Hauptpunkt irgend eines Gliedes des Teilsystems ausgeht und die Vektorsumme aller zu den übrigen Gliedern des Teilsystems gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Teilsystems dem betreffenden Gliede am nächsten liegen, und zwar wiederum in einer von diesem Gliede abgewendeten Richtung. Dies geht unmittelbar daraus hervor, daß H_t einen Eckpunkt des ganzen Vektorzuges darstellt, den man zur Konstruktion des Gesamtschwerpunktes vom Hauptpunkte irgend eines Gliedes des Teilsystems aus in der Weise bildet, daß die zu den Gliedern 9 bis 14 gehörenden Hauptstrecken zuletzt kommen.

Der Hauptpunkt H_t hat nun die Bedeutung des Schwerpunktes des reduzierten Systems, welches aus dem betreffenden Teilsystem hervorgeht. Zur Bildung des letzteren hat man nur in $G_{4,9}$ die Massen der sechs Glieder 9 bis 14 konzentriert und dem System hinzugefügt zu denken. Daher muß H_t auf der Verbindungslinie des Gelenkmittelpunktes $G_{1,9}$ mit dem Schwerpunkte S_t des Teilsystems liegen und dieselbe im umgekehrten Verhältnis der Summe der sechs Massen m_9 bis m_{14} und der Masse des Teilsystems teilen. Bezeichnet man die erstere kurz mit $m_{9,14}$ und die letztere mit m_t, so hat man also

$$\overline{G_{4,9}H_t} : \overline{H_tS_t} = m_t : m_{9,14}. \tag{16}$$

Beachtet man, daß $m_t + m_{9,14}$ der Gesamtmasse m_0 des ganzen Gelenksystems gleich ist, und bezeichnet mit μ_t kurz das Verhältnis $m_t : m_0$, so erkennt man leicht, daß aus (16) hervorgeht

$$\overline{G_{4,9}S_t} = \frac{1}{\mu_t} \cdot \overline{G_{4,9}H_t}. \tag{17}$$

Diese Beziehung stellt sich direkt als die Verallgemeinerung der für das oben in Betracht gezogene ebene Gelenksystem geltenden Beziehungen (12) bis (15) dar. Man hat daher die ganz allgemein gültigen Sätze:

Satz: Denkt man sich bei einem beliebigen ebenen oder räumlichen Gelenksystem alle Glieder zu einem Teilsystem zusammengefaßt, welche beim Durchtrennen eines Gelenks vom ganzen System abfallen würden, so erhält man den in seiner Lage veränderlichen Hauptpunkt dieses Teilsystems, indem man von dem Hauptpunkte eines Gliedes des Teilsystems aus die Vektorsumme der zu den übrigen Gliedern des Teilsystems gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Systems dem Gliede, von dessen Hauptpunkt man ausgeht, am nächsten liegen, und zwar in einer von diesem Gliede abgewendeten Richtung.

Den Zusammenhang zwischen dem Hauptpunkte und dem Schwerpunkte eines Teilsystems ergibt der folgende

Satz: Der Schwerpunkt eines solchen im vorigen Satze näher bezeichneten Teilsystems liegt stets auf der Verlängerung des Vektors, welcher den Mittelpunkt des Trennungsgelenks mit dem Hauptpunkte des Teilsystems verbindet. Sein Abstand vom Mittelpunkt des Trennungsgelenks verhält sich zum Abstand des Hauptpunktes von demselben Gelenkmittelpunkt wie die Masse des ganzen Gelenksystems zur Masse des Teilsystems.

c) Beziehungen der Hauptpunkte zu den Verrückungen des räumlichen Gelenksystems.

In der früheren Arbeit ist sowohl für die ebenen Gelenksysteme als auch für ein spezielles räumliches System nachgewiesen worden, daß die Hauptpunkte auch in sehr naher Beziehung zu bestimmten Verrückungen des ganzen Systems relativ zum Gesamtschwerpunkt stehen. Erteilt man nämlich dem ganzen System eine Verrückung, bei welcher nur ein Glied durch Drehen seine Orientierung im Raum ändert, während alle anderen Glieder reine Translationsbewegungen ausführen, und verlangt, daß dabei der Gesamtschwerpunkt an seiner Stelle bleibt, so muß die Drehung des betreffenden Gliedes um eine Achse durch seinen Hauptpunkt stattfinden. Die Drehung dieses Gliedes braucht durchaus nicht unendlich klein zu sein; auch bei beliebig ausgedehnter Drehung um Achsen durch den Hauptpunkt eines Gliedes mit gleichzeitiger Translation aller anderen Glieder behält der Gesamtschwerpunkt seinen Ort im Raume bei.

Dieser Satz ist früher auf etwas umständlichem Wege für das ebene Gelenksystem bewiesen worden, bevor der unter a) geschilderte Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und dem Gesamtschwerpunkte gewonnen war. Nach Kenntnis dieses Zusammenhanges ist dagegen der Satz unmittelbar einzusehen. Erteilt man beispielsweise dem durch Figur 1 dargestellten Gelenksystem eine Drehung um eine Achse durch den Hauptpunkt H_1 des ersten Gliedes und läßt für die anderen Glieder, welche dabei natürlich nicht in Ruhe bleiben können, nur Translationsbewegungen zu, so werden mit Ausnahme der Längsachse des ersten Gliedes alle Längsachsen ihre Richtung im Raume beibehalten und nur Parallelverschiebungen erfahren. Daraus folgt aber ohne weiteres, daß der vom festbleibenden Punkte H_1 aus nach dem Gesamtschwerpunkte S_0 führende Vektorzug der Hauptstrecken $\overline{c_2}$ bis $\overline{c_6}$ bei der Bewegung vollkommen ruhig und daher auch der Endpunkt S_0 desselben an seiner Stelle bleibt. Das gilt sowohl, wenn das Gelenksystem eben ist, als wenn die Gelenke mehrere Freiheitsgrade besitzen. Im ersten Falle kann natürlich die Drehung des ersten Gliedes nur um eine zu den Scharnierachsen parallele Achse durch H_1 stattfinden. Beim räumlichen Gelenksystem kann dagegen die durch H_1 gehende Drehungsachse ganz beliebige Richtung besitzen. Voraussetzung ist dabei nur, daß die übrigen Glieder tatsächlich die Drehung des einen mit Translationsbewegung begleiten können. Das ist aber sicher der Fall, wenn, wie zunächst angenommen wurde, die sämtlichen Gelenke des räumlichen Gelenksystems drei Freiheitsgrade besitzen. Es ist auch gar nicht nötig, daß die Achse durch H_1 ihre Richtung bei einer endlichen Drehung des ersten Gliedes beibehält. Auch wenn die Drehung um H_1 ganz allgemeiner Natur ist, indem sie um stetig wechselnde instantane Achsen stattfindet, wird doch der Gesamtschwerpunkt an seiner Stelle bleiben, wenn alle anderen Glieder nur Translationsbewegungen ausführen.

Daß das Gleiche gilt, wenn man ein anderes Glied um seinen Hauptpunkt dreht und den übrigen dabei nur Translationsbewegungen gestattet, erkennt man unmittelbar, wenn man den zum Gesamtschwerpunkte führenden Vektorzug an dem Hauptpunkte dieses Gliedes beginnen läßt.

Bisher wurde nur das durch Figur 1 dargestellte Gelenksystem, welches sowohl als eben als auch als räumlich aufgefaßt werden

konnte, in Rücksicht gezogen. Man überzeugt sich aber leicht, daß bei jedem beliebigen räumlichen Gelenksystem genau dieselben Beziehungen zwischen den Hauptpunkten und den Verrückungen des ganzen Systems um den Gesamtschwerpunkt gelten. Dreht man z. B. das 4. Glied des durch Figur 2 dargestellten Systems um seinen Hauptpunkt H_4 und läßt dabei alle neunzehn anderen Glieder nur Translationsbewegungen machen, so werden die Richtungen der zu diesen neunzehn Gliedern gehörenden Hauptstrecken, welche innerhalb des Systems dem 4. Gliede am nächsten liegen, bei dieser Bewegung des ganzen Gelenksystems ungeändert bleiben. Da H_4 selbst fest ist, so wird daher auch der von H_4 nach S_0 führende Vektorzug trotz der Bewegung des Systems im Raume fest bleiben, und es wird insbesondere der Gesamtschwerpunkt S_0 seinen Ort beibehalten.

Aus diesem Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und den angedeuteten Bewegungen des Gelenksystems relativ zum Gesamtschwerpunkt geht hervor, daß man die allgemeinste Verrückung des ganzen Systems um seinen Schwerpunkt S_0 aus n derartigen Drehungen je eines Gliedes um seinen Hauptpunkt mit gleichzeitigen Translationen aller anderen Glieder zusammengesetzt denken kann. Für die Translationsbewegung eines Gliedes ist dabei die Bewegung desjenigen Gelenkmittelpunktes des allein sich drehenden Gliedes maßgebend, welcher dem die Translation ausführenden Glied innerhalb des Systems am nächsten liegt. Dieser Gelenkmittelpunkt bewegt sich aber auf einer Kugelfläche um den ruhenden Hauptpunkt, deren Radius die denselben mit dem Hauptpunkt verbindende Hauptstrecke ist.

d) Folgerungen für die Kinetik des Gelenksystems.

Wenn ein Glied sich dreht, während alle anderen mit ihm zusammenhängenden Glieder Translationsbewegungen ausführen, so verhalten sich die letzteren in kinetischer Beziehung genau so, als ob ihre Massen in dem ihnen am nächsten liegenden Gelenkmittelpunkte des sich drehenden Gliedes konzentriert wären. Man wird also auch durch diese Betrachtungen wieder zu den reduzierten Systemen geführt.

Auch das Verhalten der Kräfte bei diesen Verrückungen entspricht in jeder Beziehung den Eigenschaften der reduzierten Systeme. Greift eine Kraft nicht an dem Gliede an, welches um

seinen Hauptpunkt gedreht wird, sondern an einem der übrigen in Translationsbewegung begriffenen Glieder, so wird ihr Angriffspunkt eine Bahn beschreiben, welche mit der Bahn des ihm innerhalb des Systems am nächsten liegenden Gelenkmittelpunktes des sich drehenden Gliedes kongruent ist. Diese Kraft wird daher bei der Verrückung die gleiche Elementararbeit leisten, als wenn sie in gleicher Richtung und Stärke direkt an diesem Gelenkmittelpunkte angriffe. Zu dem Begriff des reduzierten Systems gehörte es aber, daß jede nicht am Korngliede angreifende Kraft parallel nach demjenigen Gelenkmittelpunkte des Korngliedes verlegt werden mußte, welcher ihrem Angriffspunkt innerhalb des Gelenksystems am nächsten liegt.

Wendet man dieses Ergebnis auf die in den Schwerpunkten der einzelnen Glieder angreifend zu denkenden Gewichtskräfte an, so erkennt man aus der Bedeutung der Hauptpunkte als Schwerpunkte der reduzierten Systeme leicht, daß die nach den Gelenkmittelpunkten des allein gedrehten Gliedes verlegten Gewichtskräfte sich mit der im Schwerpunkte dieses Gliedes direkt angreifenden Gewichtskraft zu einer Resultante zusammensetzen, welche dem Gewicht des ganzen Gelenksystems gleich ist und im Hauptpunkte des sich drehenden Gliedes angreift. Da dieser Hauptpunkt bei der Verrückung fest bleibt, so leistet also die Schwere bei derselben überhaupt keine Arbeit — ein Resultat, welches von vornherein zu erwarten war, weil ja der Gesamtschwerpunkt S_0 des Gelenksystems bei der betreffenden Verrückung seine Lage im Raume beibehält. —

Man sieht also, alle bisher besprochenen Eigenschaften der reduzierten Systeme und Hauptpunkte, welche in der früheren Arbeit zunächst für das ebene Gelenksystem und ein spezielles am menschlichen Körper auftretendes räumliches Gelenksystem bewiesen worden sind, behalten ihre volle Gültigkeit bei jedem beliebigen räumlichen Gelenksystem. Es ist daher zu erwarten, daß die reduzierten Systeme für die Ableitung der Bewegungsgleichungen aller räumlichen Gelenksysteme dieselbe Bedeutung besitzen werden, wie bei den ebenen Systemen.

II. Das zweigliedrige räumliche Gelenksystem.

Die beiden Glieder 1 und 2 des Systems seien durch ein Kugelgelenk miteinander verbunden, so daß jedes Glied sich gegenüber dem anderen um einen Punkt, also mit drei Graden der Freiheit bewegen kann. Die Verbindungslinie des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ mit dem Schwerpunkte S_j eines Gliedes soll, wie früher, als Längsachse des letzteren bezeichnet sein. Außerdem werde zunächst der Einfachheit halber angenommen, daß die Längsachse eines jeden Gliedes eine Hauptachse des zu seinem Schwerpunkte gehörenden Trägheitsellipsoids sei. Durch diese Voraussetzung, welche eine ganz wesentliche Vereinfachung der ohnehin ziemlich ausgedehnten Formeln nach sich zieht, wird die Verwendbarkeit der abzuleitenden Formeln für viele Probleme der Bewegungsphysiologie deshalb nicht beeinträchtigt, weil dieselbe bei den meisten Abschnitten des menschlichen Körpers mit großer Annäherung erfüllt ist.[1])

a) Die allgemeinen Koordinaten des Systems.

Wenn ein derartiges zweigliedriges Gelenksystem sich ganz frei im Raume bewegen kann, so besitzt es 9 Freiheitsgrade. Es muß sich daher seine Gestalt und Lage im Raume durch 9 allgemeine Koordinaten eindeutig bestimmen lassen. Hierzu verwendet man am zweckmäßigsten drei räumliche Koordinaten, welche den Ort des Gesamtschwerpunktes, und außerdem für jedes Glied drei Winkel, welche seine Orientierung im Raume angeben.

Dieser Koordinatenbestimmung sei ein ruhendes räumliches Koordinatensystem x, y, z zugrunde gelegt, dessen Achsen aufeinander senkrecht stehen. Die x-Achse und y-Achse mögen, wie

---

1) Vgl. W. Braune und O. Fischer, Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Glieder. Abhandl. der math.-phys. Klasse der Königl Sächs. Gesellsch. der Wissensch. Bd. XVIII No. VIII. 1892.

es Figur 4 andeutet, in einer horizontalen Ebene liegen, und die vertikale z-Achse soll vom Koordinatenanfangspunkt O aus nach unten positiv gerechnet werden. Die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes S_0 seien in diesem System x_0, y_0, z_0. Die Orientierung eines jeden der beiden Glieder wird am einfachsten durch die sogenannten EULERschen unsymmetrischen Winkel bestimmt; dieselben seien für das erste Glied mit φ_1, ϑ_1, ϱ_1 und für das zweite Glied mit φ_2, ϑ_2, ϱ_2 bezeichnet.[1]) Dabei möge bei jedem Gliede φ_j den Winkel angeben, welchen die positive Richtung seiner Längsachse mit der nach unten gerichteten Vertikalen, d. h. also mit der Richtung der positiven z-Achse bildet. Als positive Richtung einer Längsachse soll, wie früher, diejenige genommen sein, in welcher dieselbe durchlaufen wird, wenn man vom freien Ende des ersten Gliedes aus über den Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ hinweg nach dem freien Ende des zweiten Gliedes zieht. Denkt man weiter durch jede Längsachse eine Vertikalebene gelegt (in Figur 4 die Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$), so wird diese Ebene im allgemeinen gegen die vertikale yz-Ebene des Koordinatensystems geneigt sein; der Winkel, den die erstere mit der letzteren bildet, sei ϑ_j. Dieser kann auch gedeutet werden als Winkel zwischen den etwa vom Hauptpunkte des Gliedes aus gezogenen Normalen zu diesen beiden Vertikalebenen, wobei die Normale auf der yz-Ebene in der Richtung der positiven x-Achse und die Normale auf der Ebene $\mathfrak{E}_j$ nach der Seite errichtet werden mag, von welcher aus die positive Richtung der Längsachse des Gliedes im Sinne des Uhrzeigers gegen die nach unten gerichtete positive z-Achse um den Winkel φ_j gedreht erscheint. Dieser zur Ebene $\mathfrak{E}_j$ normale Halbstrahl soll unter Verwendung einer von KLEIN und SOMMERFELD eingeführten Bezeichnungsweise[2]) die Knotenlinie des Hauptpunktes genannt werden. Hierdurch hat man ein einfaches Mittel, dem Winkel ϑ_j ein bestimmtes Vorzeichen beizulegen, indem man festsetzt, daß derselbe positiv genommen werden soll, wenn die

---

1) In der Regel werden für diese drei Winkel nach dem Vorgange von EULER bezüglich die Buchstaben ϑ, ψ, φ verwendet. Daß hier an Stelle von ϑ der Buchstabe φ, an Stelle von ψ der Buchstabe ϑ und an Stelle von φ der Buchstabe ϱ gesetzt wurde, ist nur dem Umstand zuzuschreiben, daß schon in der früheren Arbeit die Winkel in dieser Weise eingeführt worden sind.

2) Vgl. F. KLEIN und A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels. Heft 1. Leipzig 1897. Seite 17.

Knotenlinie des Hauptpunktes von der Seite aus gesehen, nach welcher die positive z-Achse geht, d. h. also von unten, im Sinne des Uhrzeigers gegen die positive x-Achse um diesen Winkel gedreht erscheint. Dem Winkel φ_j braucht man überhaupt nur positive Werte beizulegen.

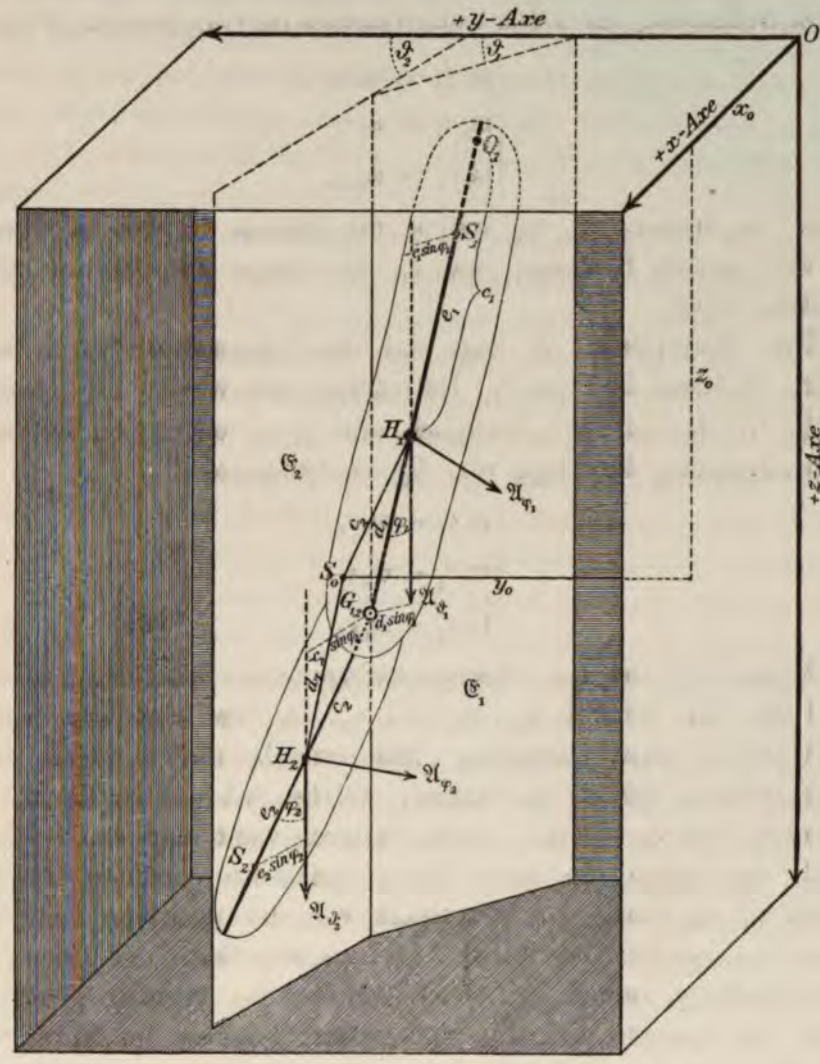


Fig. 4.

Durch die beiden Winkelpaare φ_j und ϑ_j ist nun nicht nur die Richtung einer jeden Längsachse, sondern auch ihre Lage gegenüber dem Gesamtschwerpunkt S_0 schon vollkommen bestimmt. Dies läßt sich leicht erkennen, wenn man die Hauptpunkte H_j der beiden Glieder zu Hilfe nimmt.

Der Hauptpunkt H_1 liegt auf der Längsachse des ersten Gliedes zwischen S_1[1]) und $G_{1,2}$; seine Lage zu beiden wird durch die in der positiven Richtung der Längsachse des ersten Gliedes positiv zu nehmenden Vektoren $\overline{S_1H_1}$ und $\overline{H_1G_{1,2}}$ bestimmt, für welche wieder kurz die Bezeichnungen e_1 und d_1 eingeführt sein sollen. Zur Berechnung der Länge dieser Vektoren dienen die unmittelbar aus der Bedeutung des ersten Hauptpunktes hervorgehenden Formeln

$$(18)\qquad \begin{cases} m_o d_1 = m_1 s_1 \\ m_2 d_1 = m_1 e_1 \\ m_o e_1 = m_2 s_1, \end{cases}$$

wobei, wie früher, m_1, m_2 und m_o die Massen der beiden Glieder und des ganzen Systems, und s_1 die Länge des Vektors $\overline{S_1G_{1,2}}$ bedeuten sollen.

Der Hauptpunkt H_2 liegt auf der Längsachse des zweiten Gliedes zwischen $G_{1,2}$ und S_2. Bezeichnet man wieder die Vektoren $\overline{G_{1,2}H_2}$, $\overline{G_{1,2}S_2}$ und $\overline{H_2S_2}$ bezüglich mit c_2, r_2 und e_2, so hat man zur Bestimmung der Lage von H_2 die Formeln

$$(19)\qquad \begin{cases} m_o c_2 = m_2 r_2 \\ m_1 c_2 = m_2 e_2 \\ m_o e_2 = m_1 r_2. \end{cases}$$

Sobald der Ort des Gesamtschwerpunktes feststeht, läßt sich mit Hilfe der Winkel φ_1, ϑ_1 und φ_2, ϑ_2 die Lage der beiden Hauptpunkte leicht auffinden. Man braucht nur durch S_o zwei Vertikalebenen gelegt zu denken, welche mit der yz-Ebene die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 bilden. In der ersteren zieht man von S_o einen Strahl, der gegen die nach unten gerichtete Vertikale um den Winkel φ_1 im Sinne des Uhrzeigers von der positiven Seite der Ebene aus gesehen erscheint. Als positive Seite der Ebene ist dabei diejenige aufzufassen, nach welcher die Normale geht, die gegen die positive x-Achse von unten gesehen im Sinne des Uhrzeigers um ϑ_1 gedreht erscheint. Auf diesem Strahl ist von S_o aus in positiver Richtung der Vektor $\overline{d_1}$ abzutragen, um den Hauptpunkt H_2 zu erhalten. In der zweiten Ebene hat man von

1) In Figur 4 sind die Schwerpunkte S_1 und S_2 ziemlich nahe dem freien Ende der beiden Glieder angenommen worden, damit die Hauptpunkte nicht zu nahe am Gelenk zu liegen kommen, wodurch die Deutlichkeit der Figur beeinträchtigt würde.

S_0 aus einen Strahl zu ziehen, welcher gegen die nach unten gerichtete Vertikale von der positiven Seite dieser Ebene aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers um den Winkel φ_2 gedreht erscheint; auf der Rückwärtsverlängerung dieses Strahles ist die Strecke c_2, d. h. also es ist von S_0 aus der Vektor $-\overline{c_2}$ abzutragen, um zu dem Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes zu gelangen. Zieht man nun durch H_1 zu dem zuerst konstruierten Strahl und durch H_2 zu dem zweiten Strahl je eine Parallele, so stellen dieselben die Längsachsen der beiden Glieder dar; dieselben müssen sich, wie man sofort einsieht, in einem Punkte schneiden, dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$.

Aus dieser Konstruktion der Längsachsen ist deutlich zu erkennen, daß die durch dieselben gehenden Vertikalebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ (vgl. Figur 4) im allgemeinen nicht durch den Gesamtschwerpunkt hindurchgehen. Der letztere liegt bei der in Figur 4 angedeuteten Stellung dieser Ebenen auf der positiven Seite von beiden.

Durch die Längsachsen und den sie verbindenden Gelenkmittelpunkt ist nun die Orientierung der beiden Glieder im Raume noch nicht vollkommen gegeben; denn bei der vorausgesetzten Art der Gelenkverbindung kann jedes der beiden Glieder noch beliebig um seine Längsachse gedreht werden, ohne daß dadurch die Lage der letzteren und der Ort des Gesamtschwerpunktes im Raume geändert würden. Die Orientierung der beiden Glieder wird erst eine bestimmte durch die Angabe der Winkel ϱ_1 und ϱ_2. Um die Bedeutung dieser beiden Winkel zu verstehen, denke man sich innerhalb jedes der beiden Glieder eine, an und für sich beliebige, durch seine Längsachse hindurchgehende Ebene festgelegt. Dieselbe soll so gewählt werden, daß sie außer der Längsachse noch eine zweite Hauptträgheitsachse für den Schwerpunkt des Gliedes und damit auch für den Hauptpunkt desselben enthält. Der Winkel ϱ_j gibt nun an, um wieviel in einer Stellung des Gliedes diese Ebene gegen die durch die Längsachse hindurchgehende Vertikalebene gedreht erscheint. Um den Drehungssinn bequemer in Rechnung ziehen zu können, ist es auch hier zweckmäßig, den Winkel ϱ_j aus der gegenseitigen Neigung der etwa im Hauptpunkte des Gliedes zu errichtenden Normalen zu diesen beiden Ebenen abzuleiten. Es wurde schon oben für die eine, als Knotenlinie des Hauptpunktes bezeichnete Normale die positive

Richtung festgelegt; es ist daher nur noch nötig, auch für die innerhalb des Gliedes angenommene Ebene eine Seite festzusetzen, nach der hin ihre Normale, die natürlich ebenso wie die Ebene selbst im Gliede festliegt, positiv gerechnet werden soll. Wenn auch nur die letztere der beiden Normalen dem Gliede unverrückbar angehört, so liegen sie doch beide stets in einer bestimmten im Gliede festen Ebene, welche auf der Längsachse desselben senkrecht steht. Bezeichnet man als positive Seite der letzteren Ebene diejenige, nach welcher die positive Richtung der Längsachse hinweist, so hat man wieder ein einfaches Mittel, dem Winkel ϱ_j ein bestimmtes Vorzeichen zu erteilen, indem man ihn als positiv oder negativ ansieht, je nachdem von der positiven Seite dieser Ebene aus die im Glied feste Normale im Sinne des Uhrzeigers oder im umgekehrten Sinne gegen die Knotenlinie um den Winkel ϱ_j gedreht erscheint.

Wie man sieht, ist es nur nötig zur Bestimmung der Orientierung eines Gliedes im Raume zwei Gerade innerhalb desselben festzulegen; als solche wurden gewählt die Längsachse und ein zu dieser senkrechter vom Hauptpunkt ausgehender Halbstrahl, der „erste Querachse des Gliedes“ genannt werden mag. Es soll nun als „Nullstellung“ eines Gliedes diejenige bezeichnet sein, bei welcher die positive Richtung der Längsachse desselben die Richtung der positiven z-Achse, und die erste Querachse die Richtung der positiven x-Achse des ruhenden Koordinatensystems besitzt. Dann wird ein anderer ebenfalls im Gliede fester und zu der Längsachse wie zu der ersten Querachse desselben senkrechter Halbstrahl in die Richtung der positiven y-Achse des ruhenden Koordinatensystems fallen; derselbe sei als „zweite Querachse des Gliedes“ bezeichnet. Die erste und zweite Querachse und die Längsachse eines Gliedes können natürlich als die Achsen eines dem Gliede fest angehörenden rechtwinkligen Koordinatensystems aufgefaßt werden.

Da sich bei vertikaler Stellung der Längsachse ∞^1 Vertikalebenen durch dieselben legen lassen, so ist der Winkel ϑ hierbei nach der bisherigen Erklärung unbestimmt, so lange nicht noch über denselben etwas festgesetzt ist. Es soll daher dem Winkel ϑ in der Nullstellung des Gliedes der Wert Null beigelegt werden, womit ausgedrückt ist, daß unter allen Vertikalebenen durch die Längsachse in der Nullstellung die durch die zweite Querachse

gehende für die Bestimmung von ϑ verwendet werden soll. Die vom Hauptpunkte des Gliedes ausgehende Knotenlinie besitzt also dann in der Nullstellung die Richtung der positiven x-Achse und fällt demnach in dieser Stellung mit der ersten Querachse zusammen, so daß hierbei der Winkel ϱ den Wert Null besitzt. Da auch der Winkel φ infolge der vertikal nach unten gehenden Richtung der Längsachse verschwindet, so ist also die Nullstellung eines Gliedes dadurch charakterisiert, daß alle drei Winkel den Wert Null annehmen.

Befinden sich beide Glieder in der Nullstellung, so wird die Stellung des ganzen Gelenksystems, welche dann ebenfalls eine Nullstellung desselben genannt sein soll, allein durch die drei rechtwinkligen Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Gesamtschwerpunktes eindeutig bestimmt. Es gibt also demnach ∞^3 Nullstellungen des Gelenksystems, die durch reine Translationsbewegungen ineinander übergeführt werden können.

Bei einer Nullstellung des zweigliedrigen Gelenksystems liegen die beiden Längsachsen in einer vertikalen Geraden, welche auch den Gesamtschwerpunkt S_0 enthält. Will man nun aus dieser Stellung in eine beliebige andere, durch bestimmte Werte der Winkel φ_1, ϑ_1, ϱ_1 und φ_2, ϑ_2, ϱ_2 charakterisierte, Stellung des Systems ohne Änderung der Lage des Gesamtschwerpunktes übergehen, so kann man nach der unter I c) auseinandergesetzten Eigenschaft der Hauptpunkte so verfahren, daß man zunächst das erste Glied um seinen Hauptpunkt H_1 dreht und gleichzeitig das zweite nur Translationsbewegung ausführen läßt, und darauf das zweite Glied um seinen Hauptpunkt H_2 dreht mit gleichzeitiger Translationsbewegung des ersten Gliedes. Diese beiden Drehungen gestalten sich insbesondere in folgender Weise:

Zuerst dreht man das erste Glied allein um seine Längsachse von unten gesehen im Sinne des Uhrzeigers um den Winkel ϑ_1, indem man dabei die Knotenlinie seines Hauptpunktes zunächst mit dem Gliede fest verbunden denkt; dadurch nimmt die stets horizontal bleibende Knotenlinie eine Richtung an, welche gegen die positive x-Achse ebenfalls um den Winkel ϑ_1 geneigt ist. Da das zweite Glied diese Drehung nicht mitmachen soll, so bleibt es unterdes ganz in Ruhe, so daß nur eine entsprechende Bewegung im Gelenk $G_{1,2}$ eintritt. Darauf dreht man nun das erste Glied um die Knotenlinie seines Hauptpunktes um den Winkel φ_1 und

bringt dadurch die Längsachse des ersten Gliedes in die gewünschte Richtung. Das zweite Glied kann während dieser Drehung nicht in Ruhe bleiben; es begleitet dieselbe mit einer Translationsbewegung nach Maßgabe der Bewegung des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$. Dieser bewegt sich in der zur Knotenlinie senkrechten Ebene auf einem Kreis um H_1 mit dem Radius d_1. Bis hierher war die Knotenlinie fest mit dem ersten Glied verbunden zu denken. Bei der nun folgenden Drehung des ersten Gliedes um den Winkel ϱ_1, welche um die Längsachse desselben stattfindet, wird dagegen dieser Zusammenhang aufgehoben, denn die Knotenlinie beteiligt sich an dieser Drehung nicht, sondern behält im Raume ihre Stellung bei. Infolgedessen wird die im Gliede feste erste Querachse des ersten Gliedes, welche bis dahin mit der Knotenlinie zusammenfiel, durch diese Drehung von der Knotenlinie abgelöst, so daß sie schließlich gegen dieselbe um den Winkel ϱ_1 geneigt ist. Während dieser letzten Drehung des ersten Gliedes um seine Längsachse bleibt das zweite Glied wiederum im Raume fest, so daß abermals eine Bewegung im Gelenk $G_{1,2}$ eintritt.

Es findet also die durch den Winkel ϑ_1 bestimmte Drehung um eine im Raum feste Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ (vgl. Fig. 4) statt, welche die Richtung der positiven z-Achse besitzt. Die durch den Winkel ϱ_1 gemessene Drehung geschieht dagegen um eine im Glied feste Achse $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$, welche mit der positiven Richtung der Längsachse zusammenfällt und daher gegen die Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ um den Winkel φ_1 geneigt ist. Endlich ist die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ für die Drehung um den Winkel φ_1 im allgemeinen weder im Raum, noch im Glied fest; dieselbe, welche durch die Knotenlinie des ersten Gliedes gebildet wird, steht auf der Ebene der beiden Achsen $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$ senkrecht.

Durch die genannten drei Drehungen hat zwar das erste Glied die richtige Orientierung im Raume erlangt, es befindet sich aber noch nicht in seiner richtigen Lage gegenüber dem Gesamtschwerpunkt S_0; die letztere wird erst erreicht durch eine Translationsbewegung, die neben der Drehung des zweiten Gliedes um seinen Hauptpunkt einhergeht. Infolge der Translationsbewegung, welche das zweite Glied bei der Drehung des ersten ausführen mußte, ist der Hauptpunkt H_2 dagegen schon in seine richtige Stellung gekommen, so daß es nur noch der Drehung um denselben bedarf, um dem zweiten Glied auch die richtige Orientierung im

Raume zu geben. Dieselbe kann man in ganz entsprechender Weise wie die Drehung des ersten Gliedes in drei Schritte zerlegen.

Zuerst dreht man um die im Raum feste und vertikal nach unten gerichtete Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ des Hauptpunktes H_2 um den Winkel ϑ_2. Dadurch kommen die zunächst vereinigt zu denkende erste Querachse und Knotenlinie des zweiten Gliedes in eine neue ebenfalls noch horizontale Richtung, welche gegen die positive x-Achse um diesen Winkel ϑ_2 geneigt ist. Darauf dreht man das Glied um die Knotenlinie $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ des Hauptpunktes H_2 um den Winkel φ_2, und endlich um die Längsachse $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$ um den Winkel ϱ_2. Durch die letztere Drehung wird die Querachse aus ihrer bis dahin horizontalen Lage herausgedreht, während die Knotenlinie ihre Stellung beibehalten soll, so daß schließlich beide um den Winkel ϱ_2 gegeneinander geneigt erscheinen. Während der ersten und letzten dieser drei Drehungen behält das erste Glied die durch seine Drehung erlangte Stellung im Raume bei. Durch die Drehung um $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ wird es dagegen zu einer Translationsbewegung veranlaßt, welche durch die Bewegung des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ bestimmt wird. Diese Bewegung von $G_{1,2}$ findet auf einem vertikalen Kreise um H_2 statt, dessen Radius die Länge des Vektors c_2 hat.

Auch für die drei Drehungsachsen $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$, $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$ gilt, daß die erste dem ruhenden Raume und die letzte dem zweiten Gliede angehört, während die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ weder im Raume noch im Glied festliegt; in ihrer Richtung wird sie von der Größe des Drehungswinkels ϑ_2 beeinflußt. Die Achsen $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$ bilden den Winkel φ_2 mit einander, und die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ steht auf der Ebene der beiden ersten Achsen senkrecht.

b) Die Ableitung der lebendigen Kraft.

Das zweigliedrige Gelenksystem sei in einer ganz beliebigen Bewegung im Raume begriffen, man soll die lebendige Kraft desselben zu irgend einer Zeit bestimmen. Um diese Aufgabe zu lösen, sondert man zweckmäßiger Weise von einer Translationsbewegung, welche das ganze System nach Maßgabe der Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_0 ausführt, die Bewegung der beiden Glieder relativ zu S_0 ab, und bestimmt für beide Arten der Bewegung des Systems die lebendige Kraft. Die gesamte lebendige Kraft stellt sich dann einfach als Summe dieser beiden Bestandteile dar.

Bezeichnet man die drei in der Richtung der Koordinatenachsen liegenden Komponenten der Geschwindigkeit v_0 des Gesamtschwerpunktes S_0 mit x_0', y_0', z_0', worunter einfach die Differentialquotienten der drei Koordinaten von S_0 nach der Zeit zu verstehen sind, so besitzt der erste Teil der gesamten lebendigen Kraft des Systems den Wert

$$\frac{1}{2} m_0 (x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2). \tag{20}$$

Der andere Bestandteil der lebendigen Kraft, der als die innere lebendige Kraft des Gelenksystems aufgefaßt werden kann, setzt sich aus den lebendigen Kräften zusammen, welche die beiden Glieder in ihren Bewegungen um den Gesamtschwerpunkt besitzen. Jede dieser beiden lebendigen Kräfte läßt sich wiederum dadurch in zwei Teile zerlegen, daß man von einer Translationsbewegung des betreffenden Gliedes nach Maßgabe der Bewegung seines Schwerpunktes S_j relativ zu S_0 die Drehung desselben um seinen Schwerpunkt absondert. Demnach baut sich die innere lebendige Kraft des ganzen Gelenksystems aus vier Summanden auf.

Die Geschwindigkeiten der zu S_0 relativen Bewegung der beiden Schwerpunkte S_1 und S_2 lassen sich nun in verhältnismäßig sehr einfacher Weise mit Hilfe der Hauptpunkte und Hauptstrecken der beiden Glieder durch die Winkelgeschwindigkeiten ausdrücken, mit denen die beiden Längsachsen sich um die durch ihre Hauptpunkte gehenden Achsen $\mathfrak{A}_\varphi$ und $\mathfrak{A}_\vartheta$ drehen.

Um dies zu erreichen, braucht man nur dem Gelenksystem eine unendlich kleine Verrückung um S_0 zu erteilen, durch welche die Winkel φ_1, ϑ_1 und φ_2, ϑ_2 unendlich wenig geändert werden, während die Winkel ϱ_1 und ϱ_2 vorläufig konstant gehalten werden können, da sie auf die Lage der Schwerpunkte keinen Einfluß ausüben. Die Änderungen der vier Winkel seien bezüglich $d\varphi_1$, $d\vartheta_1$, $d\varphi_2$ und $d\vartheta_2$. Nach dem unter Ic) allgemein bewiesenen Satze kann jede derartige Verrückung des Gelenksystems relativ zum Gesamtschwerpunkt in eine unendlich kleine Drehung des ersten Gliedes um seinen Hauptpunkt H_1 mit gleichzeitiger Translationsbewegung des zweiten Gliedes und eine unendlich kleine Drehung des letzteren um seinen Hauptpunkt H_2 mit gleichzeitiger Translationsbewegung des ersten Gliedes zerlegt werden. Die Drehung des ersten Gliedes um H_1 setzt sich bei konstantem ϱ_1 nach IIa) aus einer Drehung um die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ um den Winkel $d\varphi_1$ und

einer Drehung um die Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ um den Winkel $d\vartheta_1$ zusammen. In entsprechender Weise kann die Drehung des zweiten Gliedes um H_2 bei konstantem ϱ_2 aus zwei Drehungen um die Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ und $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ mit den Drehungswinkeln $d\varphi_2$ und $d\vartheta_2$ zusammengesetzt angenommen werden.

Der Schwerpunkt S_1 des ersten Gliedes erfährt nun infolge der Drehungen des ersten Gliedes um H_1 bezüglich unendlich kleine Verrückungen von der Größe $e_1 \cdot d\varphi_1$ und $e_1 \sin\varphi_1 \cdot d\vartheta_1$ (vgl. Figur 4), von denen die erstere in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ liegt und senkrecht zur Längsachse des ersten Gliedes gerichtet ist, während die letztere senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{E}_1$ steht und nach der negativen Seite derselben hinweist; diese beiden Verrückungen stehen daher aufeinander senkrecht. Infolge der mit der Drehung des zweiten Gliedes um H_2 verbundenen Translationsbewegung des ersten Gliedes erleidet S_1 weiterhin zwei Verrückungen von den Größen $c_2 \cdot d\varphi_2$ und $c_2 \sin\varphi_2 \cdot d\vartheta_2$, von denen die eine in der Ebene $\mathfrak{E}_2$ liegt und senkrecht auf der Längsachse des zweiten Gliedes steht, während die andere senkrecht zu $\mathfrak{E}_2$ nach der negativen Seite dieser Ebene hin gerichtet ist.

Der Schwerpunkt S_2 des zweiten Gliedes erfährt infolge der mit der Drehung des ersten Gliedes um H_1 verbundenen Translationsbewegung seines Gliedes und der Drehung des letzteren um H_2 ebenfalls im ganzen vier Verrückungen, deren Größen, wie man leicht aus Figur 4 erkennt, bezüglich $d_1 \cdot d\varphi_1$, $d_1 \sin\varphi_1 \cdot d\vartheta_1$, $e_2 \cdot d\varphi_2$ und $e_2 \sin\varphi_2 \cdot d\vartheta_2$ sind. Jede dieser vier Verrückungskomponenten besitzt genau die entgegengesetzte Richtung wie die aus der gleichen Drehung hervorgehende Verrückungskomponente des Schwerpunktes S_1. Bezeichnet man bei positivem unendlich kleinem Drehungswinkel eine Verrückung als positiv, wenn der Punkt der Längsachse, welcher sie ausführt, in positiver Richtung von dem Drehpunkt entfernt liegt, so hat man also das Resultat, daß die Gesamtverrückung des Schwerpunktes S_1 relativ zu S_0 durch die Vektorsumme

$$(21) \qquad -\overline{e_1 \cdot d\varphi_1} - \overline{e_1 \sin\varphi_1 \cdot d\vartheta_1} - \overline{c_2 \cdot d\varphi_2} - \overline{c_2 \sin\varphi_2 \cdot d\vartheta_2}$$

und die Gesamtverrückung des Schwerpunktes S_2 relativ zu S_0 durch die Vektorsumme

$$(22) \qquad \overline{d_1 \cdot d\varphi_1} + \overline{d_1 \sin\varphi_1 \cdot d\vartheta_1} + \overline{e_2 \cdot d\varphi_2} + \overline{e_2 \sin\varphi_2 \cdot d\vartheta_2}$$

dargestellt wird.

Aus diesen Verrückungen erhält man durch Division mit dem Zeitdifferential dt die zum Gesamtschwerpunkte S_0 relativen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Schwerpunkte S_1 und S_2. Bezeichnet man die hierbei auftretenden Differentialquotienten der vier Winkel φ_1, ϑ_1, φ_2, ϑ_2 nach der Zeit kurz durch einen oben angebrachten Strich, so hat man demnach für die zu S_0 relative Geschwindigkeit des Schwerpunktes S_1

$$(23) \qquad v_1 = -[\overline{e_1 \cdot \varphi_1'} + \overline{e_1 \sin\varphi_1 \cdot \vartheta_1'} + \overline{c_2 \cdot \varphi_2'} + \overline{c_2 \sin\varphi_2 \cdot \vartheta_2'}]$$

und für die zu S_0 relative Geschwindigkeit des Schwerpunktes S_2

$$(24) \qquad v_2 = \overline{d_1 \cdot \varphi_1'} + \overline{d_1 \sin\varphi_1 \cdot \vartheta_1'} + \overline{e_2 \cdot \varphi_2'} + \overline{e_2 \sin\varphi_2 \cdot \vartheta_2'}.$$

Für die hieraus resultierenden Bestandteile der inneren lebendigen Kraft hat man nun die Quadrate der beiden Geschwindigkeiten bezüglich mit $\frac{1}{2}m_1$ und $\frac{1}{2}m_2$ zu multiplizieren. Da nur das Quadrat der Geschwindigkeit v_1 hier in Frage kommt, so kann man auch das negative Zeichen fortlassen und bei der Bildung des Quadrats die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten so behandeln, als ob sie die gleiche Richtung wie die entsprechenden Komponenten der Geschwindigkeit v_2 hätten.

Das Quadrat von v_1 bezw. v_2 setzt sich zusammen aus den Quadraten der vier Summanden auf der rechten Seite von (23) und (24) und den doppelten Produkten aus je zwei derselben multipliziert mit dem Kosinus ihres Neigungswinkels. Man hat sich daher vor allen Dingen die Werte dieser Kosinus zu verschaffen. Zu diesem Zwecke sind in Fig. 5 vom Centrum C einer Kugel aus, deren Radius gleich der Längeneinheit sein möge, Halbstrahlen in der Richtung der vier in positiver Richtung genommenen Komponenten von v_1 und v_2 gezogen. Die Punkte, in denen dieselben die Kugel durchdringen, sind in der durch die Formeln (23) und (24) angegebenen Reihenfolge bezüglich mit 1, I, 2 und II bezeichnet worden. Deutet man den Neigungswinkel zwischen je zwei dieser vier Strahlen kurz durch die beiden zugehörigen Zahlen an, so hat man zunächst für (1, I) und auch (2, II) den Wert $\frac{\pi}{2}$, da nach dem früheren sowohl die Strahlen $C1$ und CI, als auch die Strahlen $C2$ und CII aufeinander senkrecht stehen. Ferner ist der Strahl $C1$ bezw. $C2$ gegen die in Figur 5 angedeutete horizontale Äquatorebene der Einheitskugel um den Winkel φ_1 bezw. φ_2 geneigt. Zieht man von dem zum Äquator gehörenden

oberen Pol P der Kugel aus größte Kreise durch 1 und 2, so sind die Bögen $(P1)$ und $(P2)$ die Komplemente zu φ_1 und φ_2; außerdem schneiden sich diese beiden Kreisbögen in P unter dem Winkel $\vartheta_2 - \vartheta_1$, da sie in Ebenen liegen, welche den in Figur 4 dargestellten Ebenen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ parallel laufen. Die Ebene des Winkels (1, I) steht auf der Längsachse des ersten und die des Winkels (2, II) auf der Längsachse des zweiten Gliedes senkrecht; daher ist der 1 mit I verbindende größte Kugelkreis gegen

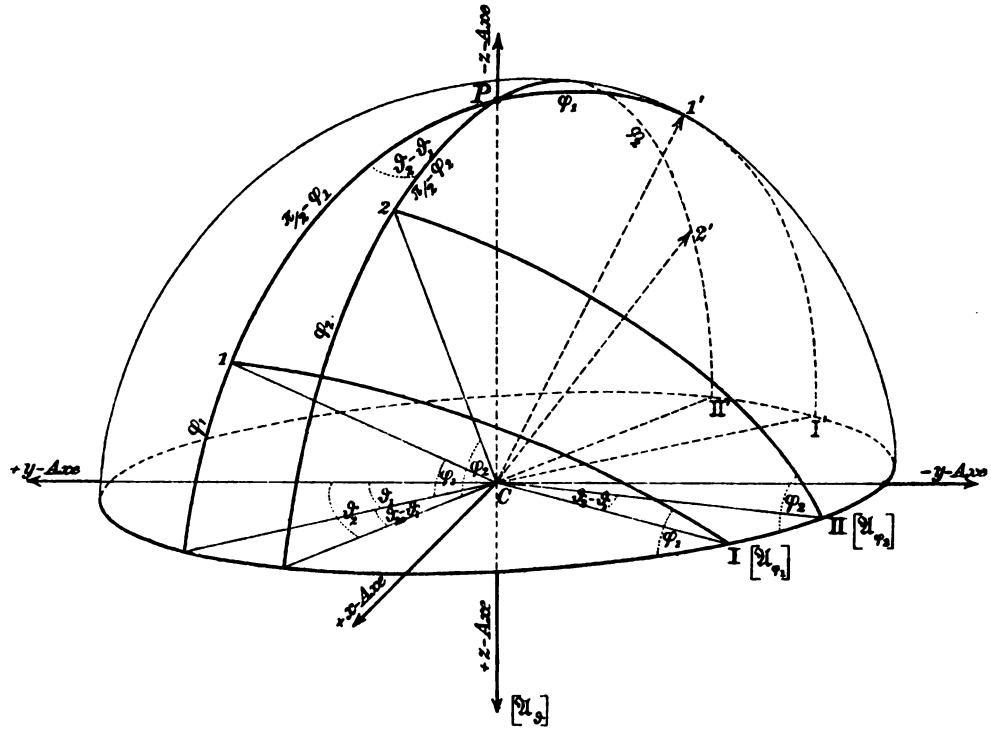


Fig. 5.

den Äquator um den Winkel φ_1 und der durch 2 und II gehende größte Kreis gegen den Äquator um den Winkel φ_2 geneigt, während, wie schon oben erwähnt wurde, die beiden Kreisbögen (1, I) und (2, II) selbst die Länge $\frac{\pi}{2}$ besitzen. Endlich läßt sich auch leicht einsehen, daß die Strahlen CI und CII, welche ja die Richtungen der Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ und $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ besitzen, gegeneinander um $\vartheta_2 - \vartheta_1$ geneigt sind, so daß also der dem Äquator angehörende Bogen (I, II) ebenfalls diesen Wert besitzt.

Beachtet man dies und die in Figur 5 zu erkennenden sp rischen Dreiecke $(1\,P2)$, $(\mathrm{I}\,1\,\mathrm{II})$, $(\mathrm{II}\,2\,\mathrm{I})$, bei denen im Inte

Übersichtlichkeit der Figur eine Seite nicht ausgezogen ist, so läßt sich nach dem Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie leicht ableiten, daß

$$
\begin{aligned}
\cos(1,2) &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\\
\cos(1,\mathrm{I}) &= 0\\
\cos(1,\mathrm{II}) &= -\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cos\varphi_1\\
\cos(2,\mathrm{I}) &= \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cos\varphi_2\\
\cos(2,\mathrm{II}) &= 0\\
\cos(\mathrm{I},\mathrm{II}) &= \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Man erhält daher für das Quadrat der zu S_0 relativen Geschwindigkeit des Schwerpunktes S_1 den Wert:

$$
\begin{aligned}
v_1^2 = {} & e_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + e_1^2 \sin^2\varphi_1 \cdot \vartheta_1'^2 + c_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + c_2^2 \sin^2\varphi_2 \cdot \vartheta_2'^2\\
& + 2 e_1 c_2 [\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \cdot \varphi_1' \varphi_2'\\
& - 2 e_1 c_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_1' \vartheta_2'\\
& + 2 e_1 c_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_2' \vartheta_1'\\
& + 2 e_1 c_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \vartheta_1' \vartheta_2'
\end{aligned}
\tag{26}
$$

und für das Quadrat der zu S_0 relativen Geschwindigkeit des Schwerpunktes S_2 den Wert:

$$
\begin{aligned}
v_2^2 = {} & d_1^2 \cdot \varphi_1'^2 + d_1^2 \sin^2\varphi_1 \cdot \vartheta_1'^2 + e_2^2 \cdot \varphi_2'^2 + e_2^2 \sin^2\varphi_2 \cdot \vartheta_2'^2\\
& + 2 d_1 e_2 [\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)] \cdot \varphi_1' \varphi_2'\\
& - 2 d_1 e_2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_1' \vartheta_2'\\
& + 2 d_1 e_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_2' \vartheta_1'\\
& + 2 d_1 e_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \vartheta_1' \vartheta_2'.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Multipliziert man (26) mit $\frac{1}{2}m_1$ und (27) mit $\frac{1}{2}m_2$, so erhält man also die beiden Beiträge zu dem Ausdruck der inneren lebendigen Kraft des zweigliedrigen Gelenksystems, welche aus der zum Gesamtschwerpunkt S_0 relativen Bewegung der Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Glieder hervorgehen. Zu diesen kommen nun noch die Beiträge hinzu, welche aus der Drehung eines jeden Gliedes um seinen Schwerpunkt herrühren.

Die Drehung des ersten Gliedes um seinen Schwerpunht S_1 findet im allgemeinen Falle räumlicher Bewegung des Gelenksystems bekanntlich um eine stetige Folge von Momentanachsen

durch S_1 statt, welche ihre Lage im Glied fortwährend ändern. Der Anteil der lebendigen Kraft, welcher in jedem Moment aus dieser Drehung entspringt, wird durch das halbe Produkt aus dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit um die Momentanachse mit dem auf dieselbe Achse bezogenen Trägheitsmoment angegeben. Da auch das Trägheitsmoment mit jeder neuen Lage der Achse im allgemeinen seinen Wert ändert, so ist es zweckmäßig die Winkelgeschwindigkeit in drei Komponenten zu zerlegen, welche sich auf drei zu einander senkrechte Achsen beziehen, die im Körper fest liegen. An und für sich könnte man jedes Trippel solcher Achsen hierzu verwenden. Im Interesse möglichster Vereinfachung der Formeln empfehlen sich die drei im Glied festen Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes, weil dann die den Drehungen um den Schwerpunkt entsprechende lebendige Kraft sich direkt als Summe der lebendigen Kräfte darstellt, welche aus der Drehung um die drei festen Achsen mit den ihnen zukommenden Geschwindigkeitskomponenten resultieren.

Nach den früher gemachten Annahmen fällt eine Hauptträgheitsachse des Schwerpunktes mit der Längsachse des Gliedes zusammen, und die beiden anderen sind den vom Hauptpunkte ausgehenden Querachsen parallel. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit um die der ersten und zweiten Querachse parallelen Hauptträgheitsachsen seien bezüglich α_1 und β_1, und die zu der Längsachse gehörende Komponente γ_1; ferner seien die zu diesen drei Achsen gehörenden Hauptträgheitsmomente des Schwerpunktes bezüglich A_1, B_1 und C_1. Dann ist der aus der Drehung des ersten Gliedes um seinen Schwerpunkt folgende Bestandteil der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2}(A_1\alpha_1^2 + B_1\beta_1^2 + C_1\gamma_1^2). \tag{28}$$

Die Größen α_1, β_1, γ_1 lassen sich nun leicht mit Hilfe der zu den Drehungsachsen $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$ gehörenden Winkelgeschwindigkeiten φ_1', ϑ_1', ϱ_1' bestimmen. Man hat zu diesem Zwecke nur zu beachten, daß die Drehungen um den Schwerpunkt S_1 um Achsen, welche diesen vom Hauptpunkt H_1 ausgehenden Achsen parallel sind, mit genau denselben Winkelgeschwindigkeiten vor sich gehen, so daß also φ_1', ϑ_1', ϱ_1' ebenfalls als drei Komponenten der zu der Momentanachse des Schwerpunktes gehörenden Winkelgeschwindigkeit aufgefaßt werden können: diese Komponenten be-

ziehen sich nur nicht auf Achsen, welche sämtlich im Glied fest liegen und auf einander senkrecht stehen. Um die Beziehung zwischen den verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten abzuleiten, zerlegt man wiederum am besten jede der drei Größen φ_1', ϑ_1' und ϱ_1' in Komponenten, die sich auf die drei im Glied festen Hauptträgheitsachsen beziehen.

Die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ bildet mit der ersten Querachse den Winkel ϱ_1 und mit der zweiten den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varrho_1$, wie man leicht aus Figur 6 erkennt; dagegen steht sie auf der Längsachse senkrecht. Daher liefert φ_1' zu dem Werte von α_1 den Beitrag $\varphi_1' \cdot \cos\varrho_1$ und zu dem Werte von β_1 den Beitrag $\varphi_1' \sin\varrho_1$. Die Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ bildet mit der Längsachse den Winkel φ_1 und mit der Ebene der beiden Querachsen den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$; ihre Projektion auf die letztere Ebene bildet mit der ersten Querachse den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varrho_1$ und mit der zweiten den Winkel $\pi - \varrho_1$. Aus diesem Grunde zerlegt sich ϑ_1' in die drei Komponenten $\vartheta_1' \sin\varphi_1 \cdot \sin\varrho_1$; $-\vartheta_1' \sin\varphi_1 \cos\varrho_1$ und $\vartheta_1' \cos\varphi_1$. Da endlich die Achse von ϱ_1' mit der Längsachse zusammenfällt, so stellt ϱ_1' unverkürzt einen Beitrag von γ_1 dar. Man hat daher die Beziehungen:

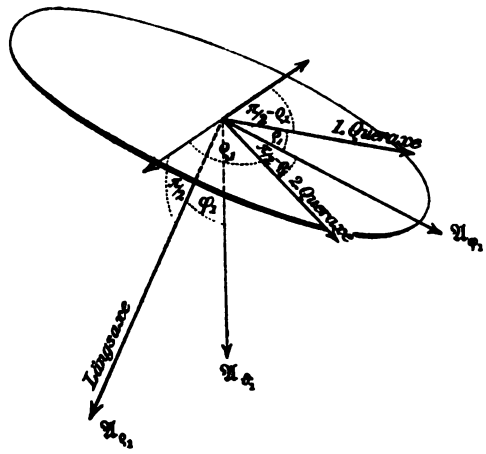


Fig. 6.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \varphi_1' \cos\varrho_1 + \vartheta_1' \sin\varphi_1 \sin\varrho_1 \\
\beta_1 &= \varphi_1' \sin\varrho_1 - \vartheta_1' \sin\varphi_1 \cos\varrho_1 \\
\gamma_1 &= \vartheta_1' \cos\varphi_1 + \varrho_1' .
\end{aligned} \tag{29}
$$

Setzt man diese Werte in (28) ein, so erhält man bei geeigneter Zusammenfassung schließlich für den aus der Drehung des ersten Gliedes um seinen Schwerpunkt S_1 hervorgehenden Beitrag zur lebendigen Kraft

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(A_1 \cos^2\varrho_1 + B_1 \sin^2\varrho_1) \cdot \varphi_1'^2 \\
&+ \tfrac{1}{2}(A_1 \sin^2\varphi_1 \sin^2\varrho_1 + B_1 \sin^2\varphi_1 \cos^2\varrho_1 + C_1 \cos^2\varphi_1) \cdot \vartheta_1'^2 + \tfrac{1}{2} C_1 \cdot \varrho_1'^2 \\
&+ (A_1 - B_1) \sin\varphi_1 \sin\varrho_1 \cos\varrho_1 \cdot \varphi_1' \vartheta_1' + C_1 \cos\varphi_1 \cdot \vartheta_1' \varrho_1' .
\end{aligned} \tag{30}
$$

Ersetzt man in (30) durchweg den Index 1 durch 2, so erhält man den entsprechenden aus der Drehung des zweiten Gliedes um seinen Schwerpunkt resultierenden Anteil an der lebendigen Kraft. Addiert man diese letzten beiden Beiträge zu den aus (26) und (27) durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}m_1$ bez. $\frac{1}{2}m_2$ hervorgehenden Größen und fügt noch (20) hinzu, so erhält man schließlich den Wert für die gesamte lebendige Kraft T des ganzen frei im Raume sich bewegenden Gelenksystems. Der auf diese Weise sich ergebende Ausdruck ist zunächst ziemlich umfangreich. Er kann aber mit Hilfe der beiden reduzierten Systeme, sowie der Hauptpunkte und Hauptstrecken der beiden Glieder auf etwa die Hälfte von Summanden reduziert werden, wie aus den folgenden Überlegungen hervorgeht.

Das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit φ_1' erscheint bei Zusammenfassung aller den Faktor $\varphi_1'^2$ enthaltenden Größen multipliziert mit der Summe

$$(31) \qquad \tfrac{1}{2}[(A_1 \cos^2\varrho_1 + B_1 \sin^2\varrho_1) + m_1 e_1^2 + m_2 d_1^2].$$

Hierbei bedeutet $A_1 \cos^2\varrho_1 + B_1 \sin^2\varrho_1$ das Trägheitsmoment des ersten Gliedes in bezug auf die zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ parallele Schwerpunktsachse (vgl. Figur 6). Geht man zu der durch den Hauptpunkt H_1 hindurchgehenden Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ selbst über (vgl. Figur 4), so vermehrt sich das Trägheitsmoment des ersten Gliedes um $m_1 e_1^2$. Fügt man weiterhin im Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ zu dem ersten Glied noch die Masse m_2 des zweiten, geht also zu dem ersten reduzierten System über, so vermehrt sich das Trägheitsmoment für die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ des Hauptpunktes H_1 noch um $m_2 d_1^2$. Es stellt daher der ganze Ausdruck (31) das halbe Trägheitsmoment des ersten reduzierten Systems in bezug auf die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ durch seinen Schwerpunkt H_1 dar. Da die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$, welche ja mit der Knotenlinie des Hauptpunktes identisch ist, im ersten Glied nicht fest liegt, so ist auch dieses Trägheitsmoment keine konstante Größe. Es ist daher geboten, dasselbe durch die beiden zu den festen Querachsen des ersten Gliedes gehörenden Trägheitsmomente auszudrücken. Da, wie sich herausstellen wird, in allen Summanden des mit Hilfe der reduzierten Systeme vereinfachten Ausdrucks für die lebendige Kraft des Systems die Gesamtmasse m_0 als Faktor auftritt, so empfiehlt es sich weiterhin, zur Darstellung der Trägheitsmomente der reduzierten Systeme die Trägheitsradien

einzuführen. Bezeichnet man bezüglich durch p_1, q_1 und r_1 die Trägheitsradien[1]) des ersten reduzierten Systems (also nicht bloß des ersten Gliedes) für die drei Hauptträgheitsachsen seines Schwerpunktes H_1, d. h. also für die vom Hauptpunkte H_1 ausgehende erste und zweite Querachse und die Längsachse des ersten Gliedes, so ist

$$\begin{aligned} m_o p_1^2 &= A_1 + m_1 e_1^2 + m_2 d_1^2 \\ m_o q_1^2 &= B_1 + m_1 e_1^2 + m_2 d_1^2 \\ m_o r_1^2 &= C_1. \end{aligned} \tag{32}$$

Infolgedessen kann man an Stelle von (31) auch kurz schreiben

$$\tfrac{1}{2} m\,[p_1^2 \cos^2 \varrho_1 + q_1^2 \sin^2 \varrho_1]. \tag{33}$$

Faßt man in dem Ausdruck für die lebendige Kraft alle Summanden zusammen, welche $\varphi_2'^2$ als Faktor enthalten, so zeigt sich, daß dieses Quadrat der Winkelgeschwindigkeit φ_2' multipliziert ist mit

$$\tfrac{1}{2}[(A_2 \cos^2 \varrho_2 + B_2 \sin^2 \varrho_2) + m_2 e_2^2 + m_1 c_2^2]. \tag{34}$$

Dieser Ausdruck hat aber, wie leicht zu erkennen ist, die Bedeutung des halben Trägheitsmomentes des zweiten reduzierten Systems in bezug auf die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ durch seinen Schwerpunkt H_2. Bezeichnet man in entsprechender Weise mit p_2, q_2 und r_2 die Trägheitsradien des zweiten reduzierten Systems für die vom Hauptpunkte H_2 ausgehende erste und zweite Querachse und die Längsachse des zweiten Gliedes, welche die drei Hauptträgheitsachsen des zweiten reduzierten Systems darstellen, so hat man zunächst

$$\begin{aligned} m_o p_2^2 &= A_2 + m_2 e_2^2 + m_1 c_2^2 \\ m_o q_2^2 &= B_2 + m_2 e_2^2 + m_1 c_2^2 \\ m_o r_2^2 &= C_2. \end{aligned} \tag{35}$$

Man kann daher den Ausdruck (34) ersetzen durch

$$\tfrac{1}{2} m_o [p_2^2 \cos^2 \varrho_2 + q_2^2 \sin^2 \varrho_2]. \tag{36}$$

---

1) Es ist besonders zu beachten, daß in den folgenden Formeln die mit p, q und r bezeichneten Größen Trägheitsradien und nicht, wie es zuweilen üblich ist, Winkelgeschwindigkeiten bedeuten.

Das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ϑ_1' zeigt sich multipliziert mit

$$(37)\quad \tfrac{1}{2}[(A_1 \sin^2\varphi_1 \sin^2\varrho_1 + B_1 \sin^2\varphi_1 \cos^2\varrho_1 + C_1 \cos^2\varphi_1) + m_1 e_1^2 \sin^2\varphi_1 + m_2 d_1^2 \sin^2\varphi_1]$$

In diesem Ausdruck bedeutet zunächst, wie man unschwer an der Hand von Figur 6 und Figur 4 erkennen wird, die in runder Klammer eingeschlossene Summe das Trägheitsmoment des ersten Gliedes für die vertikale Achse seines Schwerpunktes. Da nun die ebenfalls vertikale Achse $\mathfrak{A}_{S_1}$ durch den Hauptpunkt H_1 von dem Schwerpunkt S_1 den Abstand $e_1 \sin\varphi_1$ (vgl. Figur 4) besitzt, und der Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ von der Achse $\mathfrak{A}_{S_1}$ um $d_1 \sin\varphi_1$ entfernt ist, so hat (37) ebenfalls die Bedeutung eines halben Trägheitsmomentes des ersten reduzierten Systems, und zwar in bezug auf die vertikale Achse $\mathfrak{A}_{S_1}$ durch seinen Schwerpunkt H_1. Mit Hilfe der drei Hauptträgheitsradien läßt sich dasselbe aber in der kürzeren Form schreiben

$$(38)\quad \tfrac{1}{2} m_o[(p_1^2 \sin^2\varrho_1 + q_1^2 \cos^2\varrho_1) \sin^2\varphi_1 + r_1^2 \cos^2\varphi_1].$$

Auf ganz entsprechende Weise leitet man ab, daß der Faktor von $\vartheta_2'^2$ in dem Ausdruck für T den Wert hat

$$(39)\quad \tfrac{1}{2} m_o[(p_2^2 \sin^2\varrho_2 + q_2^2 \cos^2\varrho_2) \sin^2\varphi_2 + r_2^2 \cos^2\varphi_2].$$

Endlich erscheint das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ϱ_1' und das von ϱ_2' mit dem halben Trägheitsmoment des ersten bez. zweiten reduzierten Systems in bezug auf die Längsachse seines Kerngliedes multipliziert. Dies geht unmittelbar aus (30) unter Berücksichtigung von (32) hervor.

In den Summanden von (30) und dem entsprechenden Ausdruck des zweiten Gliedes, welche das Produkt zweier zu demselben Gliede gehörenden Winkelgeschwindigkeiten besitzen, lassen sich nun auch die Trägheitsmomente der beiden reduzierten Systeme einführen; denn es ergibt sich nach (32) und (35)

$$(40)\quad \begin{aligned} A_1 - B_1 &= m_o(p_1^2 - q_1^2) \\ A_2 - B_2 &= m_o(p_2^2 - q_2^2). \end{aligned}$$

Die nun noch übrig bleibenden Summanden in dem Ausdruck für T enthalten nur Produkte aus je zwei Winkelgeschwindigkeiten, von denen die eine zum ersten und die andere zum zweiten Glied gehört. Wie man aus (26) und (27) erkennt, weisen alle diese

Summanden nach geeigneter Zusammenfassung den gemeinsamen Faktor $(m_1 e_1 c_2 + m_2 d_1 e_2)$ auf, der sich ebenfalls mit Hilfe der reduzierten Systeme auf einen einfacheren Ausdruck bringen läßt. Ersetzt man nämlich nach (18) $m_1 e_1$ durch $m_2 d_1$, ferner nach (19) $m_2 e_2$ durch $m_1 c_2$, und $m_1 + m_2$ durch m_o, so ergibt sich

$$m_1 e_1 c_2 + m_2 d_1 e_2 = m_o d_1 c_2. \tag{41}$$

Berücksichtigt man alle diese Vereinfachungen, so erhält man schließlich für die gesamte lebendige Kraft T des ganzen Gelenksystems im Falle vollkommen freier Beweglichkeit im Raume den Wert:

$$\begin{aligned}
(42)\quad T = {} & \tfrac{1}{2} m_o (x_o'^2 + y_o'^2 + z_o'^2) \\
& + \tfrac{1}{2} m_o [p_1^2 \cos^2 \varrho_1 + q_1^2 \sin^2 \varrho_1] \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_o [p_2^2 \cos^2 \varrho_2 + q_2^2 \sin^2 \varrho_2] \cdot \varphi_2'^2 \\
& + \tfrac{1}{2} m_o [(p_1^2 \sin^2 \varrho_1 + q_1^2 \cos^2 \varrho_1) \sin^2 \varphi_1 + r_1^2 \cos^2 \varphi_1] \cdot \vartheta_1'^2 \\
& \quad + \tfrac{1}{2} m_o [(p_2^2 \sin^2 \varrho_2 + q_2^2 \cos^2 \varrho_2) \sin^2 \varphi_2 + r_2^2 \cos^2 \varphi_2] \cdot \vartheta_2'^2 \\
& + \tfrac{1}{2} m_o r_1^2 \cdot \varrho_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_o r_2^2 \cdot \varrho_2'^2 \\
& + m_o (p_1^2 - q_1^2) \sin \varrho_1 \cos \varrho_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1' \vartheta_1' \\
& \quad + m_o (p_2^2 - q_2^2) \sin \varrho_2 \cos \varrho_2 \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2' \vartheta_2' \\
& + m_o r_1^2 \cos \varphi_1 \cdot \vartheta_1' \varrho_1' + m_o r_2^2 \cos \varphi_2 \cdot \vartheta_2' \varrho_2' \\
& + m_o d_1 c_2 [\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1)] \cdot \varphi_1' \varphi_2' \\
& - m_o d_1 c_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_1' \vartheta_2' \\
& + m_o d_1 c_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_2' \vartheta_1' \\
& + m_o d_1 c_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \vartheta_1' \vartheta_2'
\end{aligned}$$

Von diesen 15 Gliedern, welche den Ausdruck für T zusammensetzen, bezieht sich nur das erste auf die lebendige Kraft, welche aus der Bewegung des Gesamtschwerpunktes S_o hervorgeht. Behält der letztere während der Bewegung des Systems seine Lage im Raume bei, so kommt das erste Glied von (42) in Wegfall. Die übrigen 14 Glieder machen zusammen die lebendige Kraft der Bewegung des Systems um seinen Schwerpunkt aus.

Aus Formel (42) kann man als speziellen Fall natürlich auch den bekannten Wert der lebendigen Kraft eines einzigen frei im Raume sich bewegenden starren Körpers erhalten. Man braucht zu diesem Zwecke nur die drei Winkelgeschwindigkeiten φ_2', ϑ_2' und ϱ_2' gleich Null zu setzen; dann verschwinden aus (42) alle Glieder, in welchen eine mit dem Index 2 versehene Größe vorkommt, und es bleiben im ganzen nur noch 6 Glieder, wenn der

Schwerpunkt sich nicht mit bewegt, sogar nur noch 5 Glieder übrig.[1]) Die auf den Hauptpunkt des ersten Gliedes bezogenen Trägheitsradien p_1, q_1 und r_1 gehen dabei in die Hauptträgheitsradien für den Schwerpunkt des starren Körpers über; denn das erste reduzierte System ist dann mit dem starren Körper, und der Hauptpunkt H_1 mit dem Schwerpunkt desselben identisch.

Ist beim zweigliedrigen Gelenksystem das Trägheitsellipsoid eines jeden der beiden reduzierten Systeme ein Rotationsellipsoid mit der Längsachse seines Kerngliedes als Rotationsachse — ein Fall, der sich bei den Extremitätenabschnitten des menschlichen Körpers nahezu realisiert findet —, so vereinfacht sich die Formel (42) noch etwas. Da in diesem Falle die zu den beiden Querachsen eines jeden Gliedes gehörenden Hauptträgheitsachsen p_j und q_j einander gleich werden, so fallen zunächst die beiden Summanden auf der sechsten und siebenten Zeile von (42) fort; außerdem gehen die Summen $p_j^2 \cos^2 \varrho_j + q_j^2 \sin^2 \varrho_j$ und $p_j^2 \sin^2 \varrho_j + q_j^2 \cos^2 \varrho_j$ dann einfach in p_j^2 über.

Die Formel (42) gibt den Wert der lebendigen Kraft des Gelenksystems für jede beliebige Bewegung desselben an; sie muß daher auch jeden speziellen Fall in sich enthalten. Bei den Bewegungen organischer Gelenksysteme kommt es nun vielfach vor, daß ein Punkt auf der Längsachse eines Gliedes festbleibt. Denkt man z. B. den Rumpf mit dem an ihm befindlichen Schultergürtel im Raume festgestellt, so kann der Arm sich nur noch so bewegen, daß ein Punkt der Längsachse des Oberarmes, nämlich der Mittelpunkt des Humeruskopfes, seinen Ort im Raume beibehält. Man kann daher in diesem Falle für die Untersuchung der Bewegungen des Armes unter der Einwirkung der Muskeln den Arm ganz vom übrigen Körper losgelöst annehmen und ihn als ein nur aus zwei oder drei Gliedern zusammengesetztes räumliches Gelenksystem auffassen, bei dessen Bewegungen ein Punkt der Längsachse des Oberarms im Raume festbleibt.

Um für den Fall, daß ein Punkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes eine feste Lage im Raume einnimmt, den speziellen Wert

1) Man vergleiche z. B. den in der Theorie des Kreisels von Klein und Sommerfeld auf Seite 156 angegebenen Wert für T, wobei zu beachten ist, daß dort an Stelle der hier verwendeten Buchstaben φ, ϑ, ϱ die Buchstaben ϑ, ψ, φ stehen, und daß die Formel sich auf den symmetrischen Kreisel bezieht, bei welchem die Trägheitsmomente A und B gleiche Werte haben.

der lebendigen Kraft des Systems anzugeben, braucht man nur zu untersuchen, in welcher Weise sich die Geschwindigkeit des Gesamtschwerpunktes S_0 durch die 6 Winkelgeschwindigkeiten φ_j, ϑ_j, ϱ_j ausdrücken läßt; denn nach den früheren Angaben hat das Gelenksystem in diesem Falle nur noch 6 Grade von Bewegungsfreiheit, so daß also 6 allgemeine Koordinaten genügen müssen, um alle für die Bewegung in Betracht kommenden Größen, insbesondere die lebendige Kraft des Systems, ausdrücken zu können.

Der feste Punkt O_1 liege auf der Längsachse des ersten Gliedes so, daß der Hauptpunkt H_1 von ihm in positiver Richtung um die Strecke c_1 entfernt ist (vgl. Figur 4). Nach der allgemeingültigen Beziehung zwischen den Hauptpunkten und dem Gesamtschwerpunkt des Systems gelangt man von O_1 nach S_0, indem man die Vektorsumme $\bar{c}_1 + \bar{c}_2$ bildet. Umgekehrt würde man von S_0 auf O_1 geführt, wenn man von ihm aus diese beiden Vektoren in entgegengesetzter Richtung nach einander abträgt. Nach den Überlegungen, welche zu der Aufstellung von Formel (21) geführt haben, kann es nicht zweifelhaft sein, daß man direkt durch diese Formel auch die zu S_0 relative Verrückung des Punktes O_1 ausdrücken kann, falls man in derselben nur den Vektor $-\bar{e}_1$, um welchen S_1 von H_1 entfernt ist, durch den Vektor $-\bar{c}_1$ ersetzt. Es muß daher umgekehrt die zu dem festen Punkte O_1 relative Verrückung des Gesamtschwerpunktes S_0, bei welcher den einzelnen Komponenten der Verrückung natürlich das entgegengesetzte Vorzeichen zukommt, den Wert besitzen

$$(43) \qquad \overline{c_1 \cdot d\varphi_1} + \overline{c_1 \sin\varphi_1 \cdot d\vartheta_1} + \overline{c_2 \cdot d\varphi_2} + \overline{c_2 \sin\varphi_2 \cdot d\vartheta_2}.$$

Man erhält also unmittelbar das Quadrat der Geschwindigkeit des Gesamtschwerpunktes bei festgehaltenem O_1 aus Formel (26), indem man nur in derselben überall e_1 durch c_1 ersetzt. Denkt man dies ausgeführt und den ganzen Ausdruck mit $\frac{1}{2}m_0$ multipliziert, so hat man damit den Teil der lebendigen Kraft des ganzen Gelenksystems gewonnen, der aus der Bewegung des Gesamtschwerpunktes im vorliegenden Falle resultiert, und welcher in Formel (42) an Stelle von $\frac{1}{2}m_0(x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2)$ zu setzen ist.

Faßt man nun wiederum alle Glieder in T zusammen, welche als Faktor das Quadrat der gleichen Winkelgeschwindigkeit oder ein Produkt aus denselben beiden Winkelgeschwindigkeiten ent-

halten, so zieht sich der ganze Ausdruck diesmal auf nur 14 Glieder zusammen.

Der Faktor von $\varphi_1'^2$ in (42) hatte die Bedeutung des halben Trägheitsmomentes des ersten reduzierten Systems in bezug auf die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ durch den Hauptpunkt des ersten Gliedes. Da der letztere den Schwerpunkt des reduzierten Systems darstellt, so wird sich das Trägheitsmoment desselben um $m_o a^2$ vermehren, wenn man zu einer zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ parallelen Achse übergeht, welche vom Hauptpunkt H_1 den Abstand a besitzt. Nun wird durch das Hinzutreten der lebendigen Kraft des Gesamtschwerpunktes der Faktor von $\varphi_1'^2$ um $\frac{1}{2} m_o c_1^2$ vergrößert. Denkt man durch O_1 eine zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ parallele Achse gelegt, so besitzt dieselbe vom Hauptpunkte H_1 den Abstand c_1, weil ja diese Achse auf der Längsachse des Gliedes senkrecht steht. Hieraus ist aber zu erkennen, daß nach der Zusammenfassung der Faktor von $\varphi_1'^2$ das halbe Trägheitsmoment des ersten reduzierten Systems für die zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ parallele Achse durch O_1 bedeutet. Da der Punkt O_1 auf einer Hauptträgheitsachse des Hauptpunktes H_1 liegt, so werden die drei Hauptträgheitsachsen des Punktes O_1 denen des Schwerpunktes H_1 des reduzierten Systems parallel laufen; die eine wird also wieder mit der Längsachse des ersten Gliedes zusammenfallen, während die beiden anderen in der Richtung der Querachsen des Hauptpunktes verlaufen. Bezeichnet man die Hauptträgheitsradien des ersten reduzierten Systems für den Punkt O_1 bezüglich mit p_{o1}, q_{o1}, r_{o1}, so hat man zwischen denselben und den Hauptträgheitsradien des Schwerpunktes H_1 demnach die Beziehungen

$$\begin{aligned} p_{o1}^2 &= p_1^2 + c_1^2 \\ q_{o1}^2 &= q_1^2 + c_1^2 \\ r_{o1}^2 &= r_1^2. \end{aligned} \tag{44}$$

Beachtet man, daß die zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ parallele Achse durch O_1 mit den Hauptträgheitsachsen von O_1 die gleichen Winkel bildet, wie $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ mit den Hauptträgheitsachsen von H_1, so kann man das mit $\varphi_1'^2$ multiplizierte Glied der lebendigen Kraft im vorliegenden Falle auch schreiben

$$\tfrac{1}{2} m_o [p_{o1}^2 \cos^2 \varrho_1 + q_{o1}^2 \sin^2 \varrho_1] \cdot \varphi_1'^2. \tag{45}$$

Man überzeugt sich leicht, daß man auch in den beiden mit $\vartheta_1'^2$ und $\varrho_1'^2$ multiplizierten Gliedern in (42) nur den Index 1

durch $o1$ zu ersetzen braucht, d. h. also, daß der Faktor von $\vartheta_1'^2$ das halbe Trägheitsmoment des ersten reduzierten Systems in bezug auf die zu $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ parallele Achse durch O_1 bedeutet, und der Faktor von $\varrho_1'^2$ wieder gleich ist dem halben Trägheitsmoment des reduzierten Systems für die Längsachse des Gliedes, welche in diesem Falle als Hauptträgheitsachse des Punktes O_1 aufzufassen ist. Das erstere geht daraus hervor, daß die zu $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ parallele Achse durch O_1 von H_1 den Abstand $c_1 \sin\varphi_1$ besitzt, und durch die lebendige Kraft des Gesamtschwerpunktes S_o gerade der Faktor von $\vartheta_1'^2$ um $\frac{1}{2} m_o c_1^2 \sin^2\varphi_1$ vermehrt wird.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist es nun nicht schwer einzusehen, daß die Faktoren von $\varphi_2'^2$, $\vartheta_2'^2$ und $\varrho_2'^2$ in dem Ausdruck für die lebendige Kraft des um den festgehaltenen Punkt O_1 sich bewegenden Gelenksystems die halben Trägheitsmomente des zweiten reduzierten Systems in bezug auf die zu $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$ parallelen Achsen durch den Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ bedeuten; denn die durch den letzteren gezogenen Achsen besitzen von H_2 bezüglich die Abstände c_2, $c_2 \sin\varphi_2$ und 0. Bezeichnet man mit p_{o2}, q_{o2} und r_{o2} die auf den Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ sich beziehenden Hauptträgheitsradien des zweiten reduzierten Systems, so bestehen zwischen diesen und den Hauptträgheitsradien p_2, q_2, r_2 des Schwerpunktes H_2 des reduzierten Systems die Beziehungen

$$\begin{aligned} p_{o2}^2 &= p_2^2 + c_2^2 \\ q_{o2}^2 &= q_2^2 + c_2^2 \\ r_{o2}^2 &= r_2^2 \end{aligned} \tag{46}$$

Aus diesen und den Formeln (44) erkennt man weiterhin, daß man auch in der fünften und sechsten Zeile von (42), trotzdem zu den dort stehenden Ausdrücken nichts weiter hinzukommt, die Trägeitsradien der Hauptpunkte durch die des Punktes O_1 bezüglich $G_{1,2}$ ersetzen kann; denn es gilt nach (44) und (46) allgemein

$$p_{oj}^2 - q_{oj}^2 = p_j^2 - q_j^2. \tag{47}$$

Die nun noch fehlenden Glieder der lebendigen Kraft erscheinen nach geeigneter Zusammenfassung sämtlich mit demselben Faktor $(d_1 c_2 + c_1 c_2)$ multipliziert. Bezeichnet man den Abstand des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ von O_1 mit l_1, so daß also

$$l_1 = c_1 + d_1 \tag{48}$$

ist, so kann man den gemeinsamen Faktor der vier letzten Glieder kurz durch $l_1 c_2$ angeben.

Man erhält daher schließlich für die lebendige Kraft T des Gelenksystems für den Fall, daß dasselbe sich nur um einen festen Punkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes bewegen kann, den Wert:

$$
\begin{aligned}
(49)\quad T = {} & \tfrac{1}{2} m_o [p_{o1}^2 \cos^2 \varrho_1 + q_{o1}^2 \sin^2 \varrho_1] \cdot \varphi_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_o [p_{o2}^2 \cos^2 \varrho_2 + q_{o2}^2 \sin^2 \varrho_2] \cdot \varphi_2'^2 \\
& + \tfrac{1}{2} m_o [(p_{o1}^2 \sin^2 \varrho_1 + q_{o1}^2 \cos^2 \varrho_1) \sin^2 \varphi_1 + r_{o1}^2 \cos^2 \varphi_1] \cdot \vartheta_1'^2 \\
& + \tfrac{1}{2} m_o [(p_{o2}^2 \sin^2 \varrho_2 + q_{o2}^2 \cos^2 \varrho_2) \sin^2 \varphi_2 + r_{o2}^2 \cos^2 \varphi_2] \cdot \vartheta_2'^2 \\
& + \tfrac{1}{2} m_o r_{o1}^2 \cdot \varrho_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_o r_{o2}^2 \cdot \varrho_2'^2 \\
& + m_o (p_{o1}^2 - q_{o1}^2) \sin \varrho_1 \cos \varrho_1 \sin \varphi_1 \cdot \varphi_1' \vartheta_1' \\
& + m_o (p_{o2}^2 - q_{o2}^2) \sin \varrho_2 \cos \varrho_2 \sin \varphi_2 \cdot \varphi_2' \vartheta_2' \\
& + m_o r_{o1}^2 \cos \varphi_1 \cdot \vartheta_1' \varrho_1' + m_o r_{o2}^2 \cos \varphi_2 \cdot \vartheta_2' \varrho_2' \\
& + m_o l_1 c_2 [\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1)] \quad \varphi_1' \varphi_2' \\
& - m_o l_1 c_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_1' \vartheta_2' \\
& + m_o l_1 c_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \varphi_2' \vartheta_1' \\
& + m_o l_1 c_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \vartheta_1' \vartheta_2'
\end{aligned}
$$

c) Die Bewegungsgleichungen.

Den 9 Freiheitsgraden des Systems im Falle freier Beweglichkeit im Raume entsprechen 9 Bewegungsgleichungen, welche unter Verwendung der allgemeinen Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Art aus dem unter (42) angegebenen Wert für die lebendige Kraft T des Systems leicht abgeleitet werden können, indem man die in diesen vorgeschriebenen partiellen Differentiationen der Reihe nach für die 9 allgemeinen Koordinaten x_o, y_o, z_o, φ_1, ϑ_1, ϱ_1, φ_2, ϑ_2, ϱ_2 und ihre ersten Abgeleiteten ausführt.

Die drei ersten sich auf diese Weise ergebenden Differentialgleichungen lauten:

$$
\begin{aligned}
m_o \cdot x_o'' &= \Sigma X \\
m_o \cdot y_o'' &= \Sigma Y \\
m_o \cdot z_o'' &= \Sigma Z,
\end{aligned}
\qquad (50)
$$

wobei x_o'', y_o'' und z_o'' die zweiten Differentialq
rechtwinkligen Koordinaten des Gesamtschw
Zeit t, und ΣX, ΣY und ΣZ die Summen
der drei Koordinatenachsen verlaufenden Kor

lichen äußeren Kräfte des ganzen Gelenksystems darstellen. Es sind dies die bekannten Bewegungsgleichungen, welche aussagen, daß der Schwerpunkt S_o sich gerade so bewegt, als ob die ganze Masse m_o des Systems in ihm konzentriert wäre, und alle äußeren Kräfte in ihrer Richtung und Stärke direkt in ihm angriffen.

Während diese ersten 3 Differentialgleichungen sich somit auf die Translationsbewegung beziehen, welche das ganze System nach Maßgabe der Bewegung seines Gesamtschwerpunktes ausführt, beschäftigen sich die übrigen 6 Gleichungen mit den außerdem von den beiden Gliedern des Systems ausgeführten Drehungen im Raume. In ihnen kommen die Koordinaten x_o, y_o, z_o des Schwerpunktes und deren Abgeleitete gar nicht mehr vor, sondern sie enthalten nur noch die 6 Winkelkoordinaten und deren ersten und zweiten Differentialquotienten nach der Zeit. Aus der lebendigen Kraft des Systems lassen sich dieselben bekanntlich durch die Formeln ableiten

$$(51)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_1}=Q_{\varphi_1} \qquad &&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_2'}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}=Q_{\varphi_2}\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_1'}\right)-\frac{\partial T}{\partial \vartheta_1}=Q_{\vartheta_1} &&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_2'}\right)-\frac{\partial T}{\partial \vartheta_2}=Q_{\vartheta_2}\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho_1'}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varrho_1}=Q_{\varrho_1} &&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho_2'}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varrho_2}=Q_{\varrho_2} \end{aligned}$$

wobei im vorliegenden Falle unter $Q_{\varphi_1}d\varphi_1$, $Q_{\vartheta_1}d\vartheta_1$, $Q_{\varrho_1}d\varrho_1$, $Q_{\varphi_2}d\varphi_2$, $Q_{\vartheta_2}d\vartheta_2$ und $Q_{\varrho_2}d\varrho_2$ die Summen der partiellen Elementararbeiten zu verstehen sind, welche von sämtlichen am Gelenksystem angreifenden äußeren und inneren Kräften geleistet werden, wenn man dem System sukzessive Verrückungen erteilt, bei denen entweder das erste Glied um die durch seinen Hauptpunkt gehende Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ oder $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$ bezüglich um den unendlich kleinen Winkel $d\varphi_1$, $d\vartheta_1$ oder $d\varrho_1$ gedreht wird, und das zweite System gleichzeitig Translationsbewegung ausführt, oder bei welchen das zweite Glied sich um die durch seinen Hauptpunkt gehende Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ oder $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$ bezüglich um den unendlich kleinen Winkel $d\varphi_2$, $d\vartheta_2$ oder $d\varrho_2$ dreht, und dabei gleichzeitig das erste Glied nur Translationsbewegung ausführt. Nach der in dieser Arbeit in Rücksicht auf die Kräfte vorgenommenen Erweiterung des Begriffs der reduzierten Systeme kann man auch kurz sagen, daß die obigen Produkte die Elementararbeiten der sämtlichen am ersten bezw. zweiten reduzierten System angreifenden Kräfte

darstellen, welche dieselben bei den Drehungen des betreffenden reduzierten Systems um seine durch seinen Schwerpunkt hindurchgehenden Achsen $\mathfrak{A}_\varphi$, $\mathfrak{A}_\vartheta$ und $\mathfrak{A}_\varrho$ um die unendlich kleinen Winkel $d\varphi$, $d\vartheta$ und $d\varrho$ leisten.

Führt man die in der ersten Gleichung vorgeschriebenen Differentiationen aus, so erhält man nach geeigneter Zusammenfassung für die linke Seite der Differentialgleichung den Wert

$$
\begin{aligned}
(52)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= m_0[p_1^2\cos^2\varrho_1 + q_1^2\sin^2\varrho_1]\cdot\varphi_1'' \\
&+ m_0(p_1^2 - q_1^2)\sin\varrho_1\cos\varrho_1\sin\varphi_1\cdot\vartheta_1'' \\
&- 2m_0(p_1^2 - q_1^2)\sin\varrho_1\cos\varrho_1\cdot\varphi_1'\varrho_1' \\
&- m_0[(p_1^2\sin^2\varrho_1 + q_1^2\cos^2\varrho_1) - r_1^2]\sin\varphi_1\cos\varphi_1\cdot\vartheta_1'^2 \\
&+ m_0[(p_1^2 - q_1^2)(\cos^2\varrho_1 - \sin^2\varrho_1) + r_1^2]\sin\varphi_1\cdot\vartheta_1'\varrho_1' \\
&+ m_0 d_1 c_2[\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)]\cdot\varphi_2'' \\
&+ m_0 d_1 c_2[\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)]\cdot\varphi_2'^2 \\
&- m_0 d_1 c_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\vartheta_2'' \\
&- m_0 d_1 c_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\vartheta_2'^2 \\
&- 2m_0 d_1 c_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\varphi_2'\vartheta_2'.
\end{aligned}
$$

So kompliziert dieser aus 10 Summanden bestehende Ausdruck auch erscheint, so läßt sich derselbe doch in sehr einfacher Weise deuten.

Zunächst erkennt man sofort, daß die ersten 5 Summanden nur Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen enthalten, die sich auf die Drehung des ersten Gliedes, oder richtiger gesagt des ersten reduzierten Systems beziehen. Die übrigen 5 Summanden sind dagegen nur mit Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen behaftet, welche die Drehung des zweiten Gliedes oder vielmehr des zweiten reduzierten Systems charakterisieren; dabei kommen in den letzteren die Winkelgeschwindigkeit ϱ_2' und die Winkelbeschleunigung ϱ_2'' der Drehung des zweiten reduzierten Systems um die Längsachse seines Kerngliedes überhaupt nicht vor.

Denkt man das zweite Glied ganz fort, sodaß man es nur noch mit einem einzigen starren Körper, nämlich dem ersten Glied, zu tun hat, so kommen die letzten 5 Summanden in (52) zum Wegfall. Beachtet man, daß in diesem Falle das erste reduzierte System von dem ersten Glied nicht mehr verschieden

ist, daß also die Masse m_0 in die Masse m_1 des ersten Gliedes, der Hauptpunkt H_1 in den Schwerpunkt S_1 des ersten Gliedes und die Hauptträgheitsradien p_1, q_1, r_1 des ersten reduzierten Systems in die für den Schwerpunkt des ersten Gliedes übergehen, so erkennt man unmittelbar, daß die 5 ersten Glieder des Ausdrucks (52), in welchen dann auch der Index 1 überflüssig wird, die linke Seite der auf die φ-Koordinate bezüglichen LAGRANGEschen Differentialgleichung der Drehung des starren Körpers um seinen Schwerpunkt darstellen. Die rechte Seite dieser Gleichung ist, worüber man nach I d) und den ausführlichen Auseinandersetzungen in der früheren Arbeit[1]) nicht im Zweifel sein kann, dann gleichbedeutend mit dem resultierenden Drehungsmoment der sämtlichen am starren Körper angreifenden Kräfte in bezug auf die Achse $\mathfrak{A}_\varphi$ durch den Schwerpunkt desselben, welche mit der Knotenlinie identisch ist.

Wenn nun aber das zweite Glied nicht fortfällt, sondern in der festgesetzten Weise mit dem ersten gelenkig verbunden ist, so beziehen sich die ersten 5 Summanden von (52) auf das erste reduzierte System, indem dann p_1, q_1 und r_1 die Hauptträgheitsradien desselben für seinen Schwerpunkt, d. h. den Hauptpunkt des ersten Gliedes, bedeuten. Bringt man die letzten 5 Summanden von (52), welche der drehenden Bewegung des zweiten Gliedes des Gelenksystems ihren Ursprung verdanken, auf die rechte Seite der LAGRANGEschen Gleichung, so hat man auf der linken Seite der letzteren dann genau den gleichen Ausdruck wie bei der entsprechenden zu einem einzigen starren Körper gehörenden LAGRANGEschen Differentialgleichung. An Stelle des starren Körpers ist aber jetzt das ebenfalls als starrer Körper aufzufassende erste reduzierte System getreten.

Auf der rechten Seite der Gleichung steht, abgesehen von den 5 herübergebrachten Summanden von (52), die Summe Q_{φ_1} der Drehungsmomente sämtlicher am ersten reduzierten System angreifenden Kräfte in bezug auf die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ durch den Hauptpunkt des ersten Gliedes; dabei sind nach dem früheren unter den am ersten reduzierten System angreifenden Kräften zu verstehen: zunächst alle am ersten Glied direkt angreifenden Kräfte in ihrer richtigen Lage, also mit ihrem richtigen Angriffspunkt,

1) a. a. O. Seite 41 ff., 49, 50, 54 und 82.

und dann außerdem noch alle ursprünglich am zweiten Glied angreifenden Kräfte, nachdem sie parallel mit sich nach dem Mittelpunkt $G_{1,2}$ des Verbindungsgelenks verlegt worden sind. Zu diesen Drehungsmomenten treten nun die letzten 5 Summanden des Ausdrucks (52) mit umgekehrten Vorzeichen, deren Bedeutung die folgende ist.

Der erste Summand hat den Faktor $m_2 c_2 \varphi_2''$, der zweite den Faktor $m_2 c_2 \varphi_2'^2$, der dritte den Faktor $m_2 c_2 \sin\varphi_2 \vartheta_2''$, der vierte den Faktor $m_2 c_2 \sin\varphi_2 \vartheta_2'^2$ und der letzte den Faktor $2 m_2 c_2 \varphi_2' \vartheta_2' \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right)$, wobei im letzten Ausdruck $\cos\varphi_2$ durch $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right)$ ersetzt worden ist. Abgesehen von dem in allen Summanden außerdem vorhandenen Faktor d_1 kann der noch übrig bleibende Faktor als der Kosinus eines einzigen Winkels aufgefaßt werden.

Nun geben $c_2 \varphi_2''$ und $c_2 \varphi_2'^2$ die Größen der Tangentialbeschleunigung und Normalbeschleunigung an, welche der Hauptpunkt des zweiten Gliedes infolge der Drehung des letzteren um die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ relativ zum Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ besitzen. Man kann auch sagen, es sind die beiden Komponenten der Beschleunigung, welche der Hauptpunkt H_2 erfährt, wenn das zweite Glied um eine zu $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$ parallele Achse durch den Gelenkmittelpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit φ_2' und Winkelbeschleunigung φ_2'' gedreht wird. Die Tangentialbeschleunigung ist senkrecht zur Längsachse des zweiten Gliedes gerichtet und liegt dabei in der Ebene $\mathfrak{E}_2$ (Figur 4), welche mit der yz-Ebene des ruhenden Koordinatensystems den Winkel ϑ_2 bildet; in Figur 5 auf Seite 315 ist diese Richtung durch den nach 2 gehenden Kugelradius dargestellt. Die Normalbeschleunigung liegt dagegen in der Längsachse selbst und ist nach dem Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ hin gerichtet; sie besitzt also die negative Richtung der Längsachse des zweiten Gliedes. In Figur 5 ist der in dieser Richtung verlaufende Kugelradius eingezeichnet und sein Endpunkt auf der Kugeloberfläche durch $2'$ angedeutet worden.

Bei der Drehung des zweiten Gliedes um die Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ führt der Hauptpunkt H_2 relativ zum Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ bei konstantem φ_2 eine Kreisbewegung in horizontaler Ebene aus, deren Radius $c_2 \sin\varphi_2$ ist. Da die Drehung um diese vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ϑ_2' und der Winkelbeschleunigung ϑ_2'' stattfindet, so erfährt der Hauptpunkt des zweiten Gliedes infolge

dieser Drehung relativ zu $G_{1,2}$ eine Beschleunigung, deren Tangential- und Normalkomponente horizontale Richtung und bezüglich die Größe $c_2 \sin\varphi_2 \vartheta_2''$ und $c_2 \sin\varphi_2 \vartheta_2'^2$ besitzen. Die erstere steht dabei senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{E}_2$ (Figur 4); ihre Richtung wird in Figur 5 durch den nach II führenden Kugelradius dargestellt. Die letztere liegt in der Ebene $\mathfrak{E}_2$ selbst und ist nach der durch $G_{1,2}$ gehenden Vertikalen hin gerichtet, sowie es in Figur 5 der nach II′ gehende Kugelradius andeutet.

Endlich gibt der Ausdruck $2c_2\varphi_2'\vartheta_2' \sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_2\right)$, wie man leicht erkennt, die Größe der zusammengesetzten zentrifugalen Beschleunigung des Hauptpunktes H_2 relativ zu $G_{1,2}$ an. Die Bewegung von H_2 relativ zum Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ läßt sich nach den bisherigen Überlegungen so entstanden denken, daß derselbe sich in der Ebene $\mathfrak{E}_2$ mit der linearen Geschwindigkeit $c_2\varphi_2'$ bewegt, dabei aber diese Ebene selbst sich um eine durch $G_{1,2}$ gehende vertikal nach unten gerichtete Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ϑ_2' dreht. Nach dem Lehrsatz von CORIOLIS erfährt der Punkt infolge dieser zusammengesetzten Bewegung noch eine Beschleunigung, deren Größe durch das doppelte Produkt aus der linearen Geschwindigkeit in $\mathfrak{E}_2$, der Winkelgeschwindigkeit der Drehung dieser Ebene und dem Sinus des zwischen der Richtung jener linearen Geschwindigkeit und der Drehungsachse von $\mathfrak{E}_2$ eingeschlossenen Winkels gemessen wird; dieser Winkel ist aber gleich $\frac{\pi}{2}+\varphi_2$, wie man aus Figur 4, und insbesondere auch aus Figur 5 erkennt, in welcher der nach 2 gehende Kugelradius die Richtung der linearen Geschwindigkeit und der vertikal nach unten zeigende Radius die Richtung der Drehungsachse angibt. Die Richtung dieser sogenannten zusammengesetzten zentrifugalen Beschleunigung steht sowohl auf der linearen Geschwindigkeit als auch der Drehungsachse senkrecht und zeigt dabei nach der Seite, von welcher aus die vertikale Drehungsachse durch eine im Sinne des Uhrzeigers stattfindende Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}+\varphi_2$ in die Richtung der linearen Geschwindigkeit $c_2\varphi_2'$ übergeführt wird; sie wird daher in Figur 5 durch den nach II gehenden Kugelradius veranschaulicht.

Die geometrische Summe der angeführten 5 Beschleunigungskomponenten gibt die gesamte Beschleunigung γ_2 an, welche der Hauptpunkt H_2 des zweiten Gliedes relativ zum Gelenkmittel-

punkt $G_{1,2}$ erfährt. Man hat also, wenn man für $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_2\right)$ wieder $\cos\varphi_2$ einsetzt:

$$\overline{\gamma_2} = \overline{c_2\varphi_2''} + \overline{c_2\varphi_2'^2} + \overline{c_2\sin\varphi_2\vartheta_2''} + \overline{c_2\sin\varphi_2\vartheta_2'^2} + \overline{2c_2\varphi_2'\vartheta_2'\cos\varphi_2}. \tag{53}$$

Nach dem unter Ib) zuletzt angeführten allgemein gültigen Satze liegt der Schwerpunkt S_2 des zweiten Gliedes auf der Verlängerung des von $G_{1,2}$ nach H_2 führenden Vektors, d. h. aber hier der Längsachse des zweiten Gliedes, und zwar so, daß sein Abstand r_2 von $G_{1,2}$ sich zu c_2 verhält, wie die Gesamtmasse m_0 zu der Masse m_2 des zweiten Gliedes, was übrigens auch schon in der ersten der Formeln (19) zum Ausdruck gekommen ist. Man kann daher durch (53) auch sofort die Beschleunigung angeben, welche der Schwerpunkt S_2 des zweiten Gliedes relativ zu $G_{1,2}$ besitzt; man braucht zu diesem Zwecke nur auf der rechten Seite von (53) an Stelle von c_2 überall den Schwerpunktsabstand r_2 einzusetzen. Denkt man den so abgeänderten Ausdruck mit der Masse m_2 des zweiten Gliedes multipliziert, so erhält man die Effektivkraft $\overline{E_2}$ des Schwerpunktes S_2 für seine zum Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ relative Bewegung, falls man in ihm die Masse des zweiten Gliedes konzentriert denkt. Da nun aber nach (19) $m_2 r_2$ durch $m_0 c_2$ ersetzt werden kann, so ist diese Effektivkraft gleich der zu $G_{1,2}$ relativen Effektivkraft des Schwerpunktes H_2 des zweiten reduzierten Systems, sofern man in demselben die Masse m_0 dieses Systems konzentriert denkt. Man hat daher für die relative Effektivkraft $\overline{E_2}$ des Schwerpunktes S_2 aus (53) die Vektorsumme

$$\overline{E_2} = \overline{m_0 c_2\varphi_2''} + \overline{m_0 c_2\varphi_2'^2} + \overline{m_0 c_2\sin\varphi_2\vartheta_2''} + \overline{m_0 c_2\sin\varphi_2\vartheta_2'^2} + \overline{2m_0 c_2\varphi_2'\vartheta_2'\cos\varphi_2}. \tag{54}$$

Es läßt sich nun leicht nachweisen, daß die in den letzten 5 Gliedern von (52) zu den Größen dieser 5 Komponenten der Effektivkraft $\overline{E_2}$ außer der Hauptstrecke d_1 noch hinzutretenden Faktoren nichts anderes sind als die Kosinus der Winkel, welche die Richtungen dieser 5 Komponenten bezüglich mit der zur Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ und der Längsachse des ersten Gliedes senkrechten Richtung bilden, die in Figur 5 durch den Kugelradius $C1$ angegeben ist. Der Radius $C1$ bildet mit den 5 Komponenten bezüglich die Winkel (1, 2); (1, 2'); (1, II); (1, II') und (1, II). Die Kosinus der Winkel (1, 2) und (1, II) sind schon in (25) angegeben worden. Für die Kosinus der beiden Winkel (1, 2') und (1, II')

folgt aber aus den sphärischen Dreiecken ($1\,P\,2'$) und ($1\,P\,\mathrm{II}'$) nach dem Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie, da $(P, 2') = \varphi_2$ und (P, II') gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, in der Tat

$$(55)\qquad \begin{aligned} \cos(1, 2') &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \\ \cos(1, \mathrm{II}') &= -\cos\varphi_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1). \end{aligned}$$

Es hat sich also ergeben, daß die 5 letzten Glieder des Ausdrucks (52) zusammen gleich sind der mit der Hauptstrecke d_1 multiplizierten Projektion der zu $G_{1,2}$ relativen Effektivkraft $\overline{E_2}$ des Schwerpunktes S_2 auf die Richtung $C1$, welche gleichzeitig auf der Längsachse des ersten Gliedes und der Richtung der Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ senkrecht steht. Denkt man nun aber diese 5 Summanden von (52) auf die andere Seite der zur Koordinate φ_1 gehörenden LAGRANGEschen Gleichung gebracht, so ändert sich in allen das Vorzeichen; sie geben dann zusammen die mit d_1 multiplizierte Projektion einer der Effektivkraft $\overline{E_2}$ entgegengesetzt gleichen Kraft $-\overline{E_2}$ auf die Richtung $C1$ an. Da d_1 den vom Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes nach dem Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ gezogenen Vektor bedeutet, und dieser Vektor auf der Richtung der Projektion von $-E_2$ senkrecht steht, so gibt die Summe der 5 auf die rechte Seite der Gleichung gebrachten Summanden das Drehungsmoment an, welches die der relativen Effektivkraft $\overline{E_2}$ entgegengesetzt gleiche Kraft $-\overline{E_2}$ auf die durch den Hauptpunkt des ersten Gliedes gehende Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ ausüben würde, wenn sie nicht im Schwerpunkt S_2, sondern in gleicher Stärke und Richtung im Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ angriffe. Beachtet man nun, daß die sämtlichen am zweiten Glied angreifenden Kräfte parallel mit sich nach dem Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ verlegt und den direkt am ersten Glied angreifenden Kräften hinzugefügt werden mußten, um die Einwirkung der Kräfte auf das erste reduzierte System zu erhalten, und daß die auf der rechten Seite der LAGRANGEschen Gleichung ursprünglich stehende Größe Q_{φ_1} das Drehungsmoment aller dieser Kräfte in bezug auf eben dieselbe durch H_1 gehende Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ bedeutet, so braucht man also nur den am ersten reduzierten System angreifenden Kräften noch die Kraft $-\overline{E_2}$ im Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ hinzuzufügen, um die ganze drehende Einwirkung auf das erste reduzierte System bezüglich der durch seinen Schwerpunkt H_1 gehenden Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ zu erhalten. Unter dem Einfluß des resultierenden Drehungsmomentes aller dieser Kräfte

bewegt sich dann das erste reduzierte System genau so wie ein einziger starrer Körper.

Es läßt sich voraussehen, daß das entsprechende Resultat für die Drehung des ersten reduzierten Systems um die im Raume feste, vom Hauptpunkte H_1 aus vertikal nach unten gerichtete Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ gelten wird. Um den strengen Beweis hierfür zu erbringen, muß man die zur Koordinate ϑ_1 gehörende Lagrangesche Gleichung von (51) in extenso anschreiben. Die Ausführung der partiellen Differentiationen von (42) nach ϑ_1' und ϑ_1 und der totalen Differentiation des zuerst erhaltenen Ausdrucks nach der Zeit t ergibt schließlich bei geeigneter Zusammenfassung verschiedener Glieder den Wert

$$
\begin{aligned}
(56)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_1} &= m_0[(p_1^2 \sin^2\varrho_1 + q_1^2\cos^2\varrho_1)\sin^2\varphi_1 + r_1^2\cos^2\varphi_1]\cdot\vartheta_1'' \\
&+ m_0(p_1^2 - q_1^2)\sin\varrho_1\cos\varrho_1\sin\varphi_1\cdot\varphi_1'' \\
&+ m_0 r_1^2\cos\varphi_1\cdot\varrho_1'' \\
&+ 2m_0[(p_1^2\sin^2\varrho_1 + q_1^2\cos^2\varrho_1) - r_1^2]\sin\varphi_1\cos\varphi_1\cdot\varphi_1'\vartheta_1' \\
&+ 2m_0(p_1^2 - q_1^2)\sin\varrho_1\cos\varrho_1\sin^2\varphi_1\cdot\vartheta_1'\varrho_1' \\
&+ m_0(p_1^2 - q_1^2)\sin\varrho_1\cos\varrho_1\cos\varphi_1\cdot\varphi_1'^2 \\
&+ m_0[(p_1^2 - q_1^2)(\cos^2\varrho_1 - \sin^2\varrho_1) - r_1^2]\sin\varphi_1\cdot\varphi_1'\varrho_1' \\
&+ m_0 d_1 c_2 \sin\varphi_1\cos\varphi_2\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\varphi_2'' \\
&- m_0 d_1 c_2 \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\varphi_2'^2 \\
&+ m_0 d_1 c_2 \sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\vartheta_2'' \\
&- m_0 d_1 c_2 \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\vartheta_2'^2 \\
&+ 2m_0 d_1 c_2 \sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\varphi_2'\vartheta_2'.
\end{aligned}
$$

Setzt man in diesem Ausdruck alle mit dem Index 2 versehenen Größen und außerdem die in m_0 steckende Masse m_2 gleich Null, was damit gleich bedeutend ist, daß das ganze System überhaupt nur aus dem ersten Glied besteht, so geht wieder (56) in den Ausdruck über, welcher bei einem einzigen starren Körper allein auf der linken Seite der Lagrangeschen Gleichung stehen würde. Bringt man daher die letzten 5 Summanden von (56), welche die zu der Drehung des zweiten Gliedes gehörenden Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen enthalten, auf die rechte Seite der Lagrangeschen Gleichung, so hat man auf der linken Seite nur noch den der Bewegung eines starren Körpers entsprechenden Ausdruck. Dieser starre Körper ist dann aber,

wenn das zweite Glied am ersten hängt, nicht das erste Glied, sondern das erste reduzierte System; denn sowohl die Masse m_v als auch die Trägheitsradien p_1, q_1, r_1 gehören dem ersten reduzierten System an, und die Winkelgeschwindigkeiten φ_1', ϑ_1', ϱ_1' und die Winkelbeschleunigungen φ_1'', ϑ_1'', ϱ_1'' beziehen sich auf Achsen durch den Schwerpunkt des ersten reduzierten Systems.

Die 5 auf die rechte Seite der LAGRANGEschen Gleichung herübergenommenen Summanden, welche dabei das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten haben, besitzen alle den Faktor $d_1 \sin\varphi_1$. Sieht man von letzterem ab, so bedeuten die übrig bleibenden 5 Faktoren die Projektionen der in entgegengesetzter Richtung genommenen 5 Komponenten, aus denen sich die zu $G_{1,2}$ relative Effektivkraft $\overline{E_2}$ nach (54) zusammensetzt, auf die Richtung CI (vgl. Figur 5). d. h. also auf die Richtung der Normalen zur Ebene $\mathfrak{E}_1$ (Figur 4), welche bekanntlich mit der Richtung der Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$ übereinstimmt. Denn mit dieser Richtung bilden die Richtungen der 5 Komponenten bezüglich die Winkel (I, 2); (I, 2'); (I, II); (I, II') und (I, II), deren Kosinus zum Teil schon in (25) angegeben sind, zum Teil sich an der Hand von Figur 5 leicht ableiten lassen. So ist $(\mathrm{I}, \mathrm{II}') = \frac{\pi}{2} + (\vartheta_2 - \vartheta_1)$ und $\cos(\mathrm{I}, 2')$ ergibt sich aus dem sphärischen Dreieck (I II' 2'), wenn man noch beachtet, daß $(\mathrm{II}'\, 2') = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$ ist und der Bogen (II' 2') auf (I II') senkrecht steht. Man hat demnach

$$\begin{aligned} \cos(\mathrm{I}, 2') &= -\sin\varphi_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \\ \cos(\mathrm{I}, \mathrm{II}') &= -\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1). \end{aligned} \tag{57}$$

Der allen 5 Summanden gemeinsame Faktor $d_1 \sin\varphi_1$ gibt nun, wie man leicht aus Figur 4 bestätigt, den Abstand des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ von der im Hauptpunkte H_1 des ersten Gliedes vertikal nach unten gehenden Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ an und steht dabei auf der Richtung CI, auf welche dis 5 Komponenten von $-\overline{E_2}$ projiziert gedacht sind, senkrecht. Deshalb geben die 5 auf die rechte Seite der LAGRANGEschen Gleichung gebrachten Summanden zusammen das Drehungsmoment an, welches die zu $G_{1,2}$ relative und in entgegengesetzter Richtung genommene Effektivkraft des Schwerpunktes S_2 in bezug auf die Achse $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ des Hauptpunktes besitzt, nachdem man sie parallel nach dem Gelenkmittelpunkte $G_{1,2}$ verlegt hat. Die gleiche Verlegung mußte mit allen am zweiten

Glied angreifenden Kräften vorgenommen werden, um die am ersten System angreifenden Kräfte zu erhalten. Die zur Koordinate ϑ_1 gehörende Lagrangesche Gleichung (51) sagt daher aus, daß, wenn man den am ersten reduzierten System angreifenden Kräften noch im Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ die Kraft $-\overline{E_2}$ hinzufügt, das erste reduzierte System sich unter der Einwirkung aller dieser Kräfte auch in bezug auf die Drehung um die vertikale Achse genau so verhält wie ein einziger starrer Körper.

Schließlich läßt sich das gleiche Resultat auch für die Drehung um die Längsachse des ersten Gliedes erweisen. Aus (42) erhält man den verhältnismäßig einfachen Ausdruck

$$
\begin{aligned}
(58)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varrho_1} &= m_0 r_1^2 \cdot \varrho_1'' \\
&+ m_0 r_1^2 \cos\varphi_1 \cdot \vartheta_1'' \\
&+ m_0 (p_1^2 - q_1^2) \sin\varrho_1 \cos\varrho_1 \cdot \varphi_1'^2 \\
&- m_0 (p_1^2 - q_1^2) \sin\varrho_1 \cos\varrho_1 \sin^2\varphi_1 \cdot \vartheta_1'^2 \\
&- m_0 [(p_1^2 - q_1^2)(\cos^2\varrho_1 - \sin^2\varrho_1) + r_1^2] \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1' \vartheta_1'.
\end{aligned}
$$

In diesem Ausdruck fällt zunächst auf, daß er gar keine Größen mit dem Index 2 enthält; nur in der Gesamtmasse m_0 steckt die Masse m_2 des zweiten Gliedes; setzt man diese gleich Null, so gehen wieder die Trägheitsradien des ersten reduzierten Systems in die des ersten Gliedes über, und man hat die linke Seite der zur Koordinate ϱ gehörenden Lagrangeschen Gleichung für einen einzigen starren Körper, nämlich das erste Glied. Es stellt daher (58) die linke Seite der entsprechenden Gleichung dar, welche zu dem als starrer Körper aufgefaßten ersten reduzierten System gehört. Die auf der rechten Seite der Lagrangeschen Gleichung stehende Größe Q_{ϱ_1} gibt das Drehungsmoment an, welches die sämtlichen am ersten reduzierten System angreifenden Kräfte, zu denen insbesondere auch die ursprünglich am zweiten Gliede angreifenden, aber nach $G_{1,2}$ parallel verlegten Kräfte gehören, für die Achse $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$ des ersten reduzierten Systems, welche hier mit der Längsachse des ersten Gliedes zusammenfällt, besitzen. Es spielt also hierbei die Effektivkraft $-\overline{E_2}$ scheinbar gar keine Rolle. Beachtet man aber, daß bei den beiden anderen Lagrangeschen Gleichungen diese Kraft nach $G_{1,2}$ verlegt zu denken war und daß dieser Punkt auf der Achse $\mathfrak{A}_{\varrho_1}$ selbst liegt, so kann man auch im vorliegenden Falle die Kraft $-\overline{E_2}$ den übrigen am ersten

reduzierten System angreifenden Kräften hinzufügen; denn ihr Drehungsmoment verschwindet ja für diese Achse. Das letztere tritt übrigens auch für die anderen nach $G_{1,2}$ verschobenen Kräfte des zweiten Gliedes zu.

Die drei ersten LAGRANGEschen Gleichungen von (51) lassen also übereinstimmend erkennen, daß, wenn man den am zweiten Glied angreifenden Kräften noch die Kraft $-\overline{E_2}$ hinzufügt und alle diese Kräfte nach dem Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ verlegt, bei den Bewegungen des zweigliedrigen räumlichen Gelenksystems das erste reduzierte System sich unter dem Einfluß dieser Kräfte und der direkt am ersten Glied angreifenden Kräfte gerade so um seinen Schwerpunkt H_1 dreht, als ob es einen einzigen im Raume frei beweglichen starren Körper darstellte.

Die Bedeutung des reduzierten Systems beschränkt sich nun nicht auf die Drehung um seinen Schwerpunkt, d. h. den Hauptpunkt seines Kerngliedes, sondern erstreckt sich auch auf die Bewegung des Hauptpunktes selbst. Aus der Beziehung zwischen den Hauptpunkten und dem Gesamtschwerpunkte des Gelenksystems (vgl. Figur 4) geht unmittelbar hervor, daß der Hauptpunkt H_1 des ersten Gliedes sich relativ zum Gesamtschwerpunkt S_0 genau so bewegt, wie der Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ relativ zum Hauptpunkt H_2 des zweiten Gliedes. Die zu $G_{1,2}$ relative Beschleunigung von H_2 war $\overline{\gamma_2}$ (vgl. Formel 53); daher ist die zu H_2 relative Beschleunigung von $G_{1,2}$ und ebenso die zu S_0 relative Beschleunigung von H_1 gleich $-\overline{\gamma_2}$. Bezeichnet man weiterhin die Beschleunigung des Gesamtschwerpunktes S_0 im Raume, deren Größe ja durch $\sqrt{\overline{x_0''}^2 + \overline{y_0''}^2 + \overline{z_0''}^2}$ bestimmt wird, kurz durch den Vektor $\overline{\gamma_0}$, so erhält man für die absolute Beschleunigung des Hauptpunktes H_1 im Raume den Wert

$$\overline{\gamma_0} - \overline{\gamma_2}. \tag{59}$$

Wenn nun das erste reduzierte System sich auch hinsichtlich der Bewegung seines Schwerpunktes H_1 wie ein starrer Körper verhalten soll, so müssen nach dem bekannten Satze von der Bewegung des Schwerpunktes die auf dasselbe einwirkenden Kräfte äquivalent mit der Vektorsumme

$$\overline{m_0 \gamma_0} - \overline{m_0 \gamma_2} \tag{60}$$

sein. Dies ist tatsächlich der Fall; denn $\overline{m_0 \gamma_0}$ ist gleich der geometrischen Summe aller am Gelenksystem einwirkenden äußeren

Kräfte, und $-\overline{m_2 \gamma_2}$ ist nach (53) und (54) nichts anderes als die Kraft $-\overline{E_2}$, welche der zu $G_{1,2}$ relativen Effektivkraft des Schwerpunktes S_2 entgegengesetzt gleich ist. Auf das erste reduzierte System wirken aber gerade die sämtlichen äußeren Kräfte des Gelenksystems und außerdem die Kraft $-\overline{E_2}$, welche ebenfalls als eine äußere Kraft des ersten reduzierten Systems aufzufassen ist.

Das reduzierte System ist zunächst ein fingiertes Massensystem, das sich deshalb nicht genau verwirklichen läßt, weil man nicht eine Masse nur in einem Punkt konzentrieren kann. Es läßt sich aber zeigen, daß unter Umständen das Gelenksystem sich gegenüber den einwirkenden Kräften gerade so verhält, wie es das reduzierte System tun würde, wenn man dasselbe verwirklichen könnte. Setzt man nämlich in den soeben ausführlich gedeuteten Lagrangeschen Gleichungen nur die zum zweiten Glied gehörenden Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen φ_2', ϑ_2' und φ_2'', ϑ_2'' gleich Null, ohne aber die übrigen mit dem Index 2 versehenen Größen m_2, c_2, φ_2 und ϑ_2 zu Null zu machen, so verschwinden zwar auch die letzten 5 Summanden in (52) und (56), alle anderen Summanden von (52), (56) und (58) bleiben aber unverändert. Insbesondere haben die Größen p, q und r, nach wie vor die Bedeutung als Hauptträgheitsradien des Schwerpunktes H_1 vom ersten reduzierten System, und auch die auf der rechten Seite der Lagrangeschen Gleichungen stehenden Größen Q behalten ihre Werte bei. Das Verschwinden der Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen des zweiten Gliedes ist damit gleichbedeutend, daß die Richtungskoordinaten φ_2, ϑ_2 für die Längsachse des zweiten Gliedes konstant bleiben, sodaß also die Längsachse des zweiten Gliedes sich bei den Bewegungen des Gelenksystems nur parallel im Raume verschieben könnte, während das zweite Glied selbst irgend welche Drehungen um die Längsachse ausführen könnte. Sieht man der Einfachheit halber von dieser Beweglichkeit um die Längsachse auch noch ab, so würde also das zweite Glied nur Translationsbewegungen ausführen dürfen. Dies vorausgesetzt verhält sich dann das ganze Gelenksystem in der Tat so, wie das fingierte erste reduzierte System. Nun wird allerdings der Fall, daß das zweite Glied die Drehungen des ersten Gliedes nur mit Translationsbewegung begleitet, nur selten wirklich eintreten. Es läßt aber die eben angestellte Betrachtung erkennen, daß durch die angenommene Verlegung der ganzen

Drehungsmoment von $-\overline{E_1}$ für die Achse $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$, welcher ihr jetzt als Punkt des zweiten Gliedes aufzufassender Angriffspunkt $G_{1,2}$ selbst angehört, verschwindet. Die drei LAGRANGEschen Gleichungen sagen daher wiederum aus, daß nach der Verlegung aller am ersten Glied angreifenden Kräfte und der Kraft $-\overline{E_1}$ nach dem Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$ unter der Einwirkung dieser und der außerdem direkt am zweiten Glied angreifenden Kräfte das zweite reduzierte System sich genau so um seinen Schwerpunkt H_2 dreht, wie es ein einziger starrer Körper von der entsprechenden Zusammensetzung tun würde. Es läßt sich weiterhin leicht erkennen, daß auch der Schwerpunkt H_2 sich bei den Bewegungen des ganzen Gelenksystems genau so bewegt, als ob die Masse m_0 des ganzen Systems in ihm konzentriert wäre und alle diese Kräfte direkt an ihm angriffen.

Macht man auch hier wieder die bei den Extremitätenabschnitten des menschlichen Körpers nahezu erfüllte Voraussetzung, daß die Trägheitsradien p_2 und q_2 für die beiden Querachsen einander gleich sind, so nehmen die drei LAGRANGEschen Gleichungen eine viel einfachere Form an. Bezeichnet man dabei das resultierende Drehungsmoment aller am zweiten reduzierten System angreifenden Kräfte, wiederum die Kraft $-\overline{E_1}$ mit eingeschlossen, für die durch seinen Schwerpunkt H_2 gehenden Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ und $\mathfrak{A}_{\psi_2}$ bezüglich mit D_{φ_2}, D_{ϑ_2} und D_{ψ_2}, so erhält man in diesem besonderen Falle die den Gleichungen (61) genau entsprechenden LAGRANGEschen Gleichungen, welche sich von diesen nur dadurch unterscheiden, daß überall der Index 2 an Stelle des Index 1 getreten ist.

Die bisher abgeleiteten Gleichungen gelten zwar zunächst für den Fall vollkommen freier Beweglichkeit des Gelenksystems im Raume; sie können aber auch auf den schon oben in betracht gezogenen Fall übertragen werden, daß bei den Bewegungen des räumlichen Gelenksystems ein Punkt O_1 der Längsachse des ersten Gliedes festbleibt, und das System infolgedessen nur Drehungen um diesen Punkt ausführen kann. Will man die bisher gewonnenen Differentialgleichungen diesem Falle anpassen, so muß man in (52), (56) und (58), wie ein Vergleich der Formeln (42) und (49) lehrt, die Trägheitsradien p_1, q_1, r_1, durch die Trägheitsradien p_{o1}, q_{o1}, r_{o1} des ersten reduzierten Systems für den Punkt O_1, ferner in den entsprechenden zum zweiten reduzierten System gehörenden Gleich ngen die Trägheitsradien p_2, q_2, r_2 durch die

Trägheitsradien p_{o2}, q_{o2}, r_{o2} des zweiten reduzierten Systems für den Gelenkmittelpunkt $G_{1,2}$, und außerdem überall die Hauptstrecke d_1 durch die schon früher mit l_1 bezeichnete Strecke $\overline{O_1 G_{1,2}}$ auf der Längsachse des ersten Gliedes ersetzen. An Stelle der in den Gleichungen (51) auf der rechten Seite stehenden Drehungsmomente Q_φ, Q_ϑ und Q_ϱ für Achsen durch die beiden Hauptpunkte treten ferner die von den gleichen Kräften ausgeübten Drehungsmomente für die parallelen Achsen durch O_1 bezw. $G_{1,2}$.

Die letzten 5 Glieder in den aus (52) und (56) hervorgehenden Ausdrücken stellen wieder Drehungsmomente dar und lassen sich daher zweckmäßiger Weise mit den Größen Q_φ und Q_ϑ auf der rechten Seite der Gleichungen (51) vereinigen.

Bei den zum ersten reduzierten System gehörenden Gleichungen geben diese auf die rechte Seite herübergenommenen Glieder, wie man ohne weiteres bestätigt, Drehungsmomente an für die in $G_{1,2}$ angreifend zu denkende Kraft $-E_2$, und zwar bezogen auf die durch den Punkt O_1 gehenden und zu $\mathfrak{A}_{\varphi_1}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_1}$ parallelen Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_{o1}}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_{o1}}$. Faßt man diese Drehungsmomente bezüglich mit den für die gleichen Achsen geltenden Drehungsmomenten Q_{φ_1}, Q_{ϑ_1} zu den resultierenden Drehungsmomenten $D_{\varphi_{o1}}$, $D_{\vartheta_{o1}}$ zusammen und setzt auch $D_{\varrho_{o1}}$ an Stelle von Q_{ϱ_1} ein, da die Kraft $-E_2$ für die Längsachse ($\mathfrak{A}_{\varrho_{o1}}$) das Drehungsmoment Null besitzt, so erhält man unter der Annahme, daß das Trägheitsellipsoid des ersten reduzierten Systems für O_1 ein Rotationsellipsoid ist, die drei ersten der untenstehenden Gleichungen (62).

Bei den zum zweiten reduzierten System gehörenden Gleichungen haben die entsprechenden 5 Glieder, die hier bezüglich mit dem Faktor φ_1'', $\varphi_1'^2$, ϑ_1'', $\vartheta_1'^2$ und $\varphi_1'\vartheta_1'$ behaftet sind, eine etwas andere Bedeutung, welche nach den früheren ausführlichen Erörterungen aber auch leicht zu erkennen ist. Versteht man unter $\overline{g_{1,2}}$ die Gesamtbeschleunigung des Gelenkmittelpunktes $G_{1,2}$ bei den Drehungen des ersten Gliedes um den festen Punkt O_1, so können nämlich diese 5 Glieder aufgefaßt werden als die Drehungsmomente einer im Schwerpunkte H_2 des zweiten reduzierten Systems angreifenden Kraft von der Größe $-\overline{m_o g_{1,2}}$, bezogen auf die durch den Punkt $G_{1,2}$ gehenden und zu $\mathfrak{A}_{\varphi_2}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_2}$ (und $\mathfrak{A}_{\varrho_2}$) parallelen Achsen $\mathfrak{A}_{\varphi_{o2}}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_{o2}}$ (und $\mathfrak{A}_{\varrho_{o2}}$). Bezeichnet man mit $D_{\varphi_{o2}}$, $D_{\vartheta_{o2}}$ und $D_{\varrho_{o2}}$ die aus diesen Drehungsmomenten und den

auf die gleichen Achsen bezogenen Größen Q_{φ_2}, Q_{ϑ_2}, Q_{ϱ_2} zusammengesetzten Drehungsmomente, so erhält man die letzten drei der Gleichungen (62), wenn wiederum angenommen wird, daß das Trägheitsellipsoid des zweiten reduzierten Systems für $G_{1,2}$ ein Rotationsellipsoid ist.

Das vollständige System der LAGRANGEschen Gleichungen lautet daher in diesem Falle

$$
\begin{aligned}
&m_o p_{o1}^2 \cdot \varphi_1'' - m_o(p_{o1}^2 - r_{o1}^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1 \cdot \vartheta_1'^2 + m_o r_{o1}^2 \sin\varphi_1 \cdot \vartheta_1' \varrho_1' = D_{\varphi_{o1}}\\
&m_o(p_{o1}^2 \sin^2\varphi_1 + r_{o1}^2\cos^2\varphi_1)\cdot \vartheta_1'' + m_o r_{o1}^2 \cos\varphi_1 \cdot \varrho_1''\\
&\quad + 2m_o(p_{o1}^2 - r_{o1}^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1 \cdot \varphi_1'\vartheta_1' - m_o r_{o1}^2 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1'\varrho_1' = D_{\vartheta_{o1}}\\
&m_o r_{o1}^2 \cdot \varrho_1'' + m_o r_{o1}^2 \cos\varphi_1 \cdot \vartheta_1'' - m_o r_{o1}^2 \sin\varphi_1 \cdot \varphi_1'\vartheta_1' = D_{\varrho_{o1}}\\
&m_o p_{o2}^2 \cdot \varphi_2'' - m_o(p_{o2}^2 - r_{o2}^2)\sin\varphi_2\cos\varphi_2 \cdot \vartheta_2'^2 + m_o r_{o2}^2 \sin\varphi_2 \cdot \vartheta_2' \varrho_2' = D_{\varphi_{o2}}\\
&m_o(p_{o2}^2 \sin^2\varphi_2 + r_{o2}^2\cos^2\varphi_2)\cdot \vartheta_2'' + m_o r_{o2}^2 \cos\varphi_2 \cdot \varrho_2''\\
&\quad + 2m_o(p_{o2}^2 - r_{o2}^2)\sin\varphi_2\cos\varphi_2 \cdot \varphi_2'\vartheta_2' - m_o r_{o2}^2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2'\varrho_2' = D_{\vartheta_{o2}}\\
&m_o r_{o2}^2 \cdot \varrho_2'' + m_o r_{o2}^2 \cos\varphi_2 \cdot \vartheta_2'' - m_o r_{o2}^2 \sin\varphi_2 \cdot \varphi_2'\vartheta_2' = D_{\varrho_{o2}}.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Auf diese Gleichungen wird sich die kinetische Untersuchung der im menschlichen Körper auftretenden zweigliedrigen räumlichen Gelenksysteme, wie z. B. des gegen den festen Schultergürtel beweglichen Arms oder des gegen das festgestellte Becken beweglichen Beins, vor allen Dingen zu stützen haben; daher sind dieselben in extenso angeführt worden.

III. Das allgemeine räumliche Gelenksystem.

Die im vorhergehenden Abschnitt ausführlich abgeleiteten LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen des zweigliedrigen räumlichen Gelenksystems waren schon ziemlich umfangreich und in ihrer Form wenig übersichtlich. Durch die Einführung der reduzierten Systeme hat sich ihnen aber eine sehr einfache Deutung geben lassen. Die kinetische Untersuchung des zweigliedrigen Systems ist unter Verwendung derselben auf die Kinetik eines einzigen starren Körpers zurückgeführt worden. Bei dem allgemeinen aus n Gliedern bestehenden Gelenksystem werden nun die Formeln natürlich noch sehr viel komplizierter, wenn auch das Prinzip ihrer Ableitung genau das gleiche ist, wie beim zweigliedrigen System. Die Deutung der zu dem allgemeinen System gehörenden Bewegungsgleichungen, welche infolge ihrer großen Anzahl und ihres bedeutenden Umfanges hier nicht in extenso mitgeteilt werden sollen, ist dagegen ebenso einfach wie beim zweigliedrigen System. Die genaue Analyse ergibt, daß jede der zahlreichen Bewegungsgleichungen sich auch hier als die Bewegungsgleichung eines reduzierten Systems, d. h. also eines isolierten starren Körpers interpretieren läßt. Wie zu jedem Glied im allgemeinen drei Winkel φ_j, ϑ_j, ϱ_j als allgemeine Richtungskoordinaten gehören, sofern man wieder zunächst alle Gelenke als solche von drei Freiheitsgraden mit festem Gelenkmittelpunkt auffaßt, so kommen jedem reduzierten System drei Bewegungsgleichungen zu, welche sich im Falle vollkommen freier Beweglichkeit des Gelenksystems auf die Drehungen desselben um Achen $\mathfrak{A}_{\varphi_j}$, $\mathfrak{A}_{\vartheta_j}$ und $\mathfrak{A}_{\varrho_j}$ durch seinen Schwerpunkt, d. h. den Hauptpunkt des dem System zugrunde liegenden Kerngliedes beziehen.

Beim zweigliedrigen System war jedes der beiden Glieder nur mit einem durch ein Gelenk verbunden. Daß die Glieder des n-gliedrigen Systems im allgemeinen mehrere Gelenke besit-

durch welche sie mit anderen im Zusammenhang stehen, bedingt für die Deutung der Bewegungsgleichungen durchaus keine Komplikation. Es wiederholt sich an jedem der an einem Glied, etwa dem $j$ten Glied des Systems, befindlichen Gelenke derselbe Vorgang. Das Teilsystem, welches an dem Gelenk hängt, und das daher vom Gliede abfallen würde, wenn man das Gelenk durchtrennen wollte, wirkt infolge seiner eigenen Bewegung auf das $j$te Glied ein. Diese Einwirkung kann aber selbstverständlich nur da stattfinden, wo das Teilsystem mit dem $j$ten Glied in Berührung ist, d. h. also in dem beide verbindenden Gelenke.

Von der Eigenbewegung des Teilsystems sondert man zweckmäßiger Weise zunächst eine Translationsbewegung ab, welche mit der Bewegung des Mittelpunktes des Verbindungsgelenks übereinstimmt. Bei dieser behält der Schwerpunkt des Teilsystems seine Lage relativ zum Gelenkmittelpunkt bei, und der Einfluß derselben auf die Bewegung des $j$ten Gliedes kann dadurch vollkommen zur Darstellung gebracht werden, daß man die ganze Masse des Teilsystems nach dem Mittelpunkte des Verbindungsgelenks verlegt und dem $j$ten Gliede hinzugefügt denkt, wie es für die Zusammensetzung des $j$ten reduzierten Systems erforderlich ist.

Außer der Translationsbewegung werden nun die einzelnen Glieder des Teilsystems noch Drehungen im Raume ausführen, welche zur Folge haben, daß der Schwerpunkt des Teilsystems sich relativ zum Mittelpunkte des Verbindungsgelenks bewegt. Auch diese Drehbewegung des Teilsystems wird natürlich ihren Einfluß auf die Bewegungen des $j$ten Gliedes ausüben; und da zeigt nun die genaue Analyse der Bewegungsgleichungen, daß derselbe auch im allgemeinen Falle durch eine im Mittelpunkte des Verbindungsgelenks angreifende Kraft dargestellt werden kann, welche der Effektivkraft der zum Mittelpunkte des Verbindungsgelenks relativen Bewegung des Schwerpunktes des Teilsystems entgegengesetzt gleich ist. In Rücksicht auf den unter I b) geschilderten Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten und den Schwerpunkten der Teilsysteme kann man auch für diese Effektivkraft des Schwerpunktes des Teilsystems das Produkt aus der Gesamtmasse m_0 des ganzen Gelenksystems und der zum Mittelpunkte des Verbindungsgelenks relativen Beschleunigung des (veränderlichen) Hauptpunktes des Teilsystems, welche kurz als die relative Effektivkraft dieses Hauptpunktes bezeichnet sein soll, einsetzen; auch diese Effektiv-

kraft ist in entgegengesetzter Richtung zu nehmen und nach dem Mittelpunkte des Verbindungsgelenks verlegt zu denken.

Endlich werden auch die an dem Teilsystem direkt angreifenden Kräfte auf die Bewegung des $j$ten Gliedes von Einfluß sein; man erhält denselben ohne weiteres dadurch, daß man alle diese Kräfte parallel mit sich nach dem Mittelpunkte des Verbindungsgelenks verlegt.

Denkt man nun an jedem Gelenkmittelpunkte des $j$ten Gliedes die Verlegung der Masse des Teilsystems, der in negativer Richtung genommenen relativen Effektivkraft des Hauptpunktes des Teilsystems und der an dem Teilsystem direkt angreifenden Kräfte durchgeführt, so erhält man das $j$te reduzierte System und eine Reihe von Kräften, welche an Punkten desselben angreifen. Diese Kräfte zerfallen in drei Gruppen. Die erste Gruppe umfaßt alle Kräfte, die schon direkt an dem $j$ten Gliede angreifen. Die zweite Gruppe enthält die übrigen Kräfte des Gelenksystems, welche ursprünglich außerhalb des $j$ten Gliedes angreifen und parallel nach dem ihrem Angriffspunkte innerhalb des Gelenksystems am nächsten liegenden Gelenkmittelpunkte des $j$ten Gliedes verlegt sind. Diese beiden Gruppen machen zusammen die Kräfte aus, welche früher kurz als die Kräfte des $j$ten reduzierten Systems bezeichnet worden sind. Zu denselben kommt nun noch eine dritte Gruppe von Kräften hinzu, welche von vornherein nicht an dem Gelenksystem vorhanden sind, sondern ihre Entstehung erst der Bewegung desselben verdanken; es sind dies die in entgegengesetzter Richtung zu nehmenden relativen Effektivkräfte der Hauptpunkte der verschiedenen am $j$ten Glied hängenden Teilsysteme, welche ebenfalls in den Mittelpunkten der die Teilsysteme mit dem $j$ten Gliede verbindenden Gelenke angreifend zu denken sind. Unter der Einwirkung dieser drei Gruppen von Kräften bewegt sich nun das $j$te reduzierte System genau so wie ein einziger starrer Körper. Sein Schwerpunkt, d. h. also der Hauptpunkt des $j$ten Gliedes, führt dieselbe Beschleunigung im Raume aus, als wenn in ihm die ganze Masse m_0 des Gelenksystems konzentriert wäre und an ihm die sämtlichen Kräfte der angeführten drei Gruppen direkt angriffen. Außerdem dreht sich das $j$te reduzierte System genau so um seinen Schwerpunkt, wie es ein starrer Körper von gleicher Beschaffenheit unter der Einwirkung der drei Gruppen von Kräften tun würde. Dies ist auch

für das komplizierteste räumliche Gelenksystem die Bedeutung der Bewegungsgleichungen, sowohl unter der Voraussetzung vollkommen freier Beweglichkeit im Raume, als auch in dem Falle, daß die Bewegung des Gelenksystems an irgend welche Bedingungen geknüpft ist, wenn man nur diese Bedingungen durch geeignete Kräfte realisiert denkt.

Der Vorteil, welcher hierdurch für die Ableitung der Bewegungsgleichungen der räumlichen Gelenksysteme gewonnen ist, liegt auf der Hand. Man braucht im gegebenen Falle gar nicht mehr auf die allgemeinen LAGRANGEschen Differentialgleichungen der Bewegung zurückzugreifen, man ist vollkommen der Mühe enthoben, den in der Regel sehr komplizierten und umfangreichen Ausdruck für die lebendige Kraft des ganzen Systems aufzustellen, und kann die Gleichungen, unter Verwendung der bekannten Bewegungsgleichungen für einen einzigen starren Körper, sofort anschreiben, nachdem man die aus dem Aufbau des Gelenksystems resultierende Massenverteilung in den reduzierten Systemen durch Bestimmung der Lage der Hauptpunkte und der Größe der Trägheitsmomente festgestellt hat. Man ist dabei auch gar nicht an eine bestimmte Form der Bewegungsgleichungen gebunden, sondern kann alle Gleichungsformen, welche für die Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers aufgestellt worden sind, auch für das Gelenksystem verwenden. Insbesondere ist es hier durchaus möglich, die Drehungen der reduzierten Systeme um ihren Schwerpunkt in den sogenannten EULERschen Gleichungen auszudrücken.

Der einzige Unterschied zwischen den Bewegungsgleichungen eines starren Körpers und eines reduzierten Systems besteht nur darin, daß bei letzterem zu den an ihm angreifenden Kräften noch die in entgegengesetzter Richtung zu nehmenden relativen Effektivkräfte hinzutreten, welche erst aus der Bewegung des Gelenksystems abzuleiten sind. Diese Ableitung unterliegt aber nach den ausführlichen Auseinandersetzungen im I. Abschnitt durchaus keinen Schwierigkeiten. Da man zu dem Hauptpunkte eines Teilsystems des $j$ten Gliedes von dem Mittelpunkte des Verbindungsgelenks aus einfach dadurch gelangt, (vgl. hierzu Seite 299), daß man die Vektorsumme der zu den Gliedern des Teilsystems gehörenden Hauptstrecken bildet, welche innerhalb des Gelenksystems dem $j$ten Gliede am nächsten liegen, so kann man auch leicht die zu dem betreffenden Gelenkmittelpunkte gehörende Beschleunigung

des Hauptpunktes des Teilsystems gewinnen. Dieselbe wird sich aus soviel Komponenten zusammensetzen, als das Teilsystem Glieder besitzt, wobei jede von einem bestimmten Gliede herrührende Beschleunigungskomponente selbst wieder in eine Reihe von Komponenten zerfällt, welche von den Richtungskoordinaten, den Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen des betreffenden Gliedes abhängen, wie es sich schon bei den noch relativ einfachen Verhältnissen des zweigliedrigen räumlichen Gelenksystems gezeigt hatte.

Damit ist aber der Weg vorgezeichnet, auf dem man auch für ein im menschlichen oder tierischen Körper vorkommendes, oder bei einer Maschine verwendetes räumliches Gelenksystem ohne Mühe die Bewegungsgleichungen in der einfachsten Form aufstellen kann; denn die besonderen Fälle, in denen einige der Gelenke zwischen den Gliedern des Systems nur 1 und 2 Freiheitsgrade besitzen, sind, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, in dem angenommenen allgemeinen Fall von lauter Gelenken mit 3 Freiheitsgraden mit enthalten. Sie erfordern daher keine prinzipiell neue Untersuchung und lassen sich am besten nicht allgemein, sondern am bestimmten Beispiel erledigen.

Rückblick.

Die kinetische Untersuchung der Gliederbewegungen der Organismen erfordert die Kenntnis der Bewegungsgleichungen, d. h. also der Beziehungen, welche zwischen den Stellungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der einzelnen Glieder einerseits und den auf sie einwirkenden Kräften andererseits bestehen. Bevor man an die Lösung spezieller Probleme der physiologischen Mechanik herangehen kann, muß daher erst die allgemeine Mechanik der Gelenksysteme in dieser Richtung ausgebaut werden, um damit die Untersuchungen auf dem Gebiete der Physiologie der speziellen Bewegungen auf eine exakte Basis zu stellen. Je größer die Anzahl der Glieder eines Gelenksystems ist, und je größere Bewegungsfreiheit in den einzelnen Gelenken herrscht, um so zahlreicher und umfangreicher werden die für die Untersuchung erforderlichen Bewegungsgleichungen. Aus diesem Grunde wurde in einer früheren Abhandlung des Verfassers, welche sich zum ersten Male mit der allgemeinen Mechanik der aus Gliedern zusammengesetzten Gelenksysteme beschäftigt, die Untersuchung auf ebene Gelenksysteme beschränkt, bei denen alle Glieder durch Scharniergelenke mit parallelen Achsen verbunden sind, und außerdem die Schwerpunkte aller Glieder in einer zu diesen Gelenkachsen senkrechten Ebene liegen. Die Resultate dieser Arbeit lieferten dann später das Fundament zu einer Reihe spezieller Untersuchungen über bestimmte Bewegungen des menschlichen Körpers, welche, wie z. B. die Bewegungen des menschlichen Ganges, wenigstens in erster Annäherung als ebene Bewegungen aufgefaßt werden können; sie ermöglichten es auch, Fragen über die Beteiligung der Muskeln bei derartigen Bewegungen zu lösen, welche sich auf andere Weise bis dahin nicht vollkommen exakt und einwurfsfrei hatten entscheiden lassen.

Die ebenen Bewegungen des menschlichen Körpers und seiner Teile bilden nur die Ausnahme. In der Regel führt der Mensch, ebenso wie das Tier, bei den verschiedenen Arten der Lokomotion

und Arbeitsleistungen räumliche Bewegungen aus, wie es angesichts der größeren Bewegungsfreiheit in den Gelenken, welche dabei hauptsächlich in Anspruch genommen werden, auch nicht anders zu erwarten ist. Zur Untersuchung der räumlichen Bewegungen der organischen Gelenksysteme können aber natürlich die für ebene Gelenksysteme gefundenen Bewegungsgleichungen nicht verwendet werden. Es war daher eine Ausdehnung der früheren Arbeit auf den Raum erforderlich, um damit die Unterlagen für weitere spezielle Untersuchungen zu schaffen, die sich auf räumliche Bewegungen des menschlichen und tierischen Körpers und seiner Teile erstrecken sollen.

In der vorliegenden Abhandlung ist nun eingehend zunächst das zweigliedrige räumliche Gelenksystem, bei welchem die beiden Glieder durch ein Gelenk mit drei Graden der Freiheit verbunden sind, auf seine Bewegungsgleichungen untersucht worden. Die für dieses spezielle System gewonnenen Resultate gestatteten dann ohne weiteres eine Verallgemeinerung für das n-gliedrige räumliche Gelenksystem von ganz allgemeiner Natur, bei welchem insbesondere ein Glied auch mit mehr als zwei anderen durch Gelenke verbunden sein kann.

Die Methode der Ableitung der Bewegungsgleichungen der räumlichen Gelenksysteme ist im wesentlichen dieselbe wie die, welche in der früheren Arbeit für die ebenen Gelenksysteme ausgebaut wurde. Dieselbe gründet sich auch hier auf die Einführung der reduzierten Systeme, d. h. gewisser an die einzelnen Glieder sich anschließender Massensysteme, welche dadurch entstehen, daß in allen Gelenken eines Gliedes die Massen der an diesen Gelenken hängenden Abschnitte des ganzen Gelenksystems konzentriert und dem betreffenden Gliede hinzugefügt gedacht werden. Es war daher nötig, zunächst nachzuweisen, daß die früher gefundenen vielfachen Eigenschaften dieser reduzierten Systeme und ihrer Schwerpunkte, die als Hauptpunkte der einzelnen Glieder bezeichnet werden, auch beim allgemeinsten räumlichen Gelenksystem ihre Gültigkeit behalten. Dies ist in einem I. Abschnitt der Arbeit ausführlich bewiesen worden. Es hat sich unter anderem gezeigt, daß derselbe enge Zusammenhang zwischen den Hauptpunkten der einzelnen Glieder einerseits und dem Gesamtschwerpunkte und den verschiedenen Partialschwerpunkten des allgemeinsten räumlichen Gelenksystems andererseits besteht, wie er sich schon für das

ebene Gelenksystem hatte nachweisen lassen. Dieser Zusammenhang ermöglicht auch beim räumlichen System eine sehr einfache Konstruktion der Lage des Gesamtschwerpunktes und der Teilschwerpunkte und liefert die einfachsten Formeln, mit deren Hilfe man die Bewegungen dieser Schwerpunkte, ihre Bahnen sowohl, wie ihre Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, aus der Bewegung irgend eines bestimmten Punktes des Systems ableiten kann. Der enge Zusammenhang zwischen Hauptpunkten und Schwerpunkten gibt auch weiterhin das Mittel an die Hand, den Ausdruck für die lebendige Kraft des ganzen Gelenksystems bei jeder beliebigen Bewegung desselben auf sehr einfache und zugleich anschauliche Weise abzuleiten und auf die konzentrierteste Form zu bringen.

Während in der früheren Abhandlung bei der Zusammensetzung der reduzierten Systeme nur auf die Verlegung der Massen der an einem Gliede hängenden Teilsysteme nach den verschiedenen Gelenken des Gliedes Rücksicht genommen wurde, ist in der vorliegenden Arbeit zum ersten Male eine in Hinsicht auf die am Gelenksystem angreifenden Kräfte erforderliche Erweiterung des Begriffs der reduzierten Systeme eingeführt und verwendet worden. Die außerhalb eines Gliedes am Gelenksystem angreifenden Kräfte üben infolge des Gelenkzusammenhanges natürlich auch einen Einfluß auf das betreffende Glied und das aus demselben hervorgehende reduzierte System aus. Diese Einwirkung ist von der Art, als ob jede dieser Kräfte in gleicher Richtung und Stärke an dem ihrem Angriffspunkte innerhalb des Gelenksystems am nächsten liegenden Gelenkmittelpunkte des betreffenden Gliedes angriffe. Denkt man daher mit den Massen der an einem Gliede hängenden Teilsysteme auch die an den letzteren angreifenden Kräfte nach dem nächsten Gelenkmittelpunkte des Gliedes verlegt, so erhält man nicht nur das zu dem Gliede gehörende reduzierte System, sondern auch die an diesem reduzierten System angreifenden Kräfte. Wie also die Masse eines reduzierten Systems mit der Gesamtmasse des Gelenksystems übereinstimmt, so sind auch unter den an einem reduzierten System angreifenden Kräften die sämtlichen auf das ganze Gelenksystem einwirkenden Kräfte vertreten.

Die Haupteigenschaft der reduzierten Systeme und Hauptpunkte, welche ihre Einführung in die Mechanik der Gelenksysteme

geradezu als unentbehrlich erscheinen läßt, beruht darin, daß sie die Zurückführung der Kinetik der Gelenksysteme auf die Kinetik eines einzigen starren Körpers ermöglichen. Um dies nachzuweisen, mußten im II. Abschnitt der Arbeit, welcher sich mit der eingehenden Untersuchung des zweigliedrigen räumlichen Gelenksystems beschäftigt, die umfangreichen Formeln zum Teil explicite mitgeteilt werden. Die allgemeine Bedeutung der damit gegebenen Auffassung der Bewegungsgleichungen ist dann unschwer zu erkennen.

Das Resultat dieser Untersuchung läßt sich auf folgende Weise darstellen:

Wenn man die sämtlichen an einem Glied des Gelenksystems befindlichen Gelenke durchtrennt, so fällt an jedem Gelenk ein im allgemeinen noch aus mehreren Gliedern bestehendes Teilsystem ab, so daß das betreffende Glied allein übrig bleibt. Verlegt man die Masse eines jeden Teilsystems und die an demselben angreifenden Kräfte, die Beschränkungskräfte bei beschränkter Bewegung mit eingeschlossen, nach dem Mittelpunkt des dasselbe mit dem Glied verbindenden Gelenks und fügt sie der Masse des Gliedes und den schon an ihm angreifenden Kräften hinzu, so entsteht ein reduziertes System mit seinen Kräften. Denkt man nun weiter an jedem dieser Gelenkmittelpunkte noch eine Kraft hinzugefügt, welche entgegengesetzt gleich der Effektivkraft des Schwerpunktes des anhängenden Teilsystems für seine zum Mittelpunkt des Verbindungsgelenkes relative Bewegung ist, so bewegt sich das reduzierte System unter dem Einfluß dieser Effektivkräfte und der anderen an ihm angreifenden Kräfte genau so wie ein einziger starrer Körper. Man kann also zur Untersuchung der Bewegung desselben die bekannten Gleichungen für die Bewegung eines starren Körpers verwenden. Mit der Bewegung eines reduzierten Systems ist nun auch die Bewegung des demselben zugrunde liegenden Gliedes ohne weiteres gegeben. Durch die Verlegung der Masse eines Teilsystems nach dem Mittelpunkt des Verbindungsgelenks wird der Einfluß der Translation, und durch die Anbringung der negativen Effektivkraft der Einfluß der Rotation des Teilsystems relativ zum Gelenkmittelpunkte in Rechnung gezogen.

Auf diese Weise kann man also bei jedem noch so komplizierten räumlichen Gelenksystem die Bewegungsgleichungen, welche zu den einzelnen Gliedern desselben gehören, anschreiben, ohne auf die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen zurückzugreifen. Es

ist nur nötig, die zur Bestimmung der angegebenen relativen Effektivkräfte führenden relativen Beschleunigungen der Schwerpunkte der Teilsysteme abzuleiten. Dies gelingt aber ohne große Mühe und auf die einfachste Weise unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen den Hauptpunkten der Glieder des Gelenksystems und den Schwerpunkten der Teilsysteme.

Dadurch, daß die Untersuchungen der Gelenksysteme auf diese Weise an die Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers angeschlossen werden, ist die Verwertung der allgemeinen Resultate für die Bewegungsphysiologie überhaupt erst möglich geworden; denn man kann natürlich nicht daran denken, die Gleichungen in der ursprünglich sich ergebenden komplizierten Form für die Lösung physiologischer Probleme zu verwenden. In vielen Fällen gelingt es, direkt auf empirischem Wege die relativen Beschleunigungen der Partialschwerpunkte und die daraus abgeleiteten Effektivkräfte zu bestimmen, dann unterscheidet sich die Untersuchung des Gelenksystems auch in bezug auf die in den Gleichungen auftretenden Effektivkräfte nicht mehr von der eines starren Körpers; denn diese Effektivkräfte können in diesem Falle als gegebene äußere Kräfte aufgefaßt werden.

ÜBER DIE BEDEUTUNG VERTIKALER WASSERBEWEGUNGEN FÜR DIE PRODUKTION DES PLANKTONS IM MEERE.

VON

ALEXANDER NATHANSOHN.

DES XXIX. BANDES
DER ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

N° V.

MIT EINER KARTE.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1906.

DIE BEDEUTUNG VERTIKALER BEWEGUNGEN FÜR DIE PRODUKTION DES PLANKTONS IM MEERE.

VON

ALEXANDER NATHANSOHN.

Vorgetragen für die Abhandlungen am 5. Februar 1906.
Das Manuskript eingeliefert am 7. Februar 1906.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 25. April 1906.

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN

WILHELM PFEFFER

IN DANKBARKEIT GEWIDMET

VOM VERFASSER.

ÜBER DIE BEDEUTUNG VERTIKALER WASSERBEWEGUNGEN FÜR DIE PRODUKTION DES PLANKTONS IM MEERE.

VON

ALEXANDER NATHANSOHN.

Vorwort.

Die vorliegende theoretische Studie geht in letzter Instanz auf bakteriologische Untersuchungen zurück, die ich vor einer Reihe von Jahren im Golf von Neapel angestellt habe. Zu Beginn dieser Untersuchungen hoffte ich, auf der damals ganz neuen BRANDTschen Theorie fußend, einen vollständigen Kreislauf des Stickstoffs infolge des Stoffwechsels der Meeresbakterien nachweisen zu können und durch dessen Studium einen Beitrag zur Kenntnis der Produktionsbedingungen im Meere zu liefern. Aber die lange fortgesetzten durchaus vergeblichen Versuche sowohl Stickstoffbindung als Nitrifikation im Seewasser nachzuweisen, führten mich allmählich zu der Überzeugung, daß für die Produktivität des Meerwassers ganz andere Bedingungen maßgebend sein müssen. Die viel später begonnene Durchführung der Parallele zwischen vertikaler Wasserbewegung und Planktonproduktion ließ eine äußerst enge Beziehung zwischen diesen Erscheinungen erkennen, und so glaube ich, das Resultat dieser Überlegungen mitteilen zu dürfen, auch ohne daß ich über eigene Planktonuntersuchungen verfüge. Daß die weitere Erforschung des hier skizzierten Zusammenhanges eine Reihe interessanter Resultate verspricht, steht wohl außer Zweifel.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, auch an dieser Stelle Herrn Geheimrat CHUN für freundliche Unterstützung durch Literatur meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen; ebenso auch den Herren von der deutschen Seewarte in Hamburg, insbesondere Herrn Kontreadmiral HERZ, Herrn Professor Dr. E. HERRMANN und Herrn Dr. G. SCHOTT, die mir durch Erlaubnis die Bibliothek dieses Instituts zu benutzen, und manche dabei gewährte Hilfe meine Arbeit in hohem Maße erleichtert haben.

Leipzig, im Januar 1906. **Der Verfasser.**

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
I.	Einleitung	359
II.	Die Bedeutung vertikaler Wasserbewegungen für die Plankton-Produktion	372
III.	Die thermische Vertikalzirkulation	376
IV.	Das große System der ozeanischen Vertikalzirkulationen	386
	A. Die kalten Oberflächenströme	387
	B. Die Mischgebiete kalter und warmer Ströme	393
	C. Die subtropischen Anstau- und die tropischen Auftriebgebiete	403
V.	Die Verhältnisse an Küsten und unterseeischen Erhebungen	414
VI.	Über die vertikale Verbreitung der Tiefseeorganismen	419
VII.	Über den Stoffwechsel im Meere	427

I. Einleitung.

Die biologische Meeresforschung der letzten Jahrzehnte betrachtet es als eine ihrer Hauptaufgaben, die gesamte Flora und Fauna des Ozeans als eine organische Einheit zu erfassen und vom ernährungsphysiologischen Standpunkte aus zu studieren. Das ist eine Aufgabe, die nicht ausschließlich wissenschaftliches Interesse beansprucht, sondern auch in ökonomischer Beziehung wichtig ist, indem in ihren Bereich auch das Studium der Lebens- und Verbreitungsbedingungen der Seefische fällt, die sich ja von kleineren tierischen und pflanzlichen Organismen ernähren und so ein Glied in der Gesamtheit der lebendigen Welt im Meere bilden.

Das allerwichtigste Moment in den Wechselbeziehungen der Organismen zu einander bildet die Tatsache, daß nur die Pflanzen imstande sind, durch Reduktion von Kohlensäure im Sonnenlicht organische Substanz zu produzieren, deren auch die Tiere zur Unterhaltung des Lebensbetriebes bedürfen. Diese sind also direkt oder indirekt auf die Ernährung durch vegetabilische Substanz angewiesen. Aus dieser Tatsache allein ergeben sich Aufklärungen über die Verteilung der Organismen im Meere, und zwar über die Verteilung in vertikaler Richtung. Da für die Kohlensäureassimilation das Licht ein unentbehrlicher Faktor ist, kann dieser Vorgang und infolgedessen auch die Entwickelung von Algen, für die sie einen notwendigen Ernährungsprozeß darstellt, sich nur in den obersten Schichten abspielen, in welche Licht von genügender Intensität hineingelangt. Wie tief die untere Grenze dieser Schicht liegt, hängt unter anderm von der Beleuchtungsintensität der Oberfläche ab, dann auch von der Durchsichtigkeit des Wassers. Meistens beträgt diese Tiefe 150 bis 300 m; unterhalb dieser Grenze findet man keine lebendigen Pflanzen mehr vor. Nun ist aber hauptsächlich durch die Expedition des Challenger wahrscheinlich gemacht, dann durch die Schließnetz-

Versuche von CHUN[1]) exakt bewiesen worden, daß es in keiner Meerestiefe azoische Schichten gibt d. h. solche, in denen jegliches organische Leben fehlt. Nun ist es ohne weiteres klar, daß diejenigen Organismen, die unterhalb der Grenze des Pflanzenlebens existieren, von den oberen Schichten ernährt werden müssen, denn nur in jenen findet, wie gesagt, die Produktion der organischen Substanz statt. Diese Ernährung kann sich nun in zweierlei Weise abspielen; erstens einmal dadurch, daß Organismen, die in den obersten Schichten leben, die dort gebildete organische Substanz direkt zu nutze machen und dann in die Tiefe wandern und so den Transport von Nährmaterial in die lichtlosen Regionen besorgen. Zweitens aber, und das ist der wesentlichste Vorgang, dadurch, daß die Leichen der in den obersten Schichten absterbenden Organismen hinabfallen, durch die ganze Tiefe des Meeres hinuntersinken und sich am Boden ansammeln. Diese eigenartigen Abhängigkeitsverhältnisse der Organismen verschiedener Schichten geben uns einige Aufklärung über die vertikale Verbreitung, die wir im Meere antreffen. In den obersten Wasserlagen, in denen durch die Tätigkeit der Algen die Produktion organischer Substanz stattfindet, treffen wir auch ein reichliches Tierleben an bestehend aus Vertretern verschiedener Gruppen, wobei hauptsächlich Protozoen und Crustaceen eine Rolle spielen. In den darunter liegenden Wasserschichten, in denen infolge der dort herrschenden Dunkelheit nur tierisches Leben seine Existenzbedingungen findet, ist die Individuenzahl bedeutend geringer, größer wird sie aber häufig in den Schichten dicht über dem Boden, in welchen die Ansammlung der herabfallenden Organismen stattfindet.[2]) So sehen wir, wie der Einblick in die Ernährungsverhältnisse uns ein Verständnis für die quantitative Verteilung der Organismen in vertikaler Richtung eröffnet.

Weit komplizierteren Verhältnissen begegnen wir aber, sobald wir nicht mehr ausschließlich die vertikale Verteilung an einer bestimmten Stelle berücksichtigen, sondern die Mengen der in verschiedenen Meeresteilen produzierten Organismen miteinander vergleichen, mit andern Worten also nach den Ursachen der

1) Vgl. CHUN, Die pelagische Tierwelt in größeren Meerestiefen und ihre Beziehungen zur Oberflächenfauna. Bibliotheca zoologia Heft 1 (1888).

2) Vgl. darüber SIR JOHN MURRAY in Reports of H. M. S. Challenger, Deep sea deposits pag. 250 f.

quantitativen Verteilung des Lebens in horizontaler Richtung fragen. Die Behandlung dieser Probleme ist durch die verdienstvollen Arbeiten HENSENS[1]) sehr gefördert worden, der in anschaulicher Weise dartat, wie die einzelnen Individuen zu einander in demselben ernährungs-physiologischen Verhältnisse stehen wie die Teile eines Körpers und wie sich an diese Betrachtungsweise eine Summe von Problemen knüpfen, die auf die quantitative Bestimmung der Gesamtproduktion eines Meeresteils hinauslaufen. Die Methoden, die HENSEN zur Behandlung dieser Fragen in die Wissenschaft eingeführt hat, sind bekannt, und ich will auf ihre Beschreibung ebensowenig eingehen wie auf die Einzelheiten der Resultate, die uns teilweise an anderen Stellen dieser Arbeit beschäftigen werden. Zu den wesentlichsten Ergebnissen dieser Untersuchungen gehört die Tatsache, daß das Plankton d. h. die Gesamtheit der im Meere schwebenden Organismen gesetzmäßig verteilt ist, also in einer Region zu einer bestimmten Zeit auch in einer bestimmten Menge vertreten ist, die jedoch örtlichen und zeitligen Schwankungen unterliegt. Unter den Gesetzmäßigkeiten der örtlichen Verteilung findet sich nun ein Ergebnis, daß nichts anderes ist, als die exakte wissenschaftliche Konstatierung einer alten praktischen Erfahrung, die die ökonomischen Verhältnisse der Küstenländer schon seit langem tief beeinflußt hat: die Tatsache nämlich, daß die offene See in den höheren Breiten organismenreicher zu sein pflegt als in den niederen, und demnach ein geeigneteres Gebiet für den Fischfang darstellt.[2]) Diese Erscheinung hat ihre praktische Folge ja schon seit langem in den Expeditionen der Fischer gefunden, die z. B. von weit entlegenen Küsten nach den nordatlantischen Gewässer sich richten, wo ein bedeutend größerer Reichtum an Fischen herrscht als in den temperierten Zonen.

So wichtig diese Verhältnisse in praktischer Hinsicht sind, so interessant sind sie auch in wissenschaftlicher Beziehung, denn sie stehen in schroffem Gegensatz zu dem, was wir bezüglich der Vegetation auf dem Festlande wahrnehmen. Diese gewinnt bekanntlich an Üppigkeit, je mehr wir uns den tropischen Zonen nähern, wo intensiveres Licht, höhere Mitteltemperatur und längere,

1) Eine zusammenfassende Darstellung der HENSENschen Methodik findet sich bei SCHÜTT, Analytische Plankton-Studien, Kiel und Leipzig 1892.

2) Vgl. BRANDT, Über den Stoffwechsel im Meere, Wiss. Meeresforschungen der Komm. z. Erf. d. Meere, Abth. Kiel, N. F. IV. (1899) pag. 228.

oft unbeschränkte Vegetationsperioden eine intensivere Entfaltung des Pflanzen- und somit auch des Tierlebens begünstigen. Nun sind allerdings im Meere die Temperaturgegensätze in den Zonen verschiedener Breiten nicht so stark wie auf dem Festlande: denn das Wasser erwärmt sich vermöge seiner hohen Wärmekapazität nur langsam und kühlt sich ebenso langsam ab, so daß der Wechsel der Jahreszeiten bei weitem nicht so intensive Schwankungen bewirkt, wie in der Atmosphäre. Dazu kommt noch, daß die Meeresströmungen zu einem weiteren Ausgleich vorhandener Gegensätze beitragen, indem sie warmes Wasser in höhere und kälteres in niedere Breiten transportieren. Aus diesem Grunde war also zu erwarten, daß die Gegensätze zwischen der Produktionsfähigkeit verschiedener Zonen nicht so bedeutend sind wie auf dem Festlande; daß aber gerade das entgegengesetzte Verhältnis herrscht, daß die kälteren Regionen organismenreicher sind als die wärmeren, das ist daraus nicht zu erklären und muß auf anderen Ursachen beruhen.

Der erste, der die Frage nach diesen Ursachen in umfassender Weise zu beantworten gesucht hat, ist BRANDT.[1]) Das allein bleibt schon ein bedeutendes Verdienst dieses Forschers, wenn wir auch nicht imstande sind, seine Antwort als genügend anzuerkennen und im Folgenden versuchen werden, sie durch eine neue Theorie zu ersetzen. Brandt glaubte jenes Paradoxon der Natur, daß in geringen Breiten die Organismenentwicklung unter scheinbar doch günstigeren Bedingungen dennoch spärlicher vor sich geht, als in hohen, durch die Annahme zu erklären, daß jene günstigeren Bedingungen eine bestimmte Organismengruppe, die Denitrifikationbakterien, in ihrer Tätigkeit derart fördere, daß dadurch anderen Lebewesen die Existenzbedingungen verschlechtert werden.

Brandts Lehre fußt auf einer Übertragung der Verhältnisse, wie sie die Agrikulturchemie für den Ackerboden kennen gelehrt hat, auf das Meer. Sie greift zurück auf die alte von Liebig aufgestellte Lehre vom Minimum, welche besagt, daß für die Produktivität eines Bodens immer derjenige Nährstoff maßgebend sein wird, der in ihm in der für die Bedürfnisse der Pflanzen relativ geringsten Menge vertreten ist. Wenn z. B. ein Boden stickstoffarm ist, die andern Nährstoffe aber im Überfluß besitzt,

1) BRANDT, l. c. und ibidem Bd. VI 1902, pag. 26 ff.

dann wird jede Zufuhr von Stickstoff seine Produktionskraft erhöhen müssen, weil durch sie eine bessere Ausnutzung der sonst schlecht verwertbaren übrigen Nährstoffe ermöglicht wird. BRANDT ging nun von der zweifellos zutreffenden Anschauung aus, daß für die Ertragsfähigkeit eines bestimmten Meeresteils dieselben Prinzipien maßgebend sind, wie für die des Ackerbodens und daß auch hier ein bestimmter Nährstoff im Minimum vorhanden sein müsse, dessen Quantität die Masse der sich dort entwickelnden Planktonorganismen bestimmen würde. In Anbetracht der geringen Menge von Stickstoffverbindungen im Meerwasser und der Wichtigkeit dieser Nährstoffe für das Pflanzen- und Tierleben gelangte BRANDT zu der schon früher auch von HENSEN erwogenen Annahme, daß diese Verbindung das fragliche Minimum im Meere darstelle und daß von ihrer Quantität die Planktonproduktion abhängig sei. Unter Zugrundelegung dieser Annahme erklärt sich nun BRANDT die oben besprochene Eigentümlichkeit der quantitativen Verteilung des Meeresplanktons auf folgende Weise:

BRANDT geht von der Überlegung aus, daß dem Meere jahraus jahrein Stickstoffverbindungen zugeführt werden, und zwar aus zwei Quellen, erstens einmal durch die Flüsse, die Stickstoff in Gestalt von Ammoniak, von salpetrig und salpetersauren Salzen und vielleicht auch organischen Stickstoffverbindungen zuführen, und zweitens durch die Niederschläge der Atmosphäre, welche die in der Luft durch elektrische Entladungen gebildete salpetrige Säure, und nach BRANDTS Meinung auch Ammoniak mitbringen. Da alle diese Verbindungen leichtlöslich sind, infolgedessen nicht aus dem Meerwasser niedergeschlagen werden, müßte eine ständige Anreicherung von Stickstoffverbindungen im Ozean stattfinden, die schließlich zu einer bedeutenden Konzentration führen würde. Damit steht nun der tatsächliche Befund, daß die fraglichen Verbindungen nur in sehr geringen Mengen im Meerwasser vertreten sind, nicht im Einklang: es muß also ein Vorgang ablaufen, der einen Stickstoffverlust bedingt und so die ständige Zufuhr kompensiert. Einen solchen Vorgang nimmt nun BRANDT in der Tätigkeit gewisser Mikroorganismen nämlich denitrifizierenden Bakterien an.

Schon seit längerer Zeit sind aus dem Ackerboden Bakterien isoliert worden, welche die Fähigkeit haben, Salpeter unter Stickstoffabspaltung zu zersetzen. Dieser Vorgang ist mit einer

Oxydation von Kohlenstoffverbindungen verknüpft und stellt eine Art von Atmungsprozeß dar, in dem nur nicht der freie Sauerstoff der Atmosphäre, sondern der gebundene Sauerstoff des Salpeters Verwendung findet. BRANDT ließ nun zunächst das Wasser der Ostsee auf das Vorhandensein dieser Mikroorganismen hin untersuchen. Die Studien, die von BAUR[1]) ausgeführt wurden, hatten ein positives Resultat; es ließen sich in der Tat aus allen Wasser- und Schlammproben Denitrifikationsbakterien isolieren. Später hat GRAN[2]) an der holländischen Küste andere Vertreter dieser Gruppe gefunden. GAZERT[3]) hat im Verlaufe der deutschen Südpolarexpedition das Wasser verschiedener Meeresteile in dieser Richtung untersucht, und zwar gleichfalls mit positivem Ergebnis, und ich selbst kann das Vorhandensein dieser Bakterien im Golf von Neapel bestätigen. BRANDT denkt sich nun ihre Tätigkeit folgendermaßen: sie sollen einerseits die als solche in das Meer eingeführten salpetersauren und salpetrigsauren Salze zersetzen; ferner soll aber durch die Tätigkeit einer andern Gruppe von Bakterien das Ammoniak des Meerwassers in Salpetersäure übergeführt werden und schließlich der zersetzenden Tätigkeit der denitrifizierenden Organismen anheim fallen. Nun wirkt bekanntlich die höhere Temperatur bis zu einem gewissen Optimum fördernd auf die Bakterientätigkeit ein, aus diesem Grunde soll die Zersetzung der Salpetersäure und der Verlust an Stickstoff in den warmen Meeren bedeutender sein, als in den kühleren, in den letzteren infolgedessen nach dem Gesetz vom Minimum die Produktionsfähigkeit einen höheren Wert haben.

Dieser Vorstellung BRANDTS gegenüber ist zunächst zu bemerken, daß eine logische Notwendigkeit für die Annahme eines Stickstoffverlustes durch den Stoffwechsel von Bakterien nicht besteht. Bereits in den 70er Jahren hatte SCHLÖSING[4]) darauf aufmerksam gemacht, daß eine ständige Abgabe von Stickstoff in Ammoniak-

1) BAUR, Über zwei denitrifizierende Bakterien der Ostsee. Wiss. Meeresforschungen etc., Abt. Kiel, N. F. Bd. VI.

2) GRAN, Studien über Meeresbakterien I, Bergens Museums Aarbog og Aarsberetning 1901.

3) GAZERT, cit. bei BRANDT, Über die Bedeutung der Stickstoffverbindungen für die Produktion im Meere. Beiheft z. Botan. Centralblatte Bd. 16, (1904) pag. 289.

4) SCHLÖSING, C. R. Bd. 80 (1875) pag. 175; Bd. 81 (1875) pag. 81 u. 1252; Bd. 82 (1876) pag. 747 u. 969.

form aus dem Meere an das Festland stattfinden muß. Im Meerwasser sind bekanntlich die starken Säuren nicht in genügender Menge vorhanden, um die darin enthaltenen Basen zu binden. Ein Teil von diesen ist, wie zuerst die Untersuchungen von DITTMAR[1]) gezeigt haben, an Kohlensäure gebunden und zwar zum Teil in einfachen, zum Teil in doppeltkohlensauren Salzen. Daher kommt auch die alkalische Reaktion des Seewassers. Zu diesen in Form von Karbonaten gebundenen Basen gehören in erster Linie die schwachen, also vor allen das Ammoniak. Da nun das kohlensaure Ammoniak einen bedeutenden Ammoniakdruck besitzt, so wird dieses Gas aus dem Meerwasser in die Atmosphäre übergehen. Auf dem Festlande besitzt nun aber der Erdboden die Fähigkeit, Ammoniak zu absorbieren; also wird die Luft, die über diesen hinstreicht, immer ammoniakärmer. Daraus ergibt sich, daß ein ständiges Überdestillieren vom Meere nach dem Festlande hin stattfindet, das am stärksten in der Küstenregion sich abspielen wird. Denn hier ist infolge der Zufuhr vom Lande her einmal die Ammoniakmenge im Wasser am größten, andererseits ist der beschriebene Destillationsprozeß durch den ständigen Wechsel von Land- und Seewind bedeutend erleichtert. Wir haben also Grund zur Annahme, daß ein großer Teil des in Ammoniakform in die See eingeführten Stickstoffes schon in ganz kurzer Zeit dem Lande zurückgegeben wird.

Wir sehen also, daß wie gesagt eine logische Notwendigkeit für die Annahme einer Tätigkeit denitrifizierender Bakterien nicht besteht. Es fragt sich nun, wie es mit den tatsächlichen Grundlagen dieser Theorie bestellt ist. Zunächst ist die Existenz und weite Verbreitung dieser Organismen nicht zu leugnen. Wir müssen aber im Auge behalten, daß für sie der Denitrifikationsprozeß kein unentbehrlicher Lebensvorgang ist, sondern daß sie auch ohne ihn auszukommen vermögen und ihn nur unter entsprechenden Bedingungen eintreten lassen. Da nun die Salpeterzersetzung, wie schon betont wurde, als eine Art von Atmungsprozeß ohne Sauerstoff anzusehen ist, dürfen wir von vornherein erwarten, daß er durch einen gewissen Grad von Sauerstoffentziehung gefördert wird. Dies haben auch in der Tat in einigen Fällen ent-

1) DITTMAR in Reports of H M. S. Challenger. Physics and Chemistry, Vol. I (1884) pag. 103ff.

sprechende Untersuchungen gelehrt.[1]) Es ist nun schon von vornherein zweifelhaft, ob in dem relativ sauerstoffreichen Meerwasser günstige Bedingungen für den Denitrifikationsprozeß gegeben sind.

Ein viel wichtigeres Bedenken gegen die Annahme einer allzu großen Bedeutung dieses Vorganges liegt aber in Folgendem. BRANDT nahm in seiner ersten Abhandlung ohne weiteres die Existenz von nitrifizierenden Bakterien im Meere an. Diese sollten den in Ammoniakform im Meere auftretenden Stickstoff in Salpetersäure verwandeln und so der Tätigkeit der stickstoffabspaltenden Organismen zugänglich machen. Er stützte sich dabei auf eine Angabe von VERNON[2]), der die Existenz ammoniakoxydierender Bakterien im Golf von Neapel nachgewiesen zu haben glaubte. Späterhin hat er durch BAUR[3]) Untersuchungen in dieser Richtung ausführen lassen, die aber nur zum Teil positive Ergebnisse hatten: unter acht Proben ließen nur zwei an der gleichen Stelle entnommene die Existenz von nitrifizierenden Bakterien erkennen. Das ist an sich schon bedenklich, wenn es sich um Organismen handelt, die im Stoffwechsel des Meeres eine so hervorragende Rolle einnehmen sollen. Nun waren aber meine eigenen Bemühungen, im Wasser des Golfs von Neapel nitrifizierende Bakterien nachzuweisen, durchaus ergebnislos. Ich benutzte als Kulturflüssigkeit Seewasser, das in einiger Entfernung von der Küste geschöpft worden war und mit Diphenylamin nicht die mindeste Reaktion gab. Diesem Wasser wurden nun Zusätze von Ammonchlorid in der Konzentration von 0,01 bis 1% zugefügt und zwar mit oder ohne Zusatz von Magnesiumkarbonat; dann impfte ich mit Wasser oder Schlamm aus den verschiedensten Teilen des Golfes, konnte aber niemals das Eintreten der Salpeterreaktion auch bei wochenlangem Stehen beobachten. Diese durchaus negativen Resultate scheinen mit VERNONS positiver Angabe in Widerspruch zu stehen; die letzteren beruhen aber auf durchaus unzureichender Grundlage. VERNON hat lediglich gesehen, daß sich beim Stehen von Aquariumswasser allmählich die Reaktion mit

---

1) Vgl. LEMMERMANN, Kritische Studien über Denitrifikationsvorgänge. Jena 1900.

2) VERNON, The relations between Marine animals and vegetable Life. Mitteilungen der zool. Station zu Neapel, Bd. 13 (1898).

3) Vgl. BRANDT, Stoffwechsel im Meere, II. l. c. pag. 50ff.

Metaphenylendiamin auf salpetrige Säure verstärkte und führte dies auf eine Oxydation von Ammoniak zurück. Das ist aber eine durchaus überflüssige Annahme, die Vermehrung der salpetrigen Säure beruht wahrscheinlich auf einer Reduktion von Salpetersäure. Die gleichen negativen Ergebnisse hat Gran[1]) bei seinen Untersuchungen an der norwegischen Küste erhalten. Er konnte überall ein vollständiges Fehlen von nitrifizierenden Bakterien konstatieren, nur ein einziges Mal fand er bei Aalesund in unmittelbarer Landnähe diese Organismen vor.[2]) Bei der außerordentlichen Leichtigkeit, mit der man die Nitrifikation im Ackerboden nachzuweisen vermag, wird man nicht anstehen, diesen negativen Resultaten entscheidende Bedeutung beizumessen und anzunehmen, daß in der Tat die nitrifizierenden Bakterien im Meere normaler Weise nicht vorkommen. Befunde in unmittelbarer Küstennähe wie z. B. die Brandtschen positiven Ergebnisse in der Kieler Föhrde sind wohl auf Einführung vom Lande her zurückzuführen, wie man denn überhaupt mit der Verallgemeinerung von Resultaten, die in der Ostsee erhalten werden, nicht ohne große Vorsicht verfahren darf. Das Fehlen der nitrifizierenden Bakterien im offnen Meere beruht jedenfalls auf der Geringfügigkeit der in ihm enthaltenen Ammoniakmenge. Diese mag wohl zur Ernährung von Bakterien genügen, die den Stickstoff nur zum Aufbau ihrer Leibessubstanz gebrauchen, nicht aber für solche Organismen, die mit der Oxydation von Ammoniak ihren Betriebsstoffwechsel unterhalten.

Das Fehlen der nitrifizierenden Bakterien im Meere läßt die Rolle der denitrifizierenden Organismen in wesentlich verändertem Lichte erscheinen. Sie können in ihren Stoffwechsel nur diejenigen Stickstoffverbindungen reißen, die als Nitrat oder als Nitrit in das Meer eingeführt werden; was in anderer Form hineingelangt, ist von vornherein ihrer zerstörenden Tätigkeit entzogen, weil keine Organismen vorhanden sind, die andere Stickstoffverbindungen in Nitrate überführen. Aber auch von den als solche eingeführten Nitraten und Nitriten fällt nur ein Teil der Zersetzung durch denitrifizierende Bakterien anheim, denn es gibt im Meere noch eine andere Organismengruppe, die sich dieser Salze zu bemächtigen

1) Gran, Havets Bakterier og deres Stofskifte. S. A. aus „Naturen", Bergen 1903.

2) Nach persönlicher Mitteilung.

sucht und sie in ihrem Stoffwechsel verwendet: das sind die Algen. Ich habe beobachtet, daß weitaus der größte Teil der Meeresalgen die Fähigkeit besitzt, salpetersaure Salze in relativ großer Menge zu speichern.[1]) Diese werden dann weiter im aufbauenden Stoffwechsel verwendet und in organische Stickstoffverbindungen übergeführt. Sie können bei der Zerstörung der Pflanzenleiber dann höchstens in Ammoniakform in das Meerwasser übergehen, sind also bei dem Mangel an nitrifizierenden Bakterien im Meere der Zerstörung durch Denitrifikation ein für alle mal entzogen. Im Golf von Neapel kann man beobachten, daß das Wasser an der Küste in unmittelbarer Nähe der Stadt einen deutlich nachweisbaren Gehalt an Salpeter besitzt. Ich konnte in mehreren Proben eine Konzentration von 0,002% salpetersaurem Natrium feststellen. Entfernt man sich nun nur wenige Kilometer von der Küste, so sieht man, daß dort das Wasser keine Diphenylaminreaktion mehr aufweist. Der Salpeter wird also offenbar vom Lande her durch die Abwässer der Stadt eingeführt, verschwindet jedoch wieder aus dem Wasser. Nun kann man gleichzeitig beobachten, daß die Algen in der Nähe der Stadt außerordentlich salpeterreich sind, in einiger Entfernung dagegen keine Diphenylaminreaktion im Zellsaft aufweisen. Es sind also offenbar die Algen bei dem Verschwinden des Salpeters aus dem Wasser in hohem Maße beteiligt, und keinesfalls kann den denitrifizierenden Bakterien die einzig entscheidende Rolle zufallen.

Wir haben also gesehen, daß einmal eine Notwendigkeit zur Annahme intensiver Denitrifikation nicht besteht, und daß andererseits infolge des Fehlens nitrifizierender Organismen und infolge der Stoffwechseltätigkeit der Algen die Bedingungen für jenen Prozeß nicht günstig sind. Wir können daher der Zerstörung der salpetersauren Salze durch Bakterien im Haushalte des Meeres eine entscheidende Rolle nicht zuerkennen und sind infolgedessen auch nicht imstande, darauf die Unterschiede der Produktionsfähigkeit verschiedener Meeresteile zurückzuführen.

Will man überhaupt für diese Tatsache eine allgemeine Erklärung finden, dann darf man die Wirkung der Temperatur nicht so sehr in den Vordergrund stellen, wie es bei dem BRANDTschen

---

1) NATHANSOHN, Über Regulationserscheinungen im Stoffaustausch. Jahrbücher f. wiss. Botanik, Bd. 38 (1902) pag. 279ff.

Erklärungsversuch geschehen ist. Es ist ja im allgemeinen richtig, daß die kühleren Meere sich durch eine besondere Fruchtbarkeit auszeichnen, aber die Gegenüberstellung von warmen und kalten Meeren beruht wesentlich auf einem Vergleich zwischen dem Nordatlantischen Ozean einerseits und dem den meisten Biologen wohlbekannten Mittelmeer, sowie der Sargassosee andererseits. Aber keineswegs ist der Planktonreichtum eines Meeres schlechthin seiner Temperatur proportional: ein Blick auf die graphische Darstellung der quantitativen Fänge der Planktonexpedition[1]) kann uns eines besseren belehren. Wir sehen, daß im Floridastrom sowie im Sargassosee die Planktonvolumina außerordentlich niedrig sind, daß aber in der Äquatorialgegend selbst die Planktonkurve wieder ansteigt. Beim Eintritt in den Canarienstrom macht sich diese Vergrößerung der Fänge bemerkbar und ist auf der ganzen Fahrt durch die Äquatorialregion zu beobachten, um beim Wiedereintritt in die Sargassosee den kleinen früher dort gefundenen Mengen Platz zu machen. Es handelt sich hier um Gebiete von einer Oberflächentemperatur von meist über 25° C und dabei durchaus nicht um zufällige Erscheinungen, denn die Berichte anderer Expeditionen, wie z. B. des Challenger, melden gleichfalls die Tatsache des Ansteigens der Organismenmenge in der Äquatorialgegend. Davon werden wir später noch ausführlicher hören, hier wollen wir nur noch die Beobachtungen kurz erwähnen, die der Challenger[2]) in dem Äquatorialgürtel des stillen Ozeans gemacht hat. Zweimal kreuzte er auf seiner Fahrt diese Gegend, das eine Mal auf der Route von den Admiralitätsinseln nach Japan, das andere Mal auf der Reise von den Sandwichinseln nach Tahiti, und beide Mal beobachtete er im Äquatorialgürtel eine außerordentlich starke Entwicklung des Planktons. An dessen Zusammensetzung waren verschiedene Organismen beteiligt, u. a. Radiolarien und Cyanophyceen, und für eine Stelle nördlich von den Carolinen wird angegeben, daß sich dort so große Diatomeenmengen fanden, wie sie im atlantischen Ozean in so bedeutender Entfernung von der Küste niemals gefunden worden waren.

Diese Beobachtung zeigt, daß man ebensowenig in dem direkten oder indirekten Einfluß der Temperatur, wie in der Zufuhr von

1) Vgl. Schütt, Analytische Planktonstudien, pag. 61 ff.

2) Report of H. M. S. Challenger, Narrative of the Cruise, Vol. I. 2, pag. 738 u. 775.

Nährstoffen vom Kontinent her eine allgemein gültige Erklärung für die Ungleichheit des Produktionsvermögens verschiedener Meeresteile zu finden vermag. Denn auch auf letzterem Wege hat man versucht sich eine Deutung für die ungleichmäßige Verteilung der Organismen im Meere zu verschaffen, und zwar zum Teil in Verbindung mit der BRANDTschen Theorie. Ein solcher Versuch wurde z. B. von NANSEN[1]) unternommmen, um die außerordentliche Produktivität der arktischen Polarströme zu erklären. Diese bestehen nach seinen Forschungen zum Teil aus dem Wasser, das von den Sibirischen Strömen dem nördlichen Eismeer zugeführt wird und sich dann, nachdem es sich westwärts gewandt hat, nach Vermischung mit atlantischem Wasser in den großen Polarströmen in das nordatlantische Meer ergießt. Die sibirischen Ströme führen nun nach NANSENS Auffassung dem Meere eine große Menge von Nährstoffen, darunter stickstoffhaltigen zu, die im Eismeere bei der dort herrschenden niederen Temperatur vor bakterieller Zersetzung geschützt bleiben. Wenn nun die Ströme in wärmere Regionen gelangen, und mit atlantischem Wasser in Berührung kommen, dann soll ein plötzliches Aufblühen des Planktons stattfinden. Dieses würde auf Kosten der vom sibirischen Festlande dem Meere zugeführten Nährstoffe erfolgen, und nur deshalb in solcher Entfernung vom Kontinente stattfinden, weil die starke Abkühlung im Polarmeer keine Organismenentwicklung erlaubt hatte. So bestechend diese Auffassung auf den ersten Augenblick erscheint, so zeigt sich doch bei näherer Betrachtung, daß ihrer Durchführung im einzelnen Schwierigkeiten im Wege stehen. Man kann z. B. beobachten, daß im Frühjahr, etwa im April oder Mai, im Nordmeer ein Planktonmaximum auftritt, das seinen Sitz zum Teil in den arktischen Gewässern hat. Dieses Maximum wird hauptsächlich durch Entwicklung von Diatomeen bedingt, die indes nach einiger Zeit wieder aus dem Plankton verschwinden. Das plötzliche Auftreten und Wiederverschwinden ließe sich gewiß dadurch erklären, daß die steigende Temperatur die Entwicklung hervorruft und die darauf eintretende Erschöpfung an Nährstoffen ihr ein Ziel setzt. Es läßt sich aber die eigentümliche Tatsache beobachten, daß an der Grenze zwischen arktischem und

1) NANSEN, The Norwegian North Polar Expedition, Vol. III (1902) pag. 422 ff.

atlantischem Strom, und nur an dieser Grenze den ganzen Sommer über die intensive Entwicklung der Diatomeen fortdauert. Das ist eine Tatsache, für die eine befriedigende Erklärung bislang noch nicht gefunden worden ist, und für die jedenfalls die Nansensche Auffassung keine Deutung zu geben vermag.

Auf weitere Schwierigkeiten würden wir stoßen, wenn wir etwa die Verhältnisse im antarktischen Gebiet auf die gleiche Weise zu erklären versuchten; auch hier zeichnen sich die kalten Strömungen durch außerordentlichen Planktonreichtum aus; hier haben wir aber keine Flüsse, die von einem temperierten Kontinent her, auf dem organisches Leben herrscht, dem Meere Stickstoffverbindungen zuführen könnten. Hier haben wir nur Eisberge, die vom antarktischen Festland herstammen, von dem sie Nährstoffe organischer Provenienz nicht mitzubringen vermögen; und wenn an diesen Eisbergen auch oft zahllose Organismen sitzen, so sind es doch solche, die im Meere selbst auf Kosten der in ihm enthaltenen Nährstoffe sich entwickelt haben. Wenn wir nun etwa die Fruchtbarkeit der antarktischen Polarströme auf die Zufuhr von gewissen anorganischen Nährstoffen wie z. B. von Phosphaten zurückführen wollten, so stände theoretisch dieser Annahme zunächst nichts im Wege; eine tatsächliche Grundlage dafür ist aber zur Zeit nicht vorhanden.

II. Die Bedeutung vertikaler Wasserbewegungen für die Planktonproduktion.

Wie wir sehen, vermögen wir in diesem und jenem Falle uns durch hypothetische Annahmen den besonders großen Organismenreichtum eines Meeresteils zu erklären; sehr vieles aber bleibt unerklärt, und auf keinem der bisher eingeschlagenen Wege ist es gelungen, eine einheitliche Auffassung von den Ursachen der quantitativen Verbreitung des Planktons zu gewinnen. Wir sehen uns also der Frage gegenüber, ob dies überhaupt möglich ist oder ob nicht in jedem einzelnen Meeresteil besondere Ursachen die Produktivität bestimmen. Ich habe in einer kürzeren Abhandlung[1]) bereits die Anschauung zu begründen versucht, daß in der vertikalen Bewegung des Wassers ein Prinzip von allgemeinster Bedeutung für die Produktionsfähigkeit des Meeres liegt, und will diesen Gedanken hier ausführlicher darlegen.

Wir können uns am besten ein Bild von dem Einfluß derartiger Bewegungen auf die Ernährung des Oberflächenplanktons machen, wenn wir uns zunächst ein isoliertes Becken mit Wasser von gleichmäßigem Salzgehalt vorstellen, in dem alle Bedingungen für die Entwicklung organischen Lebens gegeben sind. Dann wird sich in oberflächlichsten Schichten in erster Linie eine reichliche Algenflora entwickeln, die durch Reduktion von Kohlensäure organische Substanz produziert. Die Fauna des Beckens wird sich auf Kosten der Pflanzenwelt in der Weise ernähren, wie wir es in der Einleitung ausführlich besprochen haben. Zunächst werden die Tiere der oberflächlichsten Schichten direkt von den Algen leben und dann werden weiterhin die herabfallenden toten Leiber der Oberflächenorganismen das Nährmaterial für die Fauna der Tiefe abgeben. Aber durch dieses Herabfallen, das Existenzbedingung für die Tiere der Tiefe ist, muß notwendiger-

1) Annalen der Hydrographie 1906 Heft 2.

weise eine Verarmung der obersten Schichten an Nährstoffen eintreten, denn mit diesen Leibern fällt ja alles das auf den Boden, was die Organismen der Oberfläche an Nährstoffen aus dem umgebenden Wasser aufgenommen und zum Aufbau ihres Körpers verwendet haben. Somit wird sich in den Oberflächenschichten sehr bald eine Verminderung derjenigen Stoffe fühlbar machen, die im Verhältnis zu den Bedürfnissen der Organismen in der relativ geringsten Menge vertreten, also im Minimum vorhanden sind. Die Tier- und Pflanzenleiber, die auf den Boden gelangen, werden zunächst von den Tieren der Tiefe gefressen, allmählich werden aber auch diese Mangel zu leiden beginnen, weil mit dem Rückgange der Entwicklung des Oberflächenplanktons ihnen die zur Erhaltung des Lebens notwendigen organischen Nährstoffe zu fehlen beginnen. Sie werden also absterben und aus den verwesenden Leibern wird das Nährmaterial in das umgebende Wasser übergehen. Von hier gelangt es durch Diffusion nur sehr langsam in die Höhe, denn dieser Vorgang verläuft mit äußerst geringer Geschwindigkeit und wird nicht imstande sein, die durch Konvektion nach unten erfolgenden Verluste der Oberflächenschichten an Nährmaterial zu decken. Es wird also unten eine Ansammlung von Nährstoffen stattfinden, die nicht verwertet werden können, weil hier die Betriebsenergie des Sonnenlichtes fehlt und in den obern Schichten, in die das Licht hingelangt, wird sich aus Mangel an Nährstoffen nur spärliches Organismenleben entwickeln: Betriebskraft und Baumaterial sind räumlich getrennt und können deshalb nicht zum Aufbau lebendiger Körper Verwendung finden.

Es ist nun klar, daß, wenn an irgend einer Stelle dieses Meeresbeckens die Bedingungen für einen vertikalen Transport von Wasser aus der Tiefe nach der Oberfläche gegeben sind, dort an der Oberfläche eine reiche Entwicklung von Phytoplankton stattfinden muß, denn durch diesen vertikalen Konvektionsstrom werden die Nährstoffe dahin gebracht, wo sie Verwendung finden können, an das Licht, und es sind somit alle Bedingungen für die Entfaltung des organischen Lebens gegeben.

Diese einfache Überlegung zeigt uns in schlagender Weise, daß derartige Konvektionsströme lokal von entscheidender Bedeutung für die Planktonproduktion sein können, und es ist in der Tat nicht schwer, Beispiele von räumlich begrenzter intensiver Organismenentwicklung zu finden, die zweifellos auf derartige Auf-

triebserscheinungen von Tiefenwasser zurückzuführen sind. Dahin gehören z. B. einige Fälle, die wir im Mittelmeer beobachten können. Dieses Meeresgebiet mit seinen außerordentlich langsamen Bewegungen nähert sich bis zu einem gewissen Grade dem fiktiven Beispiele, das wir unsern obigen Betrachtungen zugrunde gelegt haben. Im allgemeinen ist es, wie bereits oben gesagt wurde, außerordentlich arm an Organismen und neben der Sargassosee das planktonärmste Gebiet, das wir kennen. Nur an einigen engbegrenzten Stellen finden sich Organismen in größerer Zahl; NATTERER[1]) betont bei einer beiläufigen Besprechung der Ursachen der Organismenarmut des Mittelmeers ausdrücklich, daß diese Stellen sich durchweg durch eine lebhaftere Bewegung des Wassers auszeichnen und führt die beobachtete Erscheinung auf die Begünstigung des Tierlebens durch die Strömungen im allgemeinen zurück, weil ihnen die Nahrung zugeführt werde, die sie ja nicht wie die Pflanzen durch Diffusion aus der Außenflüssigkeit aufnehmen können. Diese Erklärung kann aber nicht zutreffen, denn es handelt sich ja nicht allein um eine Armut an tierischem Plankton, sondern ebenso gut um eine spärliche Entwicklung der Planktonalgen, wie z. B. die Beobachtungen von SCHÜTT[2]) bewiesen haben.

Es läßt sich aber leicht zeigen, daß die Orte, die durch reiches Organismenleben ausgezeichnet sind, auch die Bedingungen für vertikale Durchmischung der Wassermassen aufweisen. Dahin gehört z. B. die Straße von Messina, (cf. NATTERER, l. c.) an der der ostwärts fließende Bodenstrom durch den unterseeischen Rücken, der Sizilien mit dem Festlande verbindet, in die Höhe getrieben wird. Vor allem instruktiv ist aber eine lokale Organismenentwicklung, die wir an der Küste von Algier[3]) beobachten können. Hier wird nämlich durch ablandige Winde das Wasser von der Küste weggetrieben und muß infolgedessen durch einen aus der Tiefe aufsteigenden Strom kompensiert werden. Daher kommt es, daß an dieser Stelle das Küstenwasser ein wenig kühler ist, als die offene See. Groß ist aber der Unterschied nicht, weil das

1) NATTERER, Berichte der Kommission zur Erforschung des östlichen Mittelmeeres II. pag. 72 in Denkschriften d. K. K. Akad. Wiss. Wien, Math. Naturw. Klasse, Bd. 60 (1893).

2) Vgl. SCHÜTT, Analytische Planktonstudien, pag. 85.

3) PUFF, Das kalte Auftriebswasser etc. Diss. Marburg 1890, pag. 23ff. u. 57.

Tiefenwasser des Mittelmeeres selbst eine Temperatur von ca. 13° besitzt. Diese Stelle ist nun den italienischen und spanischen Fischern durch ihren außerordentlichen Reichtum bekannt und wird seit langem von ihnen aufgesucht. Ihr Organismenreichtum kann aber unmöglich auf der niederen Temperatur des Wassers beruhen, denn dieses ist ja wie gesagt nicht viel kühler als auf offener See und jedenfalls nicht kühler als das Mittelmeer im allgemeinen im Winter, in dem dieses ja auch nicht produktiver ist. Es bleibt also nichts anderes übrig, als die naheliegende Annahme, daß es die aus der Tiefe heraufbeförderten Nährstoffe sind, die die lokale Förderung der Organismenentwicklung bedingen. Auf jeden Fall ist der bezeichnete Küstenstreifen einer eingehenden Untersuchung wert, denn der Auftrieb des Wassers findet bloß im Sommer und im Herbst statt; im Winter und im Frühjahr zeigt die Wassertemperatur an dieser Stelle keine Anomalien, und so ließe sich hier der Zusammenhang zwischen Wasserauftrieb und Organismenentwicklung aufs schönste verfolgen.

Aus dieser Erscheinung läßt sich schon entnehmen, daß, wie nicht anders zu erwarten stand, der vertikale Auftrieb von Wasser lokal von außerordentlicher Bedeutung sein kann. Ob nun dasselbe auch für die großen Züge der quantitativen Verteilung des Planktons gilt, kann erst eine eingehendere Betrachtung lehren, zu der wir uns jetzt wenden wollen. Wir werden dabei in der Tat sehen, daß drei wichtige Erscheinungen durch den von uns eingeführten Gesichtspunkt ihre Erklärung finden: das ist der Reichtum der Polarströme, derjenige der nordatlantischen Mischgebiete und die eigentümliche Tatsache, daß die Gewässer der Äquatorialregion wiederum produktiver zu sein pflegen, als diejenigen der mittleren und subtropischen Breiten. Nachdem wir die einschlägigen Tatsachen einer Besprechung unterzogen haben werden, kehren wir nochmals zur Betrachtung des hier zunächst nur in Kürze auseinandergesetzten Prinzips zurück; wir werden dabei noch verschiedene Einzelheiten, wie z. B. die Tiefe, aus der die Aspiration stattfindet, die Zufuhr von Nährmaterial von der Küste her u. a. m. ins Auge fassen.

III. Die thermische Vertikalzirkulation.

Wir wollen nun die verschiedenen Ursachen, die im Meere vertikale Strömungen hervorrufen, auf ihre Mechanik und auf ihre Verbreitung hin untersuchen und vor allem die Frage ins Auge fassen, ob sich Beziehungen zwischen ihnen und der quantitativen Verteilung des Planktons finden lassen.

Ein sehr einfacher Vorgang dieser Art kann durch die Abkühlung der obersten Wasserschichten bei sinkender Lufttemperatur hervorgerufen werden. Um uns sein Zustandekommen zu vergegenwärtigen, stellen wir uns wieder, wie wir es im vorigen Kapitel getan haben, ein abgeschlossenes, mit homogenem Salzwasser erfülltes Bassin vor. Dieses wird im Sommer durch die strahlende Wärme der Sonne erwärmt werden und zwar so, daß die Temperatur in den obersten Schichten am höchsten ansteigt, dann nach unten zu relativ rasch absinkt, weil die Wärmestrahlen beim Passieren der Wasserschichten stark absorbiert werden. Tritt nun im Winter eine Abkühlung der Wassermasse ein, dann werden zunächst die obersten Schichten am meisten Wärme verlieren, sie werden kälter und infolgedessen auch schwerer werden als die darunterliegenden, und daher in die Tiefe sinken. Ihren Platz nehmen dann aufsteigende Schichten aus größerer Tiefe ein, die dann ihrerseits sich abkühlen und niedersinken, um neuen, aufsteigenden Wassermassen Platz zu machen. Das Sinken geht bis zu derjenigen Tiefe vor sich, in der die abgekühlten Wassermassen auf Schichten gleicher Temperatur und infolgedessen gleicher Dichte treffen. Nun ist leicht einzusehen, daß sich der beschriebene Prozeß umso tiefer erstrecken wird, je größer die Temperaturdifferenz zwischen den verschiedenen Jahreszeiten ist. Beträgt die Abkühlung im Winter nur wenige Grade gegenüber der Sommertemperatur, dann wird das Oberflächenwasser nicht sehr tief hinabsinken, bis es auf Schichten von gleicher Dichte gelangt, ist dagegen die jährliche Temperaturvariation bedeutend, dann wird,

wie leicht ersichtlich, die vertikale Zirkulation eine weit ausgiebigere sein.

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob schon diese thermische Vertikalzirkulation imstande sei, die ungleiche Produktionsfähigkeit der Meere verschiedener Breiten verständlich zu machen; denn in der Tat sind die jährlichen Temperaturvariationen in den hohen Breiten bedeutend größere als in den niedrigeren, wo sie nur einige Grade betragen, und somit wäre ja in den ersteren die Bedingung für ausgiebigere vertikale Durchmischung der Wasserschichten gegeben.

Wir müssen aber berücksichtigen, daß der beschriebene Vorgang gewissen Komplikationen unterliegt, die wir nunmehr ins Auge zu fassen haben. In erster Linie ist zu bemerken, daß die Vertikalzirkulation sich unter Umständen nicht so tief erstreckt als es die Temperatur bedingen würde, nämlich dann nicht, wenn zwei Schichten verschiedenen Salzgehaltes übereinander liegen, von denen die untere durch ihre Dichte der vertikalen Durchmischung der Wassermassen eine Grenze setzt. Wir haben in unserm schematischen Beispiel angenommen, daß das Wasser in dem ganzen Bassin den gleichen Salzgehalt besitzt. Seine Dichte wäre also dann lediglich von der Temperatur abhängig, und so würde das Niedersinken, wie wir es beschrieben haben, sich bis zu derjenigen Tiefe erstrecken, in der gerade die Temperatur der sich abkühlenden Oberfläche herrscht. Wenn aber eine salzärmere Schicht auf einer salzreicheren ruht, dann werden unter Umständen die abgekühlten Wassermassen der ersteren auf Schichten stoßen, die zwar wärmer sind, infolge ihres höheren Salzgehaltes aber die gleiche oder sogar noch eine größere Dichte besitzen und dadurch dem weiteren Niedersinken Einhalt tun. Wir haben also zu berücksichtigen, daß die thermische Vertikalzirkulation nicht lediglich von der Temperatur, sondern auch von den hydrographischen Bedingungen abhängig ist.

Ein zweites Moment, das ins Auge gefaßt werden muß, ist die Wasserverdunstung, die in den obersten Schichten vor sich geht. Es wird nämlich besonders zu Zeiten starker Bestrahlung von der Oberfläche Wasser abgegeben und dadurch eine Erhöhung des Salzgehaltes herbeigeführt. Wir sehen also, daß die Erwärmung durch Bestrahlung in zweierlei Weise das spezifische Gewicht der Oberflächenschichten beeinflußt; einmal wird durch die Temperatur-

erhöhung dieses erniedrigt, andererseits erfährt es eine Erhöhung durch die steigende Konzentration. Wenn nun der Erfolg dieser letzten Wirkung den der Temperaturerhöhung übertrifft, dann werden die oberflächlichen Schichten genau wie bei der winterlichen Abkühlung an Dichte zunehmen. Das Sinken des Oberflächenwassers wird in diesem Falle solange vor sich gehen, bis die erwärmte, aber salzreiche Wassermasse auf eine Tiefenschicht stößt, die zwar salzärmer ist, aber durch eine niedrigere Temperatur den Unterschied der Dichte, welcher durch die Konzentrationsdifferenz bewirkt wird, ausgleicht. Es kann also auch dadurch eine vertikale Zirkulation zustande kommen, die ebenfalls ein thermodynamischer Effekt ist. Dieser wird aber in den Meeren niederer Breiten wegen der dort herrschenden stärkeren Verdunstung bedeutender sein als in den kälteren Regionen. Ein weiterer Vorgang, der in die Kategorie der thermischen Zirkulationserscheinungen gehört, tritt dann ein, wenn es an der Oberfläche zur Eisbildung kommt. Es ist dabei zu bemerken, daß das Dichtemaximum des Seewassers nicht wie das des Süßwassers bei 4° C liegt, sondern ganz in der Nähe seines Gefrierpunktes. Es wird also eine fortschreitende Abkühlung bis zu dieser Temperatur eine fortschreitende Erhöhung der Dichte herbeiführen. Im Augenblick des Gefrierens kommt aber noch eine besondere Erscheinung hinzu: es findet ganz genau wie bei der Verdunstung eine Trennung des Lösungsmittels von der Lösung und somit eine Konzentration der zurückbleibenden Flüssigkeit ein. Das Meerwassereis ist nämlich zwar wie PETTERSSON[1]) gezeigt hat, nicht absolut salzfrei, es enthält jedoch im Vergleich zum Meerwasser relativ sehr wenig gelöste Salze. Es wird also das Oberflächenwasser durch Ausfrieren von Eis stark konzentriert und infolgedessen in noch höherem Grade zum Niedersinken geneigt sein, als es durch die bloße Abkühlung der Fall wäre.

Es ist schließlich noch ein Umstand zu erwähnen, der eine Komplikation der in Rede stehenden Zirkulationsvorgänge herbeiführt. Wenn diese ein Hinabsinken der obersten, stark abgekühlten Wasserschichten bis auf den Boden bewirken und es sich um einen sehr tiefen Meeresteil handelt, dann kann am Boden durch dessen höhere Temperatur eine Erwärmung der Wasserschichten

1) PETTERSSON, On the Properties of Water and Ice in Vega-Expeditionens, Vetenskapl. Iagt-Tagelser II, (1883) pag. 201 ff.

erfolgen. Diese Erwärmung braucht gar nicht sehr bedeutend zu sein, um bedeutende Förderung der vertikalen Wasserbewegung zu bewirken.[1]) Wir können uns in der Tat kein geeigneteres Mittel zur Erreichung der Durchmischung von Wassermassen auf thermischem Wege denken, als eine Abkühlung der obersten und eine Erwärmung der untersten Schichten. Die erkaltenden Wassermassen sinken auf den Boden, werden dort erwärmt, steigen dadurch auf und geraten so in eine lebhafte vertikale Bewegung. Wir werden nun sehen, daß Beispiele für ein derartiges Verhalten in der Tat vorhanden sind.

Gehen wir nun, nachdem wir die mannigfaltigen Einflüsse, denen die thermische Vertikalzirkulation unterliegt, kennen gelernt haben, zur Betrachtung der tatsächlichen Verhältnisse über, so müssen wir uns zunächst über die Methoden klar werden, mit deren Hilfe die untere Tiefengrenze der vertikalen Durchmischung der Wassermassen ermittelt werden kann. Am einfachsten ist diese Feststellung in den Fällen, in denen die vertikale Zirkulation durch eine Verdunstung der oberflächlichen Schichten bedingt ist. Wie wir gesehen haben, sinken diese so lange, bis sie auf eine Wassermasse stoßen, die zwar geringeren Salzgehalt, aber auch niedrigere Temperatur besitzt und infolgedessen die gleiche Dichte hat wie die niedersinkende Oberflächenschicht. Es wird also der Unterschied des spezifischen Gewichtes, den die höhere Salinität bedingen würde, ausgeglichen durch eine entgegengesetzt wirkende Temperaturdifferenz. Während nun die oberen Schichten infolge der sich in ihnen abspielenden Vertikalzirkulation eine ziemlich gleichmäßige Temperierung aufweisen, herrscht an der unteren Tiefengrenze, die wir zu bestimmen suchen, ein Temperatursprung im Sinne einer plötzlichen Abnahme, und gleichzeitig muß auch ein Sprung im Salzgehalte im gleichen Sinne zu beobachten sein. Wir haben also die Erscheinung der sogenannten Sprungschicht vor uns. Ihre Lage gibt uns die untere Tiefengrenze der vertikalen Durchmischung des Wassers an.

Komplizierter liegen die Verhältnisse dann, wenn es sich um Vertikalzirkulationen infolge einer Abkü[illegible]che handelt. Hier sinken die Wassermassen s[illegible]hicht

1) Wegemann, Annalen der [illegible]t l'Océan pacifique I." St. Peter[illegible] Nansen, Petermanns Mitteilun[illegible]

von gleicher Temperatur stoßen. Die gesuchte untere Tiefengrenze wird also in diesem Falle nicht durch einen Temperatursprung bezeichnet. Es ist aber auch nicht notwendig, daß hier eine Verschiedenheit der thermischen Schichtung eintritt: oben wird infolge der Zirkulation eine ziemlich gleichmäßige Temperatur herrschen, in den unteren Schichten kann dasselbe der Fall sein, und so würde uns die bloße Messung der Temperatur in den verschiedenen Tiefen keinen Aufschluß geben über die Mächtigkeit der Schicht in der sich die thermische Vertikalzirkulation abspielt.

Wir verfügen jedoch über ein anderes Mittel, das uns in diesem Falle über die Schwierigkeit hinweghelfen kann. Wir können nämlich zu Schlußfolgerungen über die gesuchte Tiefengrenze auf einem gewissen Umwege durch Beobachtung der gelösten Gase im Meerwasser und namentlich der in ihm enthaltenen Stickstoffmengen gelangen. Diese ist nach dem HENRYschen Gesetz der absoluten Temperatur, bei der die Absorption erfolgt, umgekehrt proportional. Warmes Wasser absorbiert also bei der Bewegung an der Meeresoberfläche weniger Stickstoff als kaltes. Wenn nun durch vertikale Strömungen Wasser in die Tiefe gelangt, so kann es durch Berührung mit benachbarten Schichten anderer Temperatur wärmer oder kälter werden, den Stickstoffgehalt aber, den es an der Oberfläche erworben hat, behält es bei, weil die Organismen an ihm nichts verändern und durch Diffusion nur wenig in benachbarte Schichten übergeht oder aus ihnen aufgenommen wird. Der Stickstoffgehalt einer Wassermasse der Tiefe erlaubt uns also einen Schluß auf die Temperatur derselben Masse zu der Zeit, in der sie sich zum letzten Male an der Oberfläche befunden hatte. Finden wir, daß ihr Stickstoffgehalt höher ist, als der augenblicklichen Temperatur entsprechen würde, so entnehmen wir daraus, daß sie sich seit dem Verlassen der Oberfläche erwärmt hat; im umgekehrten Falle schließen wir auf eine seither erfolgte Abkühlung. Wollen wir nun in einer Wassermasse die untere Tiefengrenze der Vertikalzirkulation aufsuchen, so haben wir zu ermitteln, bis zu welcher Tiefe ein gleichmäßiger Stickstoffgehalt herrscht. Diese Tiefe gibt die gesuchte Grenze an; so lange nämlich ein vertikaler Wasseraustausch stattfindet, kommen die Oberflächenschichten mit Luft von der an der betreffenden Stelle herrschenden Minimaltemperatur in Berührung, und es wird also

die gesamte Schicht den gleichen Stickstoffgehalt besitzen. An der unteren Tiefengrenze der Vertikalzirkulation befindet sich, wenn wir es mit homogenem Wasser zu tun haben, eine Schicht gleicher Temperatur und gleicher Salinität. Dagegen ist anzunehmen, daß das Tiefenwasser, das sich ja zu einer andern Zeit und an einer andern Stelle an der Oberfläche befunden hat, einen andern Stickstoffgehalt besitzt. An der gesuchten unteren Tiefengrenze ist daher ein Sprung im Stickstoffgehalt zu erwarten. Wir haben also hier eine Methode vor uns, die uns beim Studium der thermischen Vertikalzirkulationen große Dienste leistet.

Die Frage, die für uns von Bedeutung ist, ist nun die, in welchen Meeresteilen dieser Vorgang in einer ausgiebigeren Weise stattfindet und ob sich in dieser Hinsicht eine Übereinstimmung mit der Tatsache der geographischen Verbreitung der Planktonproduktion erkennen läßt. Wir haben schon betont, daß die beiden Hauptfaktoren, die den vertikalen Wasseraustausch in der beschriebenen Weise bewirken, einander in gewissem Sinne ergänzen. Die sommerliche Zirkulation infolge der Verdunstung ist zweifellos in den warmen Meeren ausgiebiger, die winterliche infolge der Abkühlung dagegen in den kalten.

Beginnen wir bei der Betrachtung der tatsächlichen Feststellungen mit dem erstgenannten Fall. Hier ist, wie wir ja betont haben, die Bestimmung der unteren Tiefengrenze durch Konstatierung der Sprungtiefe außerordentlich leicht. Erfreulicherweise besitzen wir einschlägige Beobachtungen, die von Schott im Laufe der Valdivia-Expedition angestellt worden sind.[1]) Seine Messungen im Atlantischen, Pazifischen und Indischen Ozean ergaben Werte von höchstens 200 m. Die mittlere Lage der Sprungschicht ist für die Tropengebiete der drei Ozeane nicht gleich, im Atlantischen beträgt ihre Tiefe nach Schott 25—140 m, im Stillen Ozean 110—180 m. Bis dahin erstreckt sich also die Durchmischung des Wassers, die zur Zeit der stärksten Verdunstung infolge der Konzentration der Oberflächenschichten erfolgt. Wir sehen also, daß dieser sich hauptsächlich in den warmen Meeren abspielende Vorgang nur sehr geringe Bedeutung besitzen kann; er beschränkt sich auf Wasserschichten, deren Dicke im Vergleich zu der Tiefe des Ozeans eine außerordentlich geringe ist, sie reicht

1) Wissenschaftliche Ergebnisse der Deutschen Tiefseeexpedition, Bd. I: Schott Ozeanographie (1902) pag. 178 ff.

nicht einmal bis die an untere Grenze der Region, in der noch pflanzliches Leben herrscht.

Viel tiefer kann sich in nördlichen Meeren die Vertikalzirkulation unter dem Einflusse der winterlichen Abkühlung erstrecken. Für diesen Vorgang sind diejenigen Gebiete am günstigsten, in denen warme Ströme in hohe Breiten gelangen. Hier fließt eine mächtige Schicht gut durchwärmten Wassers in kalte Regionen, und die unterste Lage dieser Schicht pflegt eine höhere Temperatur zu haben, als dem Winterminimum an der fraglichen Stelle entspricht. In solchen Gegenden wird nun im Winter die ganze Masse des warmen Stromes in vertikale Bewegungen versetzt, und dafür haben wir im nordatlantischen Ozean treffende Beispiele. So hat z. B. PETTERSSON[1]) hauptsächlich auf die Messungen DICKSONS gestützt die Zirkulationsvorgänge in der Nordsee eingehend erörtert. Das ganze nördliche Nordseeplateau von der Doggerbank bis zu den Shetlandsinseln und östlich davon bis zu der Mündung des Skagerraks wird von einer homogenen Wasserschicht eingenommen, die ihrer Salinität nach zu urteilen vom Golfstrome herstammt. Diese ganze Schicht unterliegt nun, wie schon aus den Temperaturmessungen ersichtlich ist, im Winter einer vertikalen Durchmischung, die im Herbst beginnt, anfangs sich nur in geringe Tiefe erstreckt, schließlich aber die ganze Wassermasse ergreift, so daß im Februar von der Oberfläche bis zum Boden eine gleichmäßige Temperatur von etwa 6° herrscht. Außerhalb des Nordseeplateaus wird die vertikale Durchmischung des Wassers durch die unter der Golfstromschicht liegende kalte Wassermasse aufgehalten, so daß sie sich nicht bis auf den Meeresboden erstrecken kann. Für das Gebiet südlich von Island liegen nun durch KNUDSENS[2]) Messungen des Stickstoffgehaltes Angaben über die Tiefe der winterlichen Vertikalbewegung vor. Hier hat die gesamte Wassermasse bis zu einer Tiefe von etwa 800—900 m einen Stickstoffgehalt, welcher einer Absorptionstemperatur von etwa 6° C entspricht; an dieser Stelle in dieser Tiefe findet sich ein Sprung in der Stickstoffmenge. Bis zu der angegebenen Tiefe erstreckt sich also die winterliche Durchmischung des Wassers, und in der Tat beträgt die mittlere Wintertemperatur an dieser Stelle 6°.

1) PETTERSSON, Über die Beziehungen zwischen hydrographischen und meteorologischen Phänomenen. Meteorologische Zeitschrift, Bd. 13 (1896) pag. 299 ff.

2) The Danish Ingolf Expedition, I 2: KNUDSEN, Hydrography, pag. 152 ff.

Es ist nicht zu bezweifeln, daß diese Wasserbewegungen für den Umstand von Bedeutung sind, daß die warmen Strömungen in den hohen Breiten produktiver sind als in denjenigen, aus denen sie stammen. Und in der Tat stimmen ja die zeitlichen Verhältnisse der Vertikalzirkulation mit dem Auftreten des Planktons gut überein. Wenn im Frühjahr die Temperatur zu steigen beginnt, dann ist auch das Wasser durch die den ganzen Winter über erfolgte Bewegung am besten durchgemischt, und dieser Umstand muß auf das Planktonmaximum in den Frühlingsmonaten begünstigend einwirken. Aber die Bedeutung dieses Vorganges wird zweifellos dadurch stark eingeschränkt, daß schwere Bodenschichten die Durchmischung bis auf den Grund verhindern. Nur Gebiete wie die Nordsee sind in außerordentlich hohem Maße bevorzugt, und wir würden nicht anstehen, den großen Organismenreichtum dieses Meeres auf den beschriebenen Vorgang zurückzuführen, wenn nicht hier die große Landnähe und die Zufuhr bedeutender Wassermassen durch Ströme auch andere Erklärungen nahelegte. Es gibt aber ein anderes Meeresgebiet, bei dem diese Umstände nicht zutreffen und bei dem dennoch völlige Durchmischung der Wassermassen und großer Planktonsreichtum Hand in Hand gehen: das ist der westliche Teil des nordatlantischen Ozeans, der als das Irmingermeer bezeichnet zu werden pflegt, und das Gebiet südlich vom Cap. Farewell, das zusammen mit jenem ein hydrographisch einheitliches Gebiet darstellt.[1]) Die Bodenmulde dieses Meeresteils wird nach Osten zu von dem Rejkjanaesrücken begrenzt, der sich von der Südküste Islands in südwestlicher Richtung erstreckt. Dieses Meeresgebiet wird von dem westlichen Arm der Golfstromtrift und von dem ostgrönländischen Polarstrom sowie dem Labradorstrom umflossen, und in seiner Mitte mischen sich diese Gewässer zu einer Wasserschicht von großer Homogenität, deren Salzgehalt von der Oberfläche bis zum Boden ungefähr den gleichen Wert von ungefähr 34,5 besitzt. Diese Gleichmäßigkeit der Konzentration ermöglicht nun eine thermische Vertikalzirkulation, die sich bis auf den Meeresgrund erstreckt. Das findet in der Tatsache seinen Ausdruck, daß die Temperatur der Oberfläche dieses Gebietes in allen Jahreszeiten fast konstant bleibt. „Es ist klar, daß im westatlantischen Gebiet,

1) Vgl. PETTERSSON, Die Wasserzirkulation im Nordatlantischen Ozean Petermanns Mitteilungen, Bd. 46 (1900) pag. 64 f.; vgl. die Karte.

wo der Wärmeaustausch mit der Atmosphäre, oder die Konvektion auf Grund der homogenen Beschaffenheit des Wassers sich sehr viel tiefer erstreckt, im Winter eine Abkühlung der Oberfläche ein geringeres Sinken der Temperatur hervorrufen muß, als im ostatlantischen Ozean" (PETTERSSON, l. c.)

Es ist nun eine höchst beachtenswerte Tatsache, daß das Gebiet des Irmingermeeres ganz außerordentlich planktonreich ist; die Planktonfänge aus diesem Gebiet gehören zu den größten, die im Norden gemacht worden sind. Die Messungen der Planktonexpedition zeigen[1]), daß die in diesem Gebiet beobachteten Volumina diejenigen der übrigen von ihr berührten Meeresteile um ein Vielfaches übertreffen. Sie bestehen zum großen Teil aus Diatomeenarten der Gattung Chaetoceras. Leider besitzen wir aus diesem Gebiete keine regelmäßigen Beobachtungen, die einen Schluß auf die Periodizität des Planktons erlaubten. Sie würden für die von uns behandelte Frage nach dem Zusammenhange von Vertikalströmung und Organismenproduktion von großem Interesse sein. Übrigens werden wir auf diesen Fall noch einmal zu sprechen kommen, denn wahrscheinlich spielen in dem bezeichneten Meeresabschnitt noch andere Momente eine wichtige Rolle.

Schließlich haben wir noch den Fall ins Auge zu fassen, in dem die Vertikalzirkulation durch Eisbildung eingeleitet wird. Diese Erscheinung hat eine eingehende Besprechung durch BUCHANAN[2]) erfahren, und zwar gelegentlich des Berichtes über die Beobachtungen des Challenger im antarktischen Eismeere. Dieser Forscher weist ganz richtig darauf hin, daß diese Erscheinung zu der in den Tropen durch Verdunstung eingeleiteten Vertikalströmung ein völliges Analogon darstellt. In beiden Fällen findet eine Konzentration des Seewassers durch Trennung von Lösung und Lösungsmittel statt, und das Resultat ist eine Erhöhung der Dichte des Restes, die in dem Falle der Eisbildung durch die große Abkühlung noch begünstigt wird. Man sollte also meinen, daß diese letztere ein mächtiger, die Vertikalströmung fördernder Faktor sei; das ist aber nicht der Fall, wie eine einfache, schon von BUCHANAN angestellte Überlegung zeigt. In denselben Regionen, in denen im Winter die Eisbildung vor sich geht, findet im Sommer die

1) SCHÜTT, Analytische Planktonstudien, Kiel u. Leipzig 1892, pag. 63ff.

2) Vgl. Reports of H. M. S. Challenger, Narrative of the Cruise, Vol. I, 1, pag. 427f.

Schmelze statt. Daraus resultiert, wie wir im nächsten Abschnitt noch ausführlicher besprechen werden, die Entstehung einer Oberflächenschicht von geringem Salzgehalt. Wir haben also eine Überschichtung von Wassermassen vor uns, an deren Grenze ein beträchtlicher Sprung der Salinität und infolgedessen auch des spezifischen Gewichtes zu beobachten ist. Diese Grenzschicht pflegt nun der durch die Eisbildung hervorgerufenen Vertikalzirkulation eine Schranke entgegenzusetzen, und so spielt sich der ganze Vorgang nur innerhalb einer Wassermasse von begrenzter Dicke ab. Die Sprungtiefen liegen relativ hoch und durchaus nicht in größerer Tiefe als in den tropischen Meeren.[1])

Wir sehen also, daß der Vertikalzirkulation durch thermische Einflüsse zwar gewiß eine große Bedeutung zukommt, daß aber meistens die hydrographischen Bedingungen für eine totale Durchmischung der Wassermassen bis auf den Boden nicht günstig sind; aber gerade diese ist für die Heraufbeförderung von Nährstoffen von größter Wichtigkeit. Wir werden daher nicht imstande sein, die Eigentümlichkeiten, die in der geographischen Verbreitung der Planktonproduktion wahrzunehmen sind, auf diese Erscheinung zurückzuführen und kommen zu dem Ergebnis, daß sie nur lokal, wie z. B. vielleicht im Irmingermeer, einen entscheidenden Einfluß auf die Produktionsfähigkeit gewinnen kann. In den folgenden Abschnitten werden wir aber Phänomene kennen lernen, die viel mächtiger wirken und besser angetan scheinen, uns eine befriedigende Aufklärung in der gesuchten Richtung zu geben; das sind diejenigen Erscheinungen, die in ihrer Gesamtheit das große System der ozeanischen Vertikalzirkulation bilden.

1) SCHOTT, l. c. pag. 194.

IV. Das große System der ozeanischen Vertikalzirkulationen.

In KRÜMMELS Handbuch der Ozeanographie[1]) findet sich eine aus dem Nachlasse von ZÖPPRITZ stammende Darstellung der Gründe, die zur Annahme eines das gesamte Weltmeer umfassenden Systems vertikaler Strömungen zwingen. ZÖPPRITZ geht von der fiktiven Annahme aus, daß das Meer durch eine Reihe dem Äquator paralleler Scheidewände geteilt wäre, die horizontale Strömungen völlig ausschließen; dann würde ein völliger Ausgleich der Salinitätsdifferenzen innerhalb jeder Abteilung eintreten und durch die thermische Vertikalzirkulation, wie wir sie im vorigen Abschnitte beschrieben haben, das Bodenwasser einer jeden von ihnen die minimale Wintertemperatur der Oberfläche aufweisen; das würde durch Niedersinken der abgekühlten Oberflächenschichten bewirkt werden. Nun weist aber das Bodenwasser niederer Breiten eine bedeutend niedrigere Temperatur auf als der Wintertemperatur der Oberfläche entspricht, es stammt also aus höheren Breiten mit kälterer Lufttemperatur. Die Existenz dieses kalten Bodenwassers beweist also, daß in hohen Breiten Wassermassen niedersinken und sich aequatorialwärts bewegen. Diesem absteigenden Zweige des Kreislaufs muß notwendigerweise ein kompensatorischer, aufsteigender entsprechen: dieser ist in der Tat durch die Aspiration des Tiefenwassers in den Aequatorialgegenden und den polwärts gerichteten Oberflächenströmungen gegeben. Diesen Vertikalkreislauf im Einzelnen mit Rücksicht auf die biologischen Verhältnisse im Meere zu besprechen, soll jetzt unsere Aufgabe sein. Wir beginnen zunächst mit den kalten Oberflächenströmen.

---

1) v. BOGUSLAWSKY-KRÜMMEL, Handbuch der Ozeanographie, Bd. II, (1887), pag. 281 ff.

A. Die kalten Oberflächenströme.

Die Polarströme sind, wie schon seit langem bekannt, durch außerordentliche Fruchtbarkeit ausgezeichnet. Wir haben uns nun zu fragen, ob bei ihrer Entstehung vertikale Strömungen eine Rolle spielen, denen wir diese Produktivität zuschreiben können. Wir fassen zunächst die Ströme des antarktischen Gebietes ins Auge, deren Entstehung auf eine einfachere Art erfolgt als es bei den arktischen der Fall ist.

Unsere Vorstellungen über die Entstehungsweise dieser Polarströme haben eine große Förderung durch die theoretischen Erwägungen und die Versuche erfahren, die PETTERSSON[1]) in einer Anzahl von Arbeiten niedergelegt hat. Um uns ein einfaches Bild von diesen Vorgängen zu machen, stellen wir uns zunächst vor, daß ein Eisberg in einen Strom warmen Wassers gelangt, in das er bis zu einer beträchtlichen Tiefe eintaucht. Infolge der Wärmezufuhr beginnt nun der Schmelzprozeß, der sich an der ganzen mit dem warmen Wasser in Berührung stehenden Fläche abspielt. An dieser bildet sich infolgedessen eine Schicht von fast reinem Wasser, welches durch das schwerere Salzwasser in die Höhe getrieben wird. Während dieses Aufsteigens findet jedoch eine Vermischung der beiden Wasserarten miteinander statt, und auf diese Weise besitzt das an die Oberfläche gelangende Gemenge einen beträchtlichen Salzgehalt, der aber geringer ist als derjenige des warmen Wassers. Dieses Oberflächenwasser wird nun abfließen und durch Aufsteigen von neuen Massen aus der Tiefe ersetzt werden. Es entsteht also ein Oberflächenstrom, an dessen Bildung eine Aspiration beteiligt ist, die sich bis zu der Tiefe erstreckt, in welche der Eisberg eintaucht. Diese ist unter Umständen recht bedeutend, denn die antarktischen Eisberge tauchen mitunter 500 m tief in das Wasser ein. Dem beschriebenen Vorgang geht aber ein zweiter parallel. Es werden dem zuströmenden warmen Wasser die außerordentlich großen Wärmemengen entzogen, die zur Unterhaltung des Schmelzprozesses notwendig sind. Die Folge davon ist eine starke Abkühlung, die das Niedersinken eines Teiles dieser Wassermassen hervorruft. Es findet also an

---

1) Vgl. Anm. 1 pag. 376 und Anm. 1 ...e influence of icemelting upon Oceanic circulation. ...sionens Skrifter II 1905.

der Front des Eisberges gewissermaßen eine Gabelung des warmen Stromes in vertikaler Richtung statt: ein Teil vermischt sich mit dem Schmelzwasser und hilft den Oberflächenstrom bilden, der andere Teil sinkt zu Boden. Dadurch wird ein Nachströmen warmen Wassers bedingt, das neue Wassermassen mit dem Eisberg in Berührung bringt und in der beschriebenen Weise in den Schmelzprozeß reißt. Das herabsinkende Wasser wird sich nun zum Teil als Bodenstrom in einer dem Oberflächenstrom gleichsinnigen Richtung fortbewegen. Ein anderer Teil muß aber in schräger Richtung aufsteigen wie folgende Überlegung lehrt. Das herabsinkende Wasser übt auf die Bodenschichten einen Druck aus, der sich nach dem hydrostatischen Grundgesetz nach allen Richtungen gleichmäßig fortpflanzt. Dadurch wird eine Bewegung in denjenigen Richtungen zustande kommen, in denen kein entsprechender Gegendruck wirksam ist. Das Wasser wird also zum Teil durch horizontale Druckkomponenten den Boden entlang getrieben, zum Teil aber da wieder aufsteigen, wo der Gegendruck des herabsinkenden Wassers dieses Aufsteigen nicht verhindert, das heißt in einiger Entfernung vom Eisberg. Dieses Verhalten kommt auch in PETTERSSONS schematischen Darstellungen des Vorgangs zum Ausdruck.[1]) Beim Aufsteigen gelangt es aber in den sich dem Eisberg zu bewegenden warmen Strom und kann von hier wiederum mit den aufsteigenden Wassermassen in den Oberflächenstrom gelangen.

Wir sehen also, daß bei der Bildung dieses Oberflächenstromes eine vertikale Zirkulation beteiligt ist, bei der alle Schichten in Mitleidenschaft gezogen werden. Daß diese Vorgänge sich wirklich so abspielen, steht nach PETTERSSONS klaren Darlegungen wohl außer allem Zweifel. Seine Versuche, die mit in Salzwasser schwimmenden Eisblöcken angestellt wurden, illustrieren die Verhältnisse aufs deutlichste, und vor allem stimmen, wie er hervorhebt, die Beobachtungen im südlichen Eismeer[2]), wo sich die geschilderten Verhältnisse rein vorfinden, mit der Theorie überein. Dort sind die von ihr geforderten Ströme zu beobachten: ein kalter salzarmer Oberflächenstrom, der vom Eis weg gerichtet ist, darunter ein warmer, entgegengesetzt fließender salzreicher Strom

1) Vgl. Fig. 1 in der Abhandlung aus den schwedischen Kommissionsberichten.

2) Reports of H. M. S. Challenger, Summary of Results, Vol. I, Diagr. zu pag. 524.

und schließlich ein kalter, salzreicher Bodenstrom von der Richtung des Oberflächenstromes. Hier im antarktischen Meere nehmen diese vertikalen Meeresbewegungen infolge der Tiefe der Eisberge große Dimensionen an; dabei bleibt für uns die Frage völlig außer Betracht, inwieweit der beschriebene Schmelzprozeß, wie Pettersson[1]) zu begründen sucht, das gesamte Zirkulationssystem des Weltmeeres beherrscht: für uns handelt es sich nur um die lokalen Erscheinungen bei der Entstehung des Oberflächenstromes.

Ehe wir nun zur Betrachtung der biologischen Verhältnisse in den betreffenden Regionen übergehen, wollen wir die abweichenden Bedingungen, unter denen die nördlichen Polarströme entstehen, besprechen. An deren Bildung sind nämlich, wie wir hauptsächlich durch Nansens Untersuchungen wissen, in hohem Maße die sibirischen Ströme, beteiligt. Knüpfen wir bei der Besprechung dieser Verhältnisse an eine Tatsache an, die für die Geschichte der Polarforschung von großer Bedeutung geworden ist, indem sie für die Nansensche Expedition die Anregung und den Plan gegeben hat, daß nämlich ein Oberflächenstrom das arktische Polarbassin durchzieht, der von der Nordküste Sibiriens aus sich westwärts wendet und dann sich an der Ostküste Grönlands wiederfindet. Bekanntlich war es unter anderm die Trift der Trümmer der gestrandeten „Jeannette", die Nansen zur Annahme eines derartigen Stromes veranlaßte, eine Annahme, die dann durch die Expedition der „Fram" ihre Bestätigung fand. Im Laufe dieser Expedition hatte er Gelegenheit, die fragliche Strömung einem genaueren Studium zu unterwerfen.[2]) Er fand, daß das Wasser in ostwestlicher Richtung ständig an Salzgehalt zunimmt; es müssen also die Süßwassermassen, die vom asiatischen Kontinent herstammen, sich fortwährend mit salzhaltigerem Wasser mischen, und dieses kann nur aus der stark salzhaltigen Unterschicht stammen, die aus atlantischem Wasser besteht. Es findet also eine ständige Vermengung des Oberflächenwassers mit demjenigen tieferer Schichten statt, und gleichzeitig erfährt dieses Tiefenwasser seinerseits eine kräftige Durchmischung durch vertikale Zirkulation. Es kann nicht meine Aufgabe sein, die komplizierten und natürlich trotz Nansens glänzendem Er-

1) Pettersson, Über die Wahrscheinlichkeit von periodischen und unperiodischen Schwankungen etc. I u. II in Svenska Hydrogr.-biol. Kommissionens Skrifter II (1905).

2) Nansen, The Norv ... l. III (1902) pag. 235 ff.

gebnisse noch nicht völlig bekannten Vorgänge zu besprechen, die sich hier abspielen. Für uns ist die Hauptsache, daß dieses Wasser der Unterschicht von einem stark salzhaltigen Strome herrührt, der sich über die das Polarbassin vom nordatlantischen Ozean trennende Schwelle ergießt. Dieses Wasser bewegt sich nun in antizyklonischer Richtung durch das Bassin und erfährt dabei, was für uns das Wesentlichste ist, eine vertikale Durchmischung. Denn in den oberen Schichten wird es durch das kalte Oberflächenwasser abgekühlt und sinkt infolgedessen nieder, unten macht sich dagegen die Bodenwärme geltend: das geht klar aus der Tatsache hervor, daß von einer gewissen Tiefe an die Temperatur zunimmt (loc. cit. 341 f.). Mit diesem durch Abkühlung an der Oberfläche und Erwärmung am Boden in Vertikalzirkulation versetzten Wasser vermischt sich nun das salzarme der Oberfläche. Wie das im einzelnen zustande kommt, wollen wir nicht weiter verfolgen; die Tatsache der Vermischung ist durch den ständig zunehmenden Salzgehalt des Oberflächenstromes sichergestellt. Vermutlich sind hierbei neben dem Prozeß der Eisbildung auch Kompensationen der durch die im Polarbassin selbst wirksamen Winde hervorgerufenen Strömungen im Spiele.

Sobald nun diese Oberflächenströmungen aus dem Polarbassin heraustreten und mit den warmen atlantischen Strömungen in Berührung gelangen, spielt sich der Vorgang der Eisschmelze genau so ab, wie wir es für die antarktischen Regionen beschrieben haben; nur weisen hier die fraglichen Phänomene infolge der geringeren Mächtigkeit der Eisberge keine so bedeutenden Dimensionen auf.

Es fragt sich nun, worauf die außerordentliche Fruchtbarkeit dieser polaren Oberflächenströme zurückzuführen ist; ob wir hierfür die bei ihrer Entstehung wirksame Vertikalzirkulation verantwortlich zu machen haben oder ob andere zureichende Erklärungen vorhanden sind. Für die arktischen Polarströme hat NANSEN die Vermutung ausgesprochen, daß die Produktivität auf die Nährstoffzufuhr durch die sibirischen Ströme zurückzuführen sei. Von vornherein ist ja diese Theorie recht plausibel; nur ist immerhin zu bedenken, daß der Nährstoffgehalt jener Ströme ein ganz gewaltiger sein müßte, denn zum größten Teil besteht ja das Wasser der Polarströme aus atlantischem Wasser, wie sein Salzgehalt lehrt; das Süßwasser kann, wie sich aus der Konzentrationsdifferenz

zwischen atlantischem und Polarwasser berechnen läßt, im Höchstfalle mit etwa 3% an der Bildung des letzteren beteiligt sein.[1])

Bedeutend größeren Schwierigkeiten begegnen wir aber, wie schon in der Einleitung betont wurde, bei dem Versuche, den außerordentlichen Organismenreichtum der antarktischen Oberflächenströme durch Zufuhr vom Lande her zu erklären. Denn da diese Zufuhr nur vom antarktischen Kontinent aus erfolgen kann, ist es ausgeschlossen, daß es sich um Nährstoffe handelt, die durch die Tätigkeit von Organismen gebildet werden. Es ist also nicht anzunehmen, daß Stickstoffverbindungen dabei beteiligt sind, denn größere Massen davon könnten nur durch den Stoffwechsel lebender Wesen geliefert werden. Es könnte sich also höchstens um anorganische Nährmaterialien, wie Phosphorsäure oder Kieselsäure handeln, aber auch diese Annahme begegnet, wie wir gleich sehen werden, großen Schwierigkeiten.

Die antarktischen Oberflächenströme sind außerordentlich organismenreich; das geht schon aus dem Bericht des Challenger[2]) hervor, und die exakten Messungen der Valdivia-Expedition bestätigen, soweit sie bisher veröffentlicht sind, diese Tatsache.[3]) Dabei ist hervorzuheben, daß, wie Karsten (l. c.) ausdrücklich betont, diese gewaltige Produktion ihren Sitz nicht im Mischgebiet mit warmen Strömungen sondern im kalten Wasser selbst hat: in der Region, in der der warme Agulhasstrom mit dem kalten Polarwasser zusammentrifft, waren die Planktonfänge relativ gering, um beim Übergang in das ungemischte kalte Wasser sofort außerordentlich stark zuzunehmen. Wollte man nun annehmen, daß diese außerordentlichen Organismenmengen sich auf Kosten von Nährstoffen entwickeln, die vom antarktischen Kontinent her eingeführt werden, so müßte man sich fragen, wo diese Nährstoffe denn hingelangen. Würden sie nämlich nicht aus dem Meerwasser entfernt, so müßten entsprechend Brandts Überlegungen (Vgl. oben pag. 363) eine allmähliche Übersättigung des Ozeans stattfinden.

---

1) Vgl. Nansens Berechnungen l. c. pag. 326 ff., nach denen das sibirische Flußwasser mit etwa 1% an der Bildung der verdünnten Oberflächenschicht im Polar-Bassin beteiligt wäre.

2) Reports of H. M. S. Challenger, Narrative of the Cruise, Vol. I 1, pag. 302 und 436.

3) Wissenschaftliche Ergebnisse der deutschen Tiefseeexpedition, Bd. II 2: Karsten, Das Phytoplankton des antarktischen Meeres, pag. 24.

Beim Stickstoff ist ja dieser Verlust des Meerwassers nach BRANDTS oder nach SCHLÖSINGS Theorie relativ leicht zu erklären; für andere Nährstoffe begegnen wir größeren Schwierigkeiten. Am einfachsten erschiene noch die Annahme, daß für die Diatomeen die Kieselsäure im Minimum vorhanden ist und die Zufuhr dieses Nährstoffes vom Kontinent her ihre massenhafte Entwicklung im südlichen Eismeere bedingte. Denn die Schalen der toten Individuen fallen zu Boden und somit wäre ja die gesuchte Quelle von Verlusten gegeben. Nun sind aber für die Beurteilung dieses Punktes Beobachtungen KARSTENS an den Tiefseeablagerungen der betreffenden Stellen von hoher Bedeutung (l. c. pag. 11 ff.). Es geht klar aus ihnen hervor, daß im Meerwasser unbedingt eine nicht unbeträchtliche Lösung der Kieselsäure stattfinden muß. Die Zusammensetzung der Ablagerungen stimmt nämlich nicht mit der Zusammensetzung des Planktons überein; es zeigt sich, daß an tiefen Stellen nur die starkschaligen Formen überhaupt auf dem Boden zu finden sind. Die dünnschaligen sind vollständig verschwunden und müssen also während des Hinabfallens aufgelöst worden sein. Auch von den erstgenannten gelangen keine völlig intakten Zellen auf den Grund, die Gürtelbänder sind stets weggelöst, und infolgedessen findet man im besten Falle ganze Einzelschalen. Wir sehen also, daß man keineswegs die Annahme machen darf, daß etwa die gesamte in den Planktondiatomeen enthaltene Kieselsäure auf dem Grunde abgelagert wird. Fände also eine stetige bedeutende Zufuhr vom Kontinent her statt, so könnte die teilweise Ablagerung eine allmähliche Anhäufung der Kieselsäure im Meere nicht verhüten. Die gleiche Schwierigkeit steht nun der Annahme im Wege, daß es etwa die Phosphorsäure ist, die vom antarktischen Festlande her eingeführt wird. Denn in diesem Falle müßten wir, wie eine analoge Überlegung lehrt, so außerordentlich großen Ablagerungen von Calciumphosphat in jenen Gegenden begegnen, die unserer Aufmerksamkeit nicht entgehen könnten. Davon läßt aber die Beobachtung nichts wahrnehmen.

Wir sehen also, daß, wenn bei den arktischen Polarströmen die Erklärung der Produktivität durch Zufuhr vom Lande her plausibel erschien, wir bei einer Übertragung dieses Erklärungsversuches auf das antarktische Gebiet auf unüberwindliche Schwierigkeiten stoßen. Hier gibt uns aber eine Erklärung auf Grund der Vertikalzirkulation einen durchaus befriedigenden Aufschluß, indem

eine gute Übereinstimmung zwischen den hydrographischen Verhältnissen, die der vertikalen Durchmischung außerordentliche Intensität verleihen, und den biologischen Beobachtungen, die einen ungewöhnlichen Planktonreichtum kennen lehren, besteht. Unter diesen Umständen erscheint es auch wahrscheinlich, daß in den arktischen Regionen die vertikale Durchmischung des Wassers vielleicht neben der Nährstoffzufuhr durch die sibirischen Flüsse die große Produktivität der kalten Ströme bedingt.

B. Die Mischgebiete kalter und warmer Ströme.

Wir kommen nunmehr zur Besprechung derjenigen Gebiete, die von jeher für die Fischerei die größte Rolle gespielt haben und sich auch bei der wissenschaftlichen Durchforschung als außerordentlich planktonreich erwiesen haben; das sind diejenigen Meeresteile, in denen kalte und warme Strömungen auf einander treffen. Wir wollen zunächst die hydrographischen Verhältnisse dieser Gebiete besprechen, soweit sie sich auf die vertikale Durchmischung des Wassers beziehen. Bei einem Vergleich mit den biologischen Erscheinungen werden wir dann sehen, daß man gerade für diese Gebiete zu einer einfachen Erklärung sonst schwer verständlicher Verhältnisse auf Grund unserer Theorie gelangt.

Fassen wir zunächst den im nordatlantischen Ozean oft realisierten Fall ins Auge, daß Polar- und warme Strömungen parallel in entgegengesetzter Richtung aneinander vorüberfließen. Wenn diese beiden Strömungen Wasser von verschiedenem spezifischen Gewicht führen, dann werden Erscheinungen wechselseitiger Überlagerung auftreten, wie sie zuerst VON MOHN[1]) in seiner klassischen Untersuchung über die Strömungen des norwegischen Nordmeeres eingehend dargestellt hat und wie sie auch späterhin von MAKAROW[2]) wiederum beschrieben worden sind. Auf S. 156 der großen MOHNschen Arbeit finden wir ein Diagramm, welches die in Rede stehenden Vorgänge illustriert. Es ist in diesem dargestellt, wie, wenn das Wasser eines Beckens nicht überall das gleiche spezifische Gewicht besitzt und infolgedessen

1) Den Norske Nordhavs-Expedition XVIII, : MOHN, Nordhavets Dybder etc. (1887) auch Petermanns Mitteilungen, Ergänzungsheft 79 (1885).

2) MAKAROW, Le Vitiaz, pag. 287 ff.

nicht an allen Punkten an einer Linie gleichen Niveaus derselbe Druck herrscht, diese Differenz sich auszugleichen suchen wird. Das wird dadurch geschehen, daß das leichtere Wasser das schwerere überflutet, daß das schwerere da, wo es sich an der Oberfläche befand, in die Tiefe sinkt, und dagegen Bodenwasser dort aufsteigt, wo sich eine Kompensation des die schwereren Schichten überlagernden Oberflächenwassers notwendig macht. Die horizontale Bewegung des leichteren Wassers führt ja, wie leicht einzusehen, zu der Notwendigkeit eines Ersatzes aus der Tiefe, und so sehen wir, wie die Überlagerung der Oberflächenschichten eine Bewegung der gesamten Wassermassen in horizontaler und vertikaler Richtung zur Folge hat.

MOHN hat aus seinen Beobachtungen von Temperatur und Salinität, durch Konstruktion und Berechnung die Stellen zu ermitteln gesucht, an denen das Wasser eine aufsteigende resp. absteigende Bewegung aufweist. Da aber zu jener Zeit die für unsere biologischen Betrachtungen so besonders wichtigen periodischen Schwankungen der hydrographischen Verhältnisse noch unbekannt waren, so können wir uns heute dieser Konstruktionen nur in begrenztem Umfange bedienen; auf jeden Fall lehren aber seine Diagramme, daß im Nordmeer die tiefsten Schichten an der vertikalen Durchmischung teilnehmen.

Es ist dabei im Auge zu behalten, daß das atlantische Wasser wärmer und salzreicher, das Polarwasser kälter und salzärmer ist. Temperatur und Salzgehalt suchen also die Dichtedifferenz auszugleichen, und es wird demnach von dem Verhältnis dieser beiden Eigenschaften abhängen, welches Wasser schwerer sein wird. PETTERSSON[1]) berechnet, daß, wenn das atlantische Wasser $+ 5^{0}$ C. aufweist, es meist die gleiche Dichte besitzt wie das ein wenig kältere Polarwasser und findet in der Tat, daß die 5^{0}-Isotherme die Grenzlinie zwischen beiden Wassern darstellt, also diejenige Region, in der beide nebeneinander bestehen können, ohne sich zu überlagern. Im Winter ist nun das atlantische Wasser stärker abgekühlt und versinkt in die Tiefe, indem es vom Polarstromwasser überlagert wird. Tatsächlich nimmt das warme Wasser zu dieser Zeit nur einen außerordentlich geringen Teil der Oberfläche des Nordmeeres ein (PETTERSSON, ibidem).

1) PETTERSSON, Petermanns Mitteilungen Bd. 46 (1900) pag. 91.

Da nun gerade im Spätherbst der atlantische Strom eine Flutperiode aufweist[1]), während welcher seine Mächtigkeit bedeutend zunimmt, so sind die zu Beginn des Winters durch Abkühlung in die Tiefe versinkenden Wassermassen recht bedeutend und müssen ein entsprechend starkes Aufsteigen von Bodenwasser im Gebiet des Polarstromes hervorrufen. Umgekehrt liegen die Verhältnisse im Sommer. Mit der steigenden Erwärmung des Golfstromwassers erhält dieses die Tendenz, den Polarstrom zu überlagern, der infolge seiner Herkunft immer eine niedere Temperatur beibehält, und so sehen wir, daß in dieser Jahreszeit das warme Wasser sich auszubreiten beginnt und eine immer größere Fläche im Nordmeere einnimmt. Während dieser Zeit muß also das Bodenwasser in der Golfstromregion aufsteigende Tendenz besitzen. Zweifellos spielen sich alle diese Erscheinungen nicht in der Reinheit ab, in der sie uns im schematischen Diagramm entgegentreten. Sie interferieren mit anderen Zirkulationsvorgängen, die durch verschiedene Ursachen bedingt werden, doch ist nicht zu bezweifeln, daß sie eine wichtige Komponente in der Gesamtbewegung des Wassers bilden.

Nun haben wir aber noch einen Fall zu besprechen, der für uns von ganz besonderer Wichtigkeit ist, weil er das Verhalten der Stromgrenzen betrifft. Daß diese sich durch besondere Fruchtbarkeit auszeichnen, haben wir schon erwähnt, ebenso daß diese Erscheinung einer Erklärung außerordentliche Schwierigkeiten entgegensetzt. Wir werden nun sehen, daß gerade diese Stromgrenzen in außerordentlich hohem Maße die Bedingungen für vertikalen Auftrieb des Wassers darbieten. Es war schon davon die Rede, daß im Winter das atlantische Wasser vom polaren überlagert wird, daß aber im Hochsommer, zur Zeit der größten Erwärmung, das atlantische spezifisch leichter ist. Es muß also zwischen diesen beiden Jahreszeiten eine Zwischenzeit bestehen, in der sich die Dichten annähernd das Gleichgewicht halten und infolgedessen die Überlagerungstendenz relativ gering ist. In dieser Zeit sind nun in den Grenzzonen die Bedingungen für Aspiration von Tiefenwasser gegeben.

Das ist schon aus rein mechanischen Gründen der Fall. Wenn zwei Strömungen parallel und in entgegengesetzter Rich-

1) Vgl. Pettersson, Periodische und unperiodische Schwankungen etc. S. o. S. 387.

tung aneinander vorbeifließen, dann werden sie dazwischenliegende Wassermassen, die sich in relativer Ruhe befinden, mit sich zu reißen imstande sein, und dieses Fortreißen nach entgegengesetzten Richtungen wird naturgemäß eine Kompensation durch Aspiration von Tiefenwasser notwendig machen. Auf diese Weise erklärt z. B. KRÜMMEL[1]) das Auftreten gewisser sogenannter Kälteinseln, d. h. Stellen, an denen das kühle Wasser nahe an die Oberfläche kommt, an einigen Punkten des atlantischen Ozeans, die gerade an der Grenze des Nordäquatorial- und des Guineastromes sich befinden, welche ja in entgegengesetzter Richtung aneinander vorbeifließen. Im Zentrum des norwegischen Nordmeeres befindet sich ja eine ruhende oder durch lokale Winde bewegte Wassermasse zwischen den entgegengesetzt gerichteten Strömen der West- und Ostseite. Im Sommer, also zu der Zeit, in der beide Ströme am stärksten entwickelt sind, muß diese ruhende Zwischenschicht schmal sein, und so wären gerade dann die Bedingungen für die beschriebene Erscheinung gegeben.

Aber da, wo zwei Ströme aneinander in entgegengesetzter Richtung vorbeifließen, wird noch ein anderer Umstand auf die Erzeugung vertikal anfwärts gerichteter Strömungen an der Grenze hinarbeiten. Das ist die Wirkung der Erdrotation auf die Meeresströme, deren Theorie sich z. B. bei NANSEN[2]) dargestellt findet und von der uns eine einfache Überlegung eine Vorstellung verschafft. Stellen wir uns einen Strom vor, der auf der nördlichen Halbkugel einem Meridian entlang nach Norden fließt, dann sehen wir leicht ein, daß dieser Strom aus einem Gebiet von größerer Translationsbewegung in ein solches von geringerer gelangt. Denn je weiter wir uns von den Polen entfernen, umso größer ist infolge der wachsenden Entfernung von der Rotationsachse die von der Erdrotation bedingte absolute Bewegung eines Punktes der Oberfläche. Das Wasser behält nun vermöge der Trägheit eine laterale Bewegungskomponente bei, die begreiflicherweise eine Ablenkung des Stromes nach rechts in östlicher Richtung bewirken wird. Ein Strom, der in entgegengesetzter Richtung fließt, besitzt nun aus der gleichen Ursache die Neigung nach rechts, also in westlicher Richtung abzuschwenken. Diese Wirkung der Erdrotation

---

1) KRÜMMEL, Handbuch der Ozeanographie II (1887) pag. 412.
2) NANSEN in Petermanns Mitteilungen 1905 pag. 1 ff.

auf die Meeresströmungen ist nun häufig nachzuweisen, häufig wird sie durch kräftigere Einflüsse verdeckt. Auf jeden Fall aber muß sie, wie MOHN[1]) dargelegt hat, eine Erhöhung des Wasserniveaus auf der rechten Seite des Stromes bewirken. Darin drückt sich die laterale Bewegungstendenz der Wasserteilchen aus. Diese Erhöhung beruht aber nicht auf einem stabilen Gleichgewicht; auf der rechten Seite des Stromes an der Stelle erhöhten Niveaus wird das angestaute Wasser in die Tiefe sinken und so einen steten Ersatz von links her bewirken. Fließen nun zwei Ströme derart aneinander vorüber, daß der nordwärts gerichtete sich rechts, der südwärts gerichtete links befindet, dann wird die laterale Bewegungstendenz in beiden Strömen sich nach entgegengesetzter Richtung geltend machen und infolgedessen auf der Grenzlinie eine Kompensation durch Aspiration aus der Tiefe bedingen. Zu solchen Verhältnissen sind nun mehrfach die Bedingungen gegeben, z. B. in sehr schöner Weise in der Dänemarkstraße, in der der ostgrönländische Polarstrom mit großer Geschwindigkeit an einem Zweige des Golfstroms vorbeifließt.

Daß diese Erscheinung nicht ohne weiteres aus der Lage der Isothermen und Isohalinen an der Oberfläche nachweisbar ist, kann nicht Wunder nehmen, wenn man die komplizierten Mischungsverhältnisse in Betracht zieht, die sich an solchen Grenzen abspielen. Jedoch ist zu erwähnen, daß HELLAND-HANSEN auf den norwegischen Terminfahrten Beobachtungen gemacht hat, die tatsächlich für eine Erhebung des Tiefenwassers unterhalb der Stromgrenze sprechen.[2]) Die betreffende im August aufgenommene Sektion, die auf der Höhe von Bergen etwa senkrecht auf die norwegische Küste gerichtet ist, weist in der Nullgrad-Isotherme zwei Konvexitäten auf. Die eine liegt da, wo das Bodenwasser sich gegen die norwegische Küste anstaut, und ist daraus leicht zu erklären, die andere aber, unterhalb des offenen Meeres liegend, ist schwerer verständlich. Nun ist zu bemerken, daß sie sich gerade unterhalb der Grenze zwischen atlantischem und Polarstrom befindet. Diese Konvexitäten der in größten Tiefen befindlichen o°-Isothermen weist auf eine vertikal aufwärts gerichtete

---

1) MOHN, Petermanns Mitteilungen, Ergb. 79, pag. 10.

2) HELLAND-HANSEN, Zur Ozeanographie des Nordmeeres. Conseil permanent; Publications de circonstance Nr. 19 p. 5.

Bewegung des Tiefenwassers an jenen Orten hin, und ist daher für uns von größter Bedeutung. Übrigens ist jene Sektion nicht die einzige, welche die beschriebene Eigentümlichkeit aufweist: auch in den Aufzeichnungen der norwegischen Terminfahrt vom Mai 1903 ist sie zu erkennen; ebenso in einigen Sektionen aus den Terminfahrten der Jahre 1904 und 1905. (Vgl. die „Bulletins du Conseil permanent" für die betreffenden Jahre.) Wenn es auch wohl noch nicht möglich ist für jeden einzelnen Fall die Ursache der aufsteigenden Bewegung zu erkennen, so ist doch schon der Nachweis derartiger bis in die größten Tiefen reichenden Durchmischungsvorgänge für die Biologie des betreffenden Meeresabschnittes von Wichtigkeit.

Ich will nun bemerken, daß unter MAKAROWS Befunden in der La Pérouse Straße, welche die Insel Yesso von Sachalin trennt, sich eine bemerkenswerte Erscheinnng findet, die auf die beschriebene Weise ungezwungen erklärt werden kann.[1]) Der Kuro-siwo, der durch die Koreastraße in das Japanische Meer eintritt, fließt teilweise durch die bezeichnete Straße nach Osten hinaus, wobei die Deflexion durch die Erdrotation mitspielen mag. Dadurch wird ein Kompensationsstrom bedingt, der nun Wasser aus dem Ochotskischen Meer am Südende von Sachalin vorbei in das japanische Meer führt. Hier fließen also die beiden entgegengesetzt gerichteten Strömungen unmittelbar aneinander vorbei, und auch hier liegen die Verhältnisse so, daß die Deflexion durch die Erddrehung in beiden Strömen eine entgegengesetzte Lateralbewegung hervorruft. Nun ist im August, zur Zeit, zu der MAKAROWS Beobachtungen angestellt wurden, auch das aus dem Ochotskischen Meer stammende Wasser hoch erwärmt. Unter diesen Umständen fällt eine Erscheinung außerordentlich stark auf, nämlich, daß zwischen den beiden an der Oberfläche 17° und 19° warmen Strömungen ein Band sich befindet, dessen Temperatur nur 8—9° beträgt. Dieses Band erstreckt sich vom Kap Crillon der westlichen Spitze von Süd-Sachalin aus in südöstlicher Richtung und bezeichnet genau die Grenzlinie beider Strömungen. MAKAROW ist sich darüber klar, daß dieses Band kalten Wassers nur durch Aspiration aus der Tiefe erklärt werden kann. Er sucht nun sich das Zustandekommen dieser Aspiration auf verschiedene Weise vorzustellen;

1) MAKAROW, Le „Vitiaz" etc. pag. 288 ff.

so erwägt er z. B. die Möglichkeit, daß die Ebbe- und Flutströmung beim Auftreffen auf den mitten in der Straße befindlichen Opastnosti-Felsen eine vertikale Durchmischung des Wassers bedingt. Dazu ist aber zu bemerken, daß diese Ursache höchstens eine lokale Auftriebregion, nicht aber ein langgestrecktes scharfes Band kalten Wassers bewirken könnte. Er erwägt ferner die Frage, ob nicht die Überlagerung von Wassermassen und die dabei stattfindende Vertikalzirkulation die beobachtete Erscheinung veranlassen könne; dem steht aber entgegen, daß, wie wir oben gesehen haben, das Überlagern von Wasserschichten eine Vertikalzirkulation der gesamten Wassermasse, nicht aber eine Aspiration an der Grenzlinie bewirkt. So bleibt denn in der Tat die Annahme die wahrscheinlichste, daß das beobachtete kalte Band infolge entgegengesetzter lateraler Bewegungstendenzen in jedem der beiden Ströme entsteht.

Wir haben also gesehen, daß bei der Begegnung kalter und warmer Oberflächenströme unter Verhältnissen, wie sie im nordatlantischen Ozean realisiert sind, eine intensive vertikale Durchmischung der Wassermassen stattfinden kann, und diese Tatsache würde mit der des generellen Organismenreichtums solcher Gebiete in gutem Einklang stehen. Wir können uns nun leicht überzeugen, daß auch die örtlichen und zeitlichen Verhältnisse der biologischen und der hydrographischen Erscheinungen in der Weise übereinstimmen, in der es von der Theorie gefordert wird. Werfen wir einen Blick auf das periodische Auftreten des Planktons, wie wir es aus dem norwegischen Nordmeere kennen. Wir sehen dabei ab von den Erscheinungen an der norwegischen Küste, die uns in einem späteren Abschnitt beschäftigen sollen. Das erste Auftreten reichlichen, aus Diatomeen bestehenden Planktons nach der Winterruhe findet sich etwa im April in der Faer-Oer-Shetland-Rinne.[1]) Von da breitet es sich rasch nach Norden und nach Westen aus. Es besteht wesentlich aus arktischen, im Polarwasser einheimischen Formen und hat seinen Hauptsitz auch im Polarstrom und in den Grenzgebieten zwischen diesem und der atlantischen Strömung. Nach einigen Wochen verschwinden die Diatomeen aus dem Plankton so rasch wie sie darin erschienen

1) Gran, Das Plankton des Norwegischen Nordmeeres. Report on Norwegian Fishing and Marine-Investigations. Vol. II (1904) No. 5, pag. 109ff.

waren, und bleiben nur im Grenzgebiet zwischen den kalten und warmen Strömungen, wo sie in reichlicher Entwicklung den ganzen Sommer über zu beobachten sind. Im Hochsommer findet sich nun im Nordmeer ein zweites Diatomeenmaximum, das wesentlich aus atlantischen Formen besteht, und auch im atlantischen Wasser seinen Hauptsitz hat; es pflanzt sich rasch nach Norden fort, und im August finden wir es in dem Spitzbergen bespülenden Ausläufer des Golfstroms.[1])

Ein Blick lehrt uns, wie groß die Übereinstimmung zwischen den biologischen und hydrographischen Beobachtungen ist. Im Frühjahr finden sich die Hauptmengen der Planktondiatomeen im Polarwasser, das, wie wir eben gesehen haben, im Laufe des Winters eine starke Durchmischung mit Bodenwasser erfahren haben muß. Im Hochsommer aber, nachdem die Ausbreitung des Golfstroms über das kalte Wasser eine Aspiration aus der Tiefe in dessen Gebiet bewirkt hat, findet sich das Maximum an dieser Stelle. Vor allem bemerkenswert und für uns bedeutungsvoll sind jedoch die Verhältnisse an den Stromgrenzen. Die Tatsache, daß diese besonders organismenreich sind, ist wohl zum ersten Male von SARS[2]) gelegentlich der norwegischen Nordmeer-Expedition konstatiert worden. Sie hat dann oftmals Bestätigung erfahren, so durch die Beobachtungen GRANS und CLEVES (l. c.) in demselben Gebiete und OSTENFELDS[3]) in dem Meere zwischen Schottland, Island und Grönland. Eine zureichende Erklärung hat aber diese für die Wissenschaft, wie für die Praxis gleich bedeutsame Erscheinung, wie GRAN bemerkt, nicht gefunden. Es ist dabei folgendes zu beachten. Wir finden wie gesagt im Frühjahr ein rasches Aufblühen von Diatomeen im gesamten Nordmeergebiet. Nach einigen Wochen verschwinden diese aber wieder und bleiben nur an den Stromgrenzen zurück. Daß dieses Verschwinden nicht etwa mit der steigenden Temperatur zusammenhängt, beweist einmal das lokale Zurückbleiben im Grenzgebiet, andererseits, wie GRAN mit Recht betont, die Tatsache, daß aus dem Polarstrom-

1) CLEVE, EKMAN und PETTERSSON, Les variations annuelles de l'eau de surface de l'Océan Atlantique. Göteborg 1901, pag. 6 und Taf. II.

2) Zit. bei GRAN, l. c. pag. 4.

3) OSTENFELD, in Iagttagelser over Overfladevandets Temperatur, Saltholtighed og Plankton paa grønlandske og islandske Skibsruter i 1899.... bearbeidede af Martin Knudsen og C. Ostenfeld. København 1900 pag. 64 ff.

gebiet um diese Zeit Formen verschwinden, die aus atlantischen Regionen stammen und demnach an höhere Temperaturen gewöhnt sind. Es ist also das Verchwinden nicht anders zu erklären, als wie GRAN es tatsächlich tut, nämlich durch Erschöpfung der Nährstoffe infolge der raschen und massenhaften Entwicklung der Diatomeen. Wenn nun sowohl im arktischen wie im atlantischen Stromgebiet die Nährstoffe erschöpft sind, wie ist dann das ständige Maximum an den Stromgrenzen im Laufe des ganzen Sommers zu erklären? Gewiß nicht anders als dadurch, daß an dieser Stelle eine dauernde Zufuhr von Nährstoffen stattfindet, und das kann der Lage der Sache nach nicht anders als aus der Tiefe geschehen. So sehen wir, daß wir mit Hilfe unserer Vorstellungen von dem Zusammenhang zwischen hydrographischen und biologischen Erscheinungen auch in dem so außerordentlich wichtigen Mischgebiet zu befriedigenden Erklärungen gelangen, und zwar gerade bezüglich derjenigen Tatsachen, die bisher am meisten einer Deutung widerstanden.

Ich will hier noch die Tatsache betonen, daß keineswegs alle Mischgebiete sich durch besondere Produktivität auszeichnen. Z. B. betont OSTENFELD, daß an der Stromgrenze nördlich des Faer-Oer-Island-Rückens eine für derartige Stellen auffällige Armut des Planktons wahrzunehmen sei.[1]) Das ist die Stelle, an welcher der antizyklonisch um Island herumfließende Arm des Golfstromes und der ostisländische Polarstrom ein Stück parallel nebeneinander her in derselben Richtung fließen. Die Mischung der Oberflächenschichten an den Grenzen muß hier ebenfalls erfolgen, aber für Aspiration aus der Tiefe liegt hier keine Veranlassung vor. Es ist nun höchst auffallend, daß für dieses Gebiet die Planktonarmut besonders betont wird.

Ebenso scheint sich nach KARSTEN (vgl. Anm. 3 auf pag. 389) das Mischgebiet zwischen dem warmen Agulhasstrom und dem antarktischen Wasser nicht durch besondere Fruchtbarkeit auszuzeichnen. Hier fließen die beiden Strömungen nicht parallel nebeneinander her, sondern direkt ineinander hinein. Ob hierbei eine Aspiration von Tiefenwasser in Frage kommt, darauf lassen die bisherigen hydrographischen Daten aus diesem Gebiete keinen Schluß zu.

1) Vgl. Rapports etc. du Conseil permanent international etc. Vol. III. Einleitung zu den Anlagen D—K, pag. V.

Wir wollen jetzt noch einmal auf die Verhältnisse im Irmingermeer und in dem Gebiete des südlich vom Cap Farewell, der Südspitze Grönlands, zu sprechen kommen. Wir hatten gesehen, daß dieser Meeresteil sich durch einen ungewöhnlich großen Planktonreichtum auszeichnete, zu der Zeit, zu der die Expedition des „National" dort quantitative Untersuchungen ausführte, und wenn auch, wie HENSEN betont, die große Masse der im Plankton enthaltenen Diatomeen die Fänge etwas zu groß erscheinen läßt, so beweist doch eben gerade das Vorhandensein dieser Diatomeen im Juli, zu einer Zeit, in der sie sonst im atlantischen Ozean nur in relativ geringen Mengen vorhanden sind, daß hier außergewöhnlich günstige Verhältnisse vorliegen müssen. Wir haben nun schon oben betont, daß die relativ homogene Beschaffenheit des Wassers die winterliche Vertikalzirkulation in diesem Gebiete außerordentlich begünstigt. Aber der Umstand, daß diese großen Diatomeenmassen sich noch im Juli vorfinden, läßt darauf schließen, daß hier noch andere Momente im Spiele sind, die auch während der Sommermonate eine Durchmischung der Wassermassen bedingen. Wir haben nun gesehen, daß wir auf Grund der Beobachtungen des „Ingolf" diesen ganzen Meeresabschnitt als ein einheitliches Gebiet aufzufassen haben, in dem eine Mischung des Wassers kalter und warmer Strömungen stattfindet. Diese umfließen das Bassin in zyklonischer Richtung; der von Süden kommende Golfstrom liegt östlich und entsendet dann einen Zweig in westlicher Richtung, der zusammen mit dem ostgrönländischen Polarstrom das Gebiet auf seiner Nordseite begrenzt. Im Westen finden wir den südwärts fließenden Labradorstrom, von dem ein Zweig sich nach Osten richtet, um die südliche Begrenzung des Bassins zu bilden. Die Wirkung der Erdrotation bringt nun entsprechend den vorstehend mitgeteilten Gesetzen in all diesen Strömen an der Oberfläche eine zentrifugal gerichtete laterale Bewegungskomponente hervor; es wird demgemäß das Niveau des Zentrums etwas tiefer liegen als das der Peripherie, und daraus muß in den tieferen, langsamer rotierenden Schichten der Peripherie eine zentripetal, und im Zentrum eine aufwärts gerichtete Bewegungstendenz des Wassers resultieren; es ist sehr wohl möglich, daß dies die Ursache der gründlichen Durchmischung der verschiedenen Wasserarten ist, denn sonst pflegen wir zu sehen, daß schon geringe Differenzen des spezifischen Gewichtes

eine ruhige Übereinanderlagerung der verschiedenen Schichten bewirkt. In der Tat weist auch das von Schott (Wiss. Erg. etc. Bd. I. Taf. 28) gezeichnete Längsprofil durch den atlantischen Ozean an dieser Stelle eine äußerst starke Konvexität der Isothermobathen auf.

C. Die subtropischen Anstau- und die tropischen Auftriebgebiete.

Bei der Betrachtung der Entstehungsweise der kalten Oberflächenströmungen haben wir gesehen, daß in hohen Breiten namentlich infolge der Eisschmelze eine starke Abkühlung der zufließenden warmen Wassermassen stattfindet, die zur Folge hat, daß ein nicht unbeträchtlicher Teil davon auf den Meeresboden hinabsinkt. Die kalten Oberflächenströme führen also nur einen gewissen Bruchteil des Wassers zurück, das von niederen Breiten her zugeführt wurde, und so hat schon Mohn[1]) die Bemerkung gemacht, daß in das norwegische Nordmeer auf der Oberfläche mehr Wasser von Süden zufließt als nach Süden abfließt. Diese Differenz in der Wassermasse der Oberflächenströmung muß also in der Region ausgeglichen werden, in der die warmen Strömungen ihre Wurzel haben, also in der Tropenregion. Da der Abfluß dort nach beiden Richtungen hin stattfindet, kann diese Kompensation nicht anders als durch Aspiration von Tiefenwasser zustande kommen. Nun hatten wir gesehen, daß in den hohen Breiten ein Teil des niedersinkenden Wassers durch die nachdrängenden Massen den Boden entlang getrieben wird. Dieses Wasser wird sich nun in äquatorialer Richtung bewegen und wird dann durch sein Aufsteigen die Kompensation der polwärts fließenden Massen bewirken.[2])

Damit ist also in großen Zügen das den ganzen Ozean umfassende System der Vertikalzirkulation gekennzeichnet. Es fragt sich jetzt, inwieweit die biologischen Beobachtungen nun auch für die genannten Aspirationsgebiete in den tropischen Gegenden eine Stütze unserer Theorie abzugeben vermögen. Auf den ersten Blick scheint die oft zitierte Tatsache, daß die warmen Meere besonders organismenarm sein sollen, damit im Widerspruch

1) Mohn, Petermanns Mitteilungen, Ergb. 79 (1885) pag. 19.

2) Wissensch. Ergebnisse der d. Tiefseeexpedition, Bd. I: Schott, Ozeanographie pag. 162 ff.

zu stehen. Aber wie ich schon in der Einleitung betonte, liegen die Verhältnisse nicht so einfach; besonders organismenarm sind gewisse Staugebiete der subtropischen Regionen, die allerdings sich durch besonders intensive Erwärmung des Meerwassers auszeichnen, und gewisse gleichfalls gut durchwärmte Meere, wie das mittelländische Meer, in denen aber besondere Verhältnisse vorliegen. Aber die eigentlichen Tropengegenden sind durchaus nicht so organismenarm; das geht wie wir sehen werden aus den Berichten der verschiedensten Expeditionen hervor; und wenn auch möglicherweise dort nicht so große Organismenmengen vorkommen, wie in manchen Gegenden hoher Breiten, so kann man doch von einer Unproduktivität der Tropengegenden nicht sprechen.

Beginnen wir unsere Übersicht über die einschlägigen Verhältnisse mit einem Blick auf die Ergebnisse der Planktonexpedition, der einzigen, von welcher uns quantitative Bestimmungen vorliegen. So berechnet z. B. HENSEN[1]) nach Ausschaltung einiger ungewöhnlich großer Fänge, von denen 5 in den Norden, einer in die Tropen fällt, folgende Mittelzahlen, welche das in einer zweihundert Meter dicken Wassersäule unter einem Quadratmeter Oberfläche enthaltene Plankton in ccm angibt: im Norden bis Neufundland 160, Neufundland bis Bermudas 40; Sargassomeer (aus zwei zu verschiedenen Zeiten mit identischem Ergebnis erfolgten Durchkreuzungen berechnet) 35; durch den Nordäquatorial-, Guinea und Südäquatorialstrom bis Ascension 130. Es ist allerdings dabei zu berücksichtigen, daß das Plankton im Norden, die ausgeschalteten großen Fänge im Irmingermeer abgerechnet, um diese Zeit nicht sehr reich ist. Trotzdem ist die außerordentliche Zunahme des Planktons beim Übertritt aus der Sargassosee in die Äquatorialgegend außerordentlich beachtenswert. Die Sargassosee ist nun in der Tat dasjenige Gebiet, in der für vertikalen Auftrieb absolut keine Ursachen gegeben sind. Momente, die hier eine Kompensation durch Aspiration von Tiefenwasser bedingen, sind nicht vorhanden; außerdem wird das Gebiet vom Golfstrom, vom Kanarien- und vom Nordäquatorialstrom in antizyklonischer Richtung, im Sinne des Uhrzeigers umflossen. Wir haben also das vollkommene Gegenstück zum Irmingermeer vor uns; während dort die Wirkung

1) HENSEN, in Sitzungsber. d. Kgl. preuß. Akad. d. Wiss. 1890 pag. 76.

der Erdrotation eine zentrifugale Bewegungstendenz an der Peripherie und infolgedessen eine Aspiration aus dem Zentrum bewirken muß, ist hier die entsprechende Bewegungskomponente zentripetal gerichtet und muß infolgedessen statt des Auftriebes einen Anstau hervorrufen. In der Tat zeigen auch die Temperaturmessungen, daß in dieser Region die Isothermobathen tief hinabgehen: wir haben hier den bestdurchwärmten Teil des Atlantischen Ozeans vor uns.[1])

Das Umgekehrte ist der Fall in dem tropischen Gebiete, das unmittelbar südlich an die Sargassosee grenzt. Der hier stattfindende Auftrieb macht sich durch die Tiefenlage der Isothermen ohne weiteres bemerklich, wie aus den zitierten kartographischen Darstellungen Schotts in dem Werk der Valdiviaexpedition deutlich hervorgeht. Die hierbei zu beobachtende Tatsache, daß die Aspiration am deutlichsten relativ dicht unter der Oberfläche etwa bis zu einer Tiefe von 200 Metern zu beobachten ist, ist ohne weiteres verständlich, denn die Kompensation findet naturgemäß nicht nur durch senkrecht sondern auch durch schräg aufwärts gerichtete Bewegung des Tiefenwassers statt, so daß naturgemäß die Isothermen dicht unter der Oberfläche die stärkste Ausbiegung zeigen müssen.

Die näheren Angaben über die Fänge der Planktonexpedition, die sich bei Schütt[2]) finden, lassen erkennen, wie plötzlich die Planktonkurve ansteigt, sobald das Auftriebgebiet erreicht wird. Bei etwa 19° N. Br., 27° W. L. war das der Fall, und der erste Planktonzug, der hier gemacht wurde, ergab ein Volumen von 90 ccm gegen 15 ccm am vorigen Tage. Diese höheren Volumina sind mit einigen Schwankungen im gesamten Auftriebgebiet zu beobachten und verschwinden erst beim Wiedereintritt in die Sargassosee, wo aufs neue die früher gefundenen, geringen Mengen beobachtet wurden.

Hensen ist dieser Reichtum des Tropengürtels im Vergleich zur Sargassosee wohl aufgefallen, und er sucht ihn sich dadurch zu erklären, daß die Strömungen von der westafrikanischen Küste her Nährstoffe, vornehmlich Stickstoff mit sich führen, und so einen geeigneten Boden für die Planktonentwicklung darstellen.

1) Vgl. Taff. IX ff. im I. Bd. des Valdivia-Werkes; vor allem Taf. 14, auf welcher die Temperaturen in 400 m Tiefe dargestellt sind.

2) Vgl. Hoffmann, Theorie der Meeresströmungen, Berlin 1884 pag. 51 ff.

Er führt aber selbst eine Tatsache an, die damit gar nicht recht in Einklang steht, nämlich die, daß die Fänge auf der Strecke Neufundland bis Bermudas relativ wenig Plankton ergeben haben. Diese fanden im Golfstromgebiete statt, und HENSEN (l. c. pag. 76.) spricht seine Verwunderung über ihre Armut aus, denn der Golfstrom, der auf dieser Fahrt durchquert wurde, kommt ja auch vom Lande und müßte daher reich an Stickstoffverbindungen sein. In der Tat fließt er nicht weit von der durchfahrenen Strecke ein großes Stück unmittelbar an der amerikanischen Küste entlang, wobei eine ganze Reihe von Flüssen in ihn einmünden. Diese Zufuhr vom Lande ist aber offenbar nicht imstande, die für Organismenentwicklung ungünstigen Momente auszugleichen, die in seinem bisherigen Verlauf begründet liegen. Der Golfstrom wird als Fortsetzung des Nordäquatorialstroms[1]) durch den Wind in das Karaibische Meer, von dort am Golf von Mexiko vorbei und dann die amerikanische Küste entlang getrieben. Während dieser Bewegung an der Küste sind aber offenbar keine Ursachen für Auftriebserscheinungen gegeben, denn bis zum Kap Hatteras, an welchem der Strom ostwärts abschwenkt, existieren keine kalten Bänder an seinem Rande. Und so dürfte wohl auf diesem Wege alles das an Nährmaterial verbraucht werden, was der Strom aus den Tropen mitbringt, und seine Armut hat an dieser Stelle für uns nichts Überraschendes mehr.

So sehen wir denn, daß der beobachtete Gegensatz der genannten Gebiete sich einfacher und ungezwungener durch den Einfluß des vertikalen Wasserauftriebes erklären läßt: im rasch fließenden Golfstrom fehlt dieser ebensogut wie in der fast bewegungslosen Sargassosee, und in beiden Meeresteilen finden wir fast die gleichen geringen Planktonmengen, die zu dem größeren Reichtum des tropischen Auftriebgebietes in Gegensatz stehen.

Interessant ist ferner die von SCHÜTT betonte Tatsache, daß jedesmal an der Grenze zweier entgegengesetzt fließender Strömungen im Tropengebiet lokale Planktonmaxima zu beobachten sind. Doch ist zur Zeit noch nicht zu entscheiden, ob diese nicht auf rein mechanischen Ursachen beruhen, die eine Anhäufung an den bezeichneten Stellen bedingen, oder ob hier etwa eine Aspiration von Tiefenwasser erhöhte Produktivität bewirkt. Lägen die

1) SCHÜTT, Analytische Planktonstudien pag. 61 ff.

quantitativen Ergebnisse der Planktonexpedition schon vor, dann würde sich vielleicht aus ihnen beurteilen lassen, ob es sich hier um ein mechanisch zusammengeschwemmtes Plankton handelt, oder um ein solches von besonderem lokalen Charakter, bedingt durch veränderte Ernährungsverhältnisse an den Stromgrenzen. Vorläufig müssen wir unser Urteil hierüber noch in suspenso lassen.

Besonders interessant sind die Verhältnisse im Südäquatorialstrom bis zur Insel Ascension. Hier treffen wir auf Komplikationen, die erst neue Untersuchungen nötig machen, ehe wir ein entscheidendes Urteil über die Ursachen der eigentümlichen Verteilung der Planktonproduktion an dieser Stelle fällen können. In dieser Gegend wirken nämlich zwei Momente, die beide auf eine Vermehrung des Oberflächenplanktons hinarbeiten können. Einmal findet hier ein außerordentlich intensiver Auftrieb von Tiefenwasser statt, der sich durch die sogenannten Kälteinseln, das sind lokalbegrenzte Stellen mit kaltem Oberflächen- und Tiefenwasser, bemerklich macht, und andererseits gelangt in diese Gegend der letzte Ausläufer des kühlen Benguelastroms, der dann im Südäquatorialstrom seine Fortsetzung findet. Auf den Einfluß dieses Benguelastromes führt nun SCHÜTT (l. c. pag. 67f.) das Planktonmaximum zurück, das sich unmittelbar im Norden von Ascension findet und ein Volumen von 680 cbcm pro qm Oberfläche aufweist. Es soll dadurch bedingt sein, daß der Benguelastrom kühles, aus den antarktischen Regionen stammendes Oberflächenwasser mitbringt. Dazu ist zweierlei zu bemerken. Wenn wirklich antarktisches Wasser hierhin gelangt, dann dürfte es auf dem langen Wege schon in bezug auf seinen Nährstoffvorrat erschöpft sein. Eine eventuelle starke Produktivität dieses Stromes wäre mit größerer Wahrscheinlichkeit, ebenso wie seine niedrige Temperatur zum großen Teil dem Umstande zuzuschreiben, daß er bei seinem Verlaufe an der afrikanischen Küste in außerordentlich hohem Grade mit Auftriebwasser aus der Tiefe vermischt wird.[1]) Über diese Verhältnisse würde eine genaue Untersuchung des Stromes wohl Aufschluß geben können, ebenso aber wohl auch über die andere Frage, ob nicht die Maxima der Ascensionsregion vielmehr mit den Kälteinseln, das heißt den Stellen stärksten Auftriebes

1) SCHOTT, l. c. pag. 124ff.

zusammenhängen. Wäre das der Fall, dann müßte jeder Kälteinsel eine Planktoninsel entsprechen.

Soviel über die Resultate des „National". Wir sehen, daß sie bis auf den nicht völlig aufgeklärten Fall der Maxima bei Ascension in durchaus eindeutiger Weise für die Richtigkeit unserer Anschauungen sprechen. Dasselbe gilt auch von den Beobachtungen des Challenger[1]), wenn sie auch, auf bloßer Schätzung beruhend, nicht so leicht verwertbar sind. Immer sind sie als Bestätigung von außerordentlich großem Werte. Für die Fahrt bis zu den Kap Verdeschen Inseln werden bloß Angaben über die Bodenfauna gemacht, die in der Sargassosee sehr spärlich zu sein scheint (l. c. pag. 171). Für die Fahrt von dem Kap Verde nach den St. Pauls-Felsen, die mitten in das Auftriebgebiet hineinführt, betont der Berichterstatter den großen Organismenreichtum der Oberfläche, der sich öfters in intensivem Meeresleuchten geltend machte (l. c. pag. 195). Ganz übereinstimmend schreibt CHIERCHIA[2]) von dieser Zone der äquatorialen Kalmen, daß sie über alle Maßen reich an organischem Leben ist; auch er betont das häufige Vorkommen von intensivem Meeresleuchten.

Ganz übereinstimmend sind nun die Ergebnisse, die der Challenger und der Vettor Pisani in den äquatorialen Breiten des Stillen Ozeans machten. Auch hier findet ein außerordentlich starker Auftrieb von Wasser statt, der besonders stark in dem östlichen Teil ist, wo er sich durch relativ niedrige Oberflächentemperatur und zeitweilig auch durch Kälteinseln bemerklich macht.[3]) Aber auch im westlichen Teil, wo die Oberflächentemperatur sehr hoch ist, läßt die Lage der Isothermobathen keinen Zweifel über den Aufstieg von Wasser aus der Tiefe.[4]) Zweimal hat der Challenger das Äquatorialgebiet dieses Ozeans gekreuzt, und beidemale weiß er von außerordentlichem Reichtum der Oberflächenschichten zu erzählen. Das erste Mal geschah dies auf der Fahrt von den Admiralitätsinseln nach Japan. Hier

1) Report of H. M. S. Challenger, Narrative of the Cruise Vol. I, 1 u. 2.

2) CHIERCHIA, Collezioni fatte dalla R. Corvetta „Vettor Pisani". Rivista marittima 1885.

3) PULS, Oberflächentemperaturen und Strömungsverhältnisse des Äquatorialgürtels des Stillen Ozeans. Diss. Marburg 1895. SCHOTT, Der äquatoriale Stille Ozean und seine Wasserbewegungen. S. A. aus Globus Bd. 69, Nr. 19. S. 2 des S. A.

4) Vgl. das Temperaturdiagramm in „Challenger Reports" l. c. 2 pag. 736, Diagr. 16.

wurden in den äquatorialen Breiten außerordentliche Massen von Plankton angetroffen, das aus verschiedenartigen Organismen, aus Radiolarien, Oszillarien und Diatomeen bestand. Nördlich von 10° N. Br. fand sich das Maximum der Diatomeen. Bei 10° liegt nun ungefähr die Grenze zwischen dem Nordäquatorialstrom und dem äquatorialen Gegenstrom. An dieser Grenze ist nun, wie weiter oben ausgeführt wurde, ein besonders intensiver Auftrieb zu erwarten, und in der Tat ist aus dem Temperaturdiagramm des Challengerberichtes (l. c.) dieser Auftrieb bis in die Gegend von 14° N. Br. nachweisbar. Das zweite Mal passierte der Challenger den Tropengürtel des Stillen Ozeans im September auf der Fahrt von den Sandwichsinseln nach Tahiti; während nun für das Staugebiet nördlich der Sandwichsinseln die große Armut der Oberfläche an Organismen betont wird, berichtet er hier über außerordentlichen Reichtum des Planktons (l. c. pag. 775). Sowohl die Zahl der Individuen als auch der Arten wird für das Gebiet des Äquatorialstroms und des äquatorialen Gegenstroms als besonders groß geschildert.

Ganz entsprechende Berichte liegen auch vom Vettor Pisani vor, der den Äquatorialgürtel des Stillen Ozeans auf der Fahrt von Callao nach den Sandwichsinseln und von dort nach Hongkong durchkreuzte. Auch von dieser Fahrt berichtet CHIERCHIA l. c., daß alle Fänge an der Oberfläche von ungewöhnlich großem Reichtum gewesen sind.

Aus diesen übereinstimmenden Angaben ist wohl mit voller Sicherheit zu entnehmen, daß die Äquatorialregionen auch dieses Ozeans sehr planktonreiche Gebiete sind, wenn auch leider der absolute Mangel an quantitativen Fängen einen einigermaßen exakten Vergleich mit der Produktion anderer Regionen nicht zuläßt. Nichtsdestoweniger sind für uns die Beobachtungen von außerordentlicher Wichtigkeit infolge der geographischen Verhältnisse des Stillen Ozeans. Erstens einmal schließt die große Ausdehnung des Gebietes jeden Gedanken an eine Beeinflussung durch die Küste aus. Der Planktonreichtum scheint in gleicher Weise bedeutend zu sein im östlichen und westlichen, wie im zentralen Teil des Äquatorialgürtels. Ferner ist auch hier eine Beeinflussung durch antarktisches Wasser ausgeschlossen, denn das kühle Oberflächenwasser, das sich im östlichen Teil des Ozeans findet, kann nicht anders als durch Auftrieb aus der Tiefe

entstehen, denn die Strömung an der chilenischen und peruanischen Küste ist durchaus keine konstante: zwischen 30 und 40° S. Br. werden wechselnde Versetzungen gemeldet, so daß man den Südäquatorialstrom nicht etwa als eine Fortsetzung der sogen. Peruströmung ansehen darf.[1]) So sehen wir denn, daß über die Deutung der biologischen Verhältnisse der äquatorialen Regionen des Stillen Ozeans kaum ein Zweifel herrschen kann: sie sind offenbar der Ausdruck des intensiven sich in dieser Region abspielenden Auftriebprozesses.

Wir sind am Ende unserer Betrachtungen über die Erscheinungen, aus denen sich das große System der ozeanischen Vertikalzirkulationen zusammensetzt und der biologischen Phänomene, die mit ihnen in Korrelation stehen. Wir wollen nun einen kurzen Rückblick auf diesen Teil unserer Arbeit werfen und zusehen, zu was für Ergebnissen sie uns bisher geführt haben. Da sind nun folgende Punkte hervorzuheben:

1) Der große Reichtum der Polarströme, vor allem der antarktischen.

Wir haben gesehen, daß allenfalls die Produktionsfähigkeit der nördlichen Polarströme auf Grund von NANSENS Vorstellungen erklärlich erschien. Der noch größere Reichtum der antarktischen Ströme stellt jedoch allen Erklärungsversuchen unüberwindliche Hindernisse entgegen; selbst BRANDTS Denitrificationstheorie hilft uns hier nicht viel weiter, weil nicht ersichtlich ist, von wo aus denn hier die Zufuhr der enormen Stickstoffmassen stattfinden soll, die zur Produktion der ungeheuren Planktonmengen erforderlich sind. Diese müssen also wie auch die übrigen Nährstoffe im Meere selbst vorhanden sein und durch besonders günstige Umstände in vorteilhafter Weise disponibel gemacht werden. Wir suchten das durch die beim Schmelzen der gewaltigen Eisberge im größten Maße stattfindende Vertikalzirkulation zu erklären.

2) Die große Produktivität der Stromgrenzen und gewisser Mischgebiete.

Für diese Tatsache, die häufig beobachtet worden ist, und in der Seefischerei eine bedeutende Rolle spielt, ist bisher über-

1) SCHOTT, Der stille Ozean etc. pag. 2.

haupt kein zureichender Erklärungsversuch gemacht worden. Auch hier gelangen wir zum Verständnis unter Berücksichtigung der vertikalen Wasserbewegung.

3) Der Gegensatz zwischen den subtropischen Stau- und den tropischen Auftriebgebieten.

Hierfür hat HENSEN einen Erklärungsversuch gegeben, indem er einen Einfluß der Küste auf die Produktionsfähigkeit der betreffenden Meeresteile annahm. Aber er selbst betont die Tatsache, daß seine Beobachtungen im Floridastrom mit dieser Theorie nicht vereinbar sind. Die Befunde im Stillen Ozean lassen diesen Erklärungsversuch vollends als unzutreffend erscheinen. Für unsere Theorie bilden die Verhältnisse, wie sie die Planktonexpedition und die anderen Forschungsreisen konstatiert haben, geradezu ein Postulat.

Es ist also wohl nicht zu viel, wenn wir sagen, daß das bisher vorliegende Material über die quantitative Planktonverteilung im Ozean für eine außerordentlich starke Beeinflussung durch die vertikalen Wasserbewegungen spricht, eine Beeinflussung, deren Existenz sich schon auf logischem Wege zwingend nachweisen ließ.

Nachdem wir uns einen Überblick über das Tatsachenmaterial verschafft haben, das uns bezüglich der vertikalen Wasserbewegungen zur Verfügung steht, wollen wir daran gehen, noch einige Punkte allgemeinerer Natur zu besprechen. Ursprünglich waren wir von der Fiktion eines allseitig geschlossenen Wasserbeckens ausgegangen und hatten dabei gesehen, wie sich mit absoluter Notwendigkeit die Differenzierung von Oberflächen- und Tiefenwasser herausbilden mußte. Tatsächlich liegen in den natürlichen Meeresabschnitten, die wir späterhin in Betracht gezogen haben, die Dinge etwas anders: das Oberflächenwasser ist nicht in Ruhe, es befindet sich in steter Bewegung und wird unausgesetzt durch neue zuströmende Wassermassen verdrängt. Nun wird unter allen Umständen ein Teil dieses Tiefenwassers von versinkendem Oberflächenwasser gebildet, sei es infolge von dessen Abkühlung, wie im nordatlantischen Ozean, sei es infolge der Konzentration durch Verdunstung, wie sie z. B. das ins Mittelmeer einströmende atlantische Wasser in steigendem Maße in ostw

licher Richtung erfährt. Dieses sinkende Wasser drängt also dem Tiefenwasser eine dem oberflächlichen Zustrom entgegengesetzt gerichtete Bewegung auf. Nun ist es klar, daß die chemische Differenzierung der verschiedenen Schichten infolge des Fallens von Planktonorganismen in enger Abhängigkeit steht von der relativen Geschwindigkeit des zufließenden Oberflächenwassers und des abfließenden Tiefenwassers. Je größer die relative Ruhe dieses letzteren, um so eher kann es zum Sammelbecken der ständig mit dem Plankton hinabrieselnden Nährstoffe werden. Ferner leuchtet ein, daß die Differenzierung der Schichten da am geringsten sein wird, wo das Wasser im Niedersinken begriffen ist. Ungünstig ist also in dieser Hinsicht z. B. gerade das östliche Mittelmeer, wo das sich allmählich konzentrierende Wasser in die Tiefe hinabsinkt, gerade der Meeresabschnitt, von dem wir durch NATTERER die besten und eingehendsten Untersuchungen haben; viel günstiger das Nordmeer, aus dem ein großer Teil des zugeführten Wassers mit den kühlen Strömungen abfließt und demgemäß die Bewegung der mächtigen Tiefenwasserschicht nur eine langsame ist, so daß sich in ihr aufspeichert, was im Laufe von Jahren durch das atlantische Wasser eingeführt wird und niedersinkt; am größten muß aber die chemische Differenz der Wasserschichten da sein, wo das Tiefenwasser mit seiner trägen Bewegung eine lange Wanderung unterhalb der rasch wechselnden und fließenden Oberflächenströme vollführt hat, also etwa an der Wurzel der Golfstromtrift, oder in der Sargassosee. Hier ist zu erwarten, daß sehr eingehende chemische Untersuchungen einen bedeutenden Unterschied im Nährstoffgehalt der verschiedenen Wasserschichten kennen lehren.

Ein anderer Punkt, den wir noch zu besprechen haben, betrifft die Tiefe, aus der das Aufsteigen von Wasser erfolgen muß, um im beschriebenen Sinne fördernd auf die Entwickelung des Oberflächenplanktons zu wirken. Es unterliegt nun keinem Zweifel, daß die Wirkung am günstigsten sein wird, wenn das Aufsteigen vom Boden aus stattfindet. Doch kann unter Umständen auch die Aspiration aus geringerer Tiefe wirksam sein, wenn nämlich, wie wir z. B. aus den oben zitierten Untersuchungen KARSTENS erfahren, im Sinken eine allmähliche Zersetzung und Auflösung der Planktonorganismen stattfindet, so daß ein Teil der in ihnen enthaltenen Nährstoffe in das umgebende Wasser übergeht. Tat-

sächlich dürfen wir aber nicht bezweifeln, daß bei den Aspirationsvorgängen großen Stiles, wie wir sie z. B. im Tropengebiete kennen gelernt haben, die vertikale Bewegung sich bis in die allergrößten Tiefen erstreckt; denn sonst könnte das Bodenwasser nicht dauernd seine niedrige Temperatur beibehalten, es müßte durch die Berührung mit dem Boden eine allmähliche Erwärmung erfahren. Diese Wärmezufuhr wird, wie z. B. NANSEN[1]) ausdrücklich hervorhebt, mit zur Durchmischung der tiefsten Schichten beitragen und verhindern, daß am Boden eine stagnierende Wassermasse entsteht. Daß die Ausbiegung der Isothermobathen in den bezeichneten Gebieten nur bis zu einer gewissen Tiefe nachweisbar ist, haben wir oben bereits erwähnt; aber auch gleichzeitig bemerkt, daß durch diese Tiefe keineswegs die Grenze der vertikalen Bewegung bezeichnet wird; wir haben uns vielmehr vorzustellen, daß nach dieser Stelle des durch die Windwirkung herabgesetzten hydrostatischen Druckes die Bewegungsrichtungen der aufsteigenden Wassermassen fächerförmig konvergieren, so daß es nur in der Nähe der Oberfläche zu einer deutlichen Brechung der Isothermenlinien kommen kann, während in der Tiefe die Bewegung in horizontaler Richtung ein größeres Areal umfassen muß und deshalb in der bezeichneten Weise nicht so klar zum Ausdruck kommt. Die gleiche Überlegung muß auch für die Verhältnisse an Auftriebküsten gelten, wo durch ablandige Winde lokales Aufsteigen von Tiefenwasser bewirkt wird. Von diesem Phänomen war schon oben einmal die Rede; im nächsten Abschnitt kommen wir wieder darauf zurück.

1) NANSEN, Petermanns Mitteilungen 1905 pag. 1 ff.

V. Die Verhältnisse an Küsten und unterseeischen Erhebungen.

Werfen wir jetzt einen Blick auf die Erscheinungen, die sich an den Küsten der Kontinente und Inseln beobachten lassen. Hier liegen die Dinge oft so kompliziert, daß wir nur in seltenen Fällen aus den biologischen Beobachtungen direkte Argumente für die Richtigkeit unserer Vorstellungen zu entnehmen vermögen; dafür aber treten uns eine ganze Reihe von Problemen entgegen, die einmal schon wegen ihrer Beziehungen zur Fischerei von Wichtigkeit sind, andererseits aber wegen der leichteren Zugänglichkeit der Gebiete der Lösung geringere Schwierigkeiten entgegensetzen, als die die Hochsee betreffenden Fragen.

Wir hatten schon einmal Gelegenheit, von besonderen Erscheinungen zu sprechen, die sich an der Küste abspielen; es handelte sich um die Aspiration von Tiefenwasser, die dann eintritt, wenn überwiegend ablandige Winde das Wasser von der Küste wegtreiben, und so eine Kompensation aus der Tiefe nötig machen. Dieses Phänomen macht sich dadurch bemerklich, daß die Oberflächentemperatur in der Nähe der Küste niedriger ist als auf der hohen See. In dem oben besprochenen Falle an der Küste von Algier war diese Depression nur sehr gering infolge des relativ warmen Bodenwassers im Mittelländischen Meere. Trotzdem zeichnet sich diese Region durch großen Fischreichtum aus, den wir in diesem Falle keinem anderen Umstande zuzuschreiben vermochten, als eben dem Auftrieb von Tiefenwasser.

Die gleiche Erscheinung findet sich nun auch an anderen Orten, so z. B. in hohem Maße an verschiedenen Teilen der westafrikanischen Küste.[1]) Auch für diese gilt nun die gleiche Tatsache, daß der Auftrieb von Tiefenwasser mit einer reichen Ent-

1) Puff, Das kalte Auftriebwasser etc. Marburger Diss. 1890, und Schott, Wiss. Erg. etc. Bd. I. pag. 121 ff.

wicklung von organischem Leben verknüpft ist. PUFF schreibt hierüber: „Kein Wasser im Ozean wimmelt so von Leben als das Auftriebwasser tropischer Breiten. Ein an Bord geschöpfter Eimer Wasser ist meist ganz trübe von lebenden Wesen, der Nahrung zahlloser Fische, welche ihrerseits den Hauptunterhalt der Küstenbewohner bilden..... Daher sind diese Gebiete die Stätten ausgedehnter Seefischerei (l. c. pag. 57)." Als solche Fischfangplätze erwähnt er einige Stellen der portugiesischen Küste, der Westküste von Marokko, der afrikanischen Küste gegenüber den Kanarischen Inseln und einige andere mehr. „Auch das Gebiet gegenüber den Kap Verdischen Inseln soll überaus reich an wohlschmeckenden Fischen sein (PUFF, l. c.)." Bis auf diese letzgenannte Region münden an den bezeichneten Teilen der westafrikanischen Küste keine größeren Flüsse, sodaß man für das erwähnte massenhafte Auftreten von Organismen wohl kaum eine andere Erklärung findet, als den Auftrieb von Tiefenwasser, denn die keineswegs immer bedeutende Abkühlung des Wassers werden wir nach unsern mehrfach besprochenen Erfahrungen, die durchaus gegen die Annahme eines Parallelismus zwischen Oberflächentemperatur und Organismenproduktion sprechen, für die erhöhte Produktivität der Meeresteile kaum verantwortlich machen können. Die bezeichneten Gebiete würden ein sehr geeignetes Feld sein für periodische Planktonbeobachtungen, welche lehren würden, ob ein Zusammhang zwischen der Produktionsfähigkeit und dem periodisch auftretenden Tiefenwasser besteht. Es ist möglich, daß eine analoge Erscheinung, die sich in kleinerem Maßstabe wohl in allen Küstengebieten abspielt, die Ursache für das zeitweilige Auftreten reichlicher Planktonmengen ist, wie man sie z. B. in der Adria, im Roten Meere und anderwärts beobachten kann. Im Golf von Neapel hat SCHÜTT[1]) periodische Beobachtungen angestellt, in denen sich zeigte, daß fast das ganze Jahr über große Armut an Plankton herrschte. Nur in der zweiten Hälfte des November schnellte das Planktonvolumen plötzlich in die Höhe, das ist nun auffälliger Weise die gleiche Zeit, um die die Tramontana, der ablandige Nordostwind, kurze Zeit lang kräftig zu wehen pflegt und das Wasser aus dem Golf hinaustreibt. Der Gedanke liegt nahe, daß die plötzliche kurze Vermehrung der

1) SCHÜTT, Analytische Planktonstudien, pag. 8.

Planktonproduktion, wie sie SCHÜTT beobachtete, mit einer solchen Erscheinung zusammenhängt.

Es sind aber noch andere Ursachen vorhanden, die auch an denjenigen Küsten einen mehr oder weniger bedeutenden Wasserauftrieb bewirken, die das beschriebene Phänomen nicht aufweisen; freilich pflegt er dann nicht solche Dimensionen anzunehmen, wie in jenen Fällen. In diesem Sinne wirkt der Umstand, daß von den Kontinenten und Inseln aus Süßwasser in das Meer zu gelangen pflegt, in das Oberflächenwasser in der Nähe der Küste mehr oder weniger stark verdünnt. Dieses verdünnte Oberflächenwasser hat nun vermöge seines geringern spezifischen Gewichtes die Tendenz das schwerere Wasser der hohen See zu überlagern, ein Vorgang, welcher nach den in einem der vorigen Abschnitte entwickelten Ausführungen ein Aufsteigen des Tiefenwassers in der Region des leichten Oberflächenwassers zur Folge haben muß. Diese Erscheinung konnte KNUDSEN[1]) südlich von Island gelegentlich der Ingolfexpedition beobachten. Bei allen hydrographischen Sektionen, die senkrecht gegen die Südküste gerichtet waren, ließ sich ein Aufsteigen der Ischalinen und der Isothermen gegen die Küste hin wahrnehmen. Diese Erscheinung führt KNUDSEN auf das sich ausbreitende Küstenwasser zurück.

Größere Dimensionen nimmt das Aufsteigen von Tiefenwasser an den Küsten da an, wo an Mündungen großer Ströme bedeutendere Wassermassen auf einmal in die See gelangen. Da treten die von EKMAN[2]) zuerst bei hydrographischen Studien an der Mündung der Götaelf beobachteten Reaktionsströme auf. Diese entstehen dadurch, daß das einmündende Wasser ruhende Schichten mit sich reißt, die zum Teil durch Aspiration aus der Tiefe kompensiert werden. Die Erscheinung, daß das kalte Wasser in der Nähe der Flußmündungen ziemlich hoch ansteigt, ist späterhin öfters beobachtet worden. MAKAROW[3]) erwähnt eine Anzahl von Fällen, die sich auf die Kieler Föhrde, auf Stellen im Schwarzen Meere, auf die Mündung des La Plata-Stromes und auf die Rheede von Kronstadt beziehen.

Die eben geschilderten durch den Ausfluß süßen Wassers von

1) The Danish Ingolf-Expedition, I, 2: KNUDSEN, Hydrography (1899) pag. 106 ff.

2) EKMAN, On the general causes of Oceanic currents. Upsala 1876.

3) MAKAROW, Le Vitaz etc., pag. 222.

den Küsten her bewirkten Erscheinungen nehmen ganz besondere für die biologischen Verhältnisse bedeutsame Formen an, wenn das Küstenwasser bei seiner seewärts gerichteten Bewegung auf den Widerstand des sich landwärts bewegenden Wassers der offenen See stößt. Dafür sind die Bedingungen öfters gegeben, weil die Ströme infolge der durch die Wirkung der Erdrotation bewirkten Lateralbewegung häufig gegen das Land gepreßt werden. So liegen z. B. die Verhältnisse an der norwegischen Küste.[1]) Hier finden wir unmittelbar in der Nähe des Landes einen Streifen verdünnten Wassers, welches sich in nordöstlicher Richtung bewegt und das Bestreben hat, sich über das schwerere atlantische Wasser zu ergießen. Vermöge seiner mit nördlich gerichteter Komponente stattfindenden Bewegung wird aber dieses Bestreben teilweise kompensiert durch die Wirkung der Erdrotation, die ihrerseits das Wasser gegen das Land zu drücken sucht. Daraus resultiert nun bei der steten Erneuerung dieser Wassermassen die Bildung einer mehr oder weniger spitz keilförmigen Schicht, der sogen. Randfurche, die am dicksten in unmittelbarer Nähe des Landes, am dünnsten auf der Seite des offenen Ozeans ist. Gegen diese Randfurche drückt nun das atlantische Wasser, das seinerseits eine landwärts gerichtete Bewegungskomponente besitzt. Aus dem Gleichgewicht dieser verschiedenen Kräfte resultiert nun die mehr oder weniger spitze Form der Furche. An der Grenze der beiden Schichten findet nun ein Anstau statt, der daher rührt, daß sich hierhin das Wasser von den entgegengesetzten Richtungen bewegt.[2]) Es muß daher an dieser Stelle ein ständiges Hinabsinken des Wassers in die Tiefe stattfinden, wie es SANDSTRÖM auf Grund seiner Beobachtungen am Gulmarfjord dargetan hat.

PETTERSSON (l. c. pag. 22) hat zuerst auf die biologische Bedeutung dieser Erscheinungen hingewiesen und vor allem den Umstand betont, daß an den Grenzstreifen, durch das von beiden Richtungen herkommende Wasser der See ein Abschäumen der Wassermassen stattfindet, sodaß sich hier rein passiv Ansammlungen der Planktonorganismen bilden können, die nun

1) SANDSTRÖM, Windströme im Gullmarfjord. Svenska Hydrog.-Biol. Kommissionens Skrifter II.

2) Vgl. PETTERSSON, Über die Wahrscheinlichkeit periodischer Änderungen etc. II in Svenska Hydrogr. Biolog. Kommissionens Skrifter II pag. 20 ff.

ihrerseits größeren Tieren zur Nahrung dienen. Es ist sehr wohl möglich, daß die mehrfach beschriebenen sogenannten Zookorrenten[1]) oder Tierstraßen auf diese Weise zustande kommen. Aber die fraglichen Verhältnisse haben noch in anderer Hinsicht für die Planktonbiologie Bedeutung. Innerhalb der Randfurche geht, wie aus SANDSTRÖMS Beobachtungen zu entnehmen ist, ein selbständiger Zirkulationsprozeß vor sich, der das versinkende Wasser zum Teil wieder der Küste zuführt. Nun ist es klar, daß bei diesem Vorgange je nach dem Zustande der Furche in größerem oder geringeren Maße ein Auftrieb von Tiefenwasser stattfinden wird. Ist die Furche tief, dann berührt der Zirkulationsprozeß auf einer größern Strecke den Boden, als wenn die Furche flach ist. Nun ist gerade im Frühjahr zur Zeit des Planktonmaximums an der Küste die Furche wahrscheinlich infolge der raschen Nordwärtsbewegung des Küstenwassers und der infolgedessen bedeutenderen Wirkung der Erdrotation besonders tief und verflacht sich im Laufe des Sommers immer mehr und mehr. Das geht z. B. sehr schön aus zwei von HJORT und GRAN[2]) im Februar und im Juli von Christiansund nach Strorregen ausgeführten hydrographischen Schnitten hervor. Nun sehen wir, daß gerade zu der Zeit, zu der die norwegische Randfurche am tiefsten ist, die Planktonproduktion ihren größten Wert erreicht.

Überhaupt sind die Erscheinungen in den beschriebenen Randfurchen schon deshalb komplizierter, weil das Phytoplankton hier aus neritischen Formen zusammengesetzt ist, deren Dauersporen auf den Boden zu sinken pflegen. Es ist also möglich, daß hier das Heraufbringen der Keime durch die vertikalen Strömungen eine ebenso große Rolle spielt, wie der Transport der Nährstoffe aus der Tiefe, so daß die Verhältnisse hier wie schon eingangs betont wurde, weit problematischerer Natur sind als im offnen Meere.

Ein weiterer Vorgang, der sich an Küsten und Küstenbänken abspielt, ist der Wasserauftrieb, der eintritt, wenn ein Bodenstrom gegen jene gedrängt wird. Dann staut sich das Wasser, und dieser Anstau ist durch eine konvexe Lage der Isothermobathen

1) Über Zookorrenten vgl. HÄCKEL, Planktonstudien (1900), pag. 85 ff.

2) HJORT u. GRAN, Report on Norwegian Marine Investigations 1895—97. Bergens Museums Skrifter 1899. Tafel 6 Fig. 3 a u. b.; auch PETTERSSON, Periodische Änderungen II. l. c. Fig. 20 und 21.

nachzuweisen. Dafür gibt es nun schöne Beispiele, etwa am nördlichen Abhange des Nordseeplateaus, an welchem das Tiefenwasser des norwegischen Nordmeeres seine Aufwärtsbewegung ausführt. Ob nun die periodischen und aperiodischen Schwankungen, die sich in diesen Bewegungen des Tiefenwassers nachweisen lassen[1]), in irgend welchen Beziehungen stehen zu den biologischen Phänomenen an der Oberfläche wird sich wohl erst durch eigens darauf gerichtete Untersuchungen nachweisen lassen.

Es ist nun noch die Tatsache zu erwähnen, daß ein Teil der beschriebenen Phänomene sich auch an unterseeischen Rücken und Plateaus geltend zu machen vermag. Da ist z. B. die zuletzt beschriebene Erscheinung zu nennen, daß ein Bodenstrom, wenn er auf seinem Wege durch eine unterseeische Erhebung behindert wird, eine aufwärts gerichtete Tendenz erhält. Das ist z. B. in bezug auf das Bodenwasser des norwegischen Nordmeeres am Wyville-Thompson-Rücken der Fall. Zeitweilig ist dieser Anstau so bedeutend, daß dieses Wasser über den Rücken überfließt, zeitweilig nimmt es ein bedeutend niedrigeres Niveau ein.[2]) Diese Erscheinung kann nun im Verein mit einer andern eine intensive Durchmischung der Wassermassen herbeiführen; das sind die Kompensationsströme, die dann entstehen, wenn ein Strom über einen unterseeischen Rücken hinwegfließt. Diese sind den beschriebenen Erscheinungen an Flußmündungen vollkommen analog: es wird durch den einfließenden Strom die darunter liegende Wasserschicht infolge der Reibung in Bewegung gesetzt, was eine Aspiration aus der Tiefe bedingt. Dieses Phänomen ist zum ersten Male von Humboldt im Karaibischen Meere beobachtet worden.[3]) Die Bedingungen dafür sind z. B. beim Eintritt des atlantischen Stromes in das norwegische Nordmeer gegeben.[4]) Dieser findet an dem die Färöer- mit den Shetlandinseln verbindenden Rücken statt, und so ist hier die Möglichkeit für die Vermischung mit Tiefenwasser vorhanden, welches ja seinerseits durch den nachdrängenden Bodenstrom an jenem in die Höhe getrieben wird.

---

1) S. PETTERSSON, Die hydrograph. Untersuchungen des Nordatlantischen Ozeans 1895—96 in Petermanns Mitteil. Bd. 49 (1900) pag. 31.

2) Ibidem.

3) Zit. bei KRÜMMEL, Handbuch der Ozeanographie Bd. II (1887) pag. 309.

4) HELLAND-HANSEN, Die Hydrographie der Färöer-Shetland-Rinne 1902/3. Conseil Permanent etc. Rapports Vol. III (1905) Anlage B.

Vielleicht ist das auch eines der Momente, die die hohe Produktivität des bezeichneten Meeresgebietes bedingen. Übrigens pflegen vom Land entfernte unterseeische Erhebungen von einer reichen Bodenfauna besiedelt zu sein. CHUN[1]) erwähnt diese Tatsache gelegentlich der Besprechung der Valdiviabank, an welcher er diese Erfahrung bestätigt fand. Dieser reichen Entwicklung der Grundfauna muß ja notwendigerweise ein entsprechender Reichtum des die notwendigen Nährstoffe liefernden Oberflächenplanktons entsprechen; doch sind mir keine positiven Angaben bekannt, die sich in diesem Sinne deuten ließen. Für solche Untersuchungen könnten vielleicht die Abhänge des Azorenplateaus ein geeignetes Feld darstellen.

Ich begnüge mich betreffs der Erscheinungen an den Küsten mit diesen kurzen Bemerkungen; es ließe sich noch manches darüber sagen; da aber dies gerade der Punkt ist, an dem die exakte Forschung am ehesten einzusetzen vermag, so verschiebe ich eine eingehendere Besprechung dieser Dinge, bis ich über eigenes Tatsachenmaterial verfüge.

---

1) CHUN in der Zeitschrift der Berliner Gesellschaft für Erdkunde 1899. pag. 85.

VI. Über die vertikale Verteilung der Tiefseeorganismen.

Wir wollen nun dazu übergehen, noch eine Reihe von Fragen zu besprechen, die mit dem Inhalte der vorigen Kapitel in einem gewissen Zusammenhange stehen. Zunächst einiges über die vertikale Verteilung der Organismen verschiedener Schichten. Dabei haben wir wesentlich zweierlei zu berücksichtigen: in erster Linie den Einfluß, den vertikal aufwärts gerichtete Strömungen auf die Verteilung des lebenden Planktons intermediärer Schichten besitzen, und dann den Einfluß dieser Strömungen auf das Hinabfallen von deren toten Leibern in die Tiefe, ein Vorgang, der, wie wir schon gesehen haben, für die Ökonomie des Ozeans von außerordentlicher Bedeutung ist.

Betreffs des ersten Punktes ist zu berücksichtigen, daß weitaus die Mehrzahl der Planktonorganismen die Fähigkeit der aktiven Ortsbewegung besitzt, die ihnen erlaubt, eine bestimmte Höhenlage, auf die sie angepaßt sind, aufzusuchen. Die wesentlichste Ausnahme davon bilden die Diatomeen, die durch bestimmte Schwebvorrichtungen passiv in den obersten Schichten, in denen sie einzig und allein ihre Lebensbedingungen finden, sich erhalten. Unter den Protozoen besitzen ja sogar die schwebenden Radiolarien eine in ihrem Mechanismus noch nicht völlig aufgeklärte Einrichtung, die ihnen ermöglicht, je nach den Umständen eine steigende oder fallende Bewegung auszuführen. Daß nun die Planktonorganismen ihr Bewegungsvermögen dazu benutzen, eine bestimmte Tiefenlage im Wasser einzunehmen, das beweist am schlagendsten die von Chun entdeckte und im einzelnen näher studierte Tatsache der vertikalen Wanderungen, die sie im Wechsel der Tages- und der Jahreszeiten regelmäßig ausführen.[1])

Dieser Umstand wird uns also von vornherein vermuten lassen, daß die vertikalen Strömungen nicht imstande zu sein

1) Siehe Chun. Die pelagische Tierwelt etc. Bibliotheca Zoologica I (1888).

deren Wasser sie also an die Oberfläche befördern wird. Diese verhält sich also gewissermaßen wie eine Bodenschicht, an der sich Nährmaterial ansammelt, und so sehen wir, daß die Planktonfauna an der Grenze des atlantischen und des Bodenwassers für die Ernährung des Oberflächenplanktons von höchster Bedeutung sein kann.

Aus all diesem ergibt sich, daß die Beziehungen der Planktonorganismen verschiedener Schichten zueinander sich weit komplizierter erweisen als es auf den ersten Blick erscheinen mag, wenn wir nur die vertikalen Bewegungen des Wassers genügend beachten, und so hat die Meeresbiologie hier eine große Summe mannigfaltiger Aufgaben vor sich, von deren Lösung wir noch weit entfernt sind.

VII. Über den Stoffwechsel im Meere.

Wir wollen nun zum Schluß die Frage erörtern, welche für die Entwicklung des Planktons notwendige Nährstoffe es sind, die für die Produktionsfähigkeit eines bestimmten Teils der Meeresoberfläche maßgebend sein können. Wie schon oben betont, berührt diese Spezialfrage das Fundament unserer Theorie im Grunde genommen gar nicht, und es ist sehr wohl denkbar, daß in verschiedenen Meeresgebieten verschiedene Stoffe in Betracht kommen. Es kann wohl sein, daß in dem einen die Phosphorsäure, in dem andern der Stickstoff im Minimum sich befindet.

Diese Frage sowie das ganze uns beschäftigende Problem könnte direkt auf empirischem Wege gelöst werden. Wären wir imstande, vollständige Analysen des Meerwassers mit samt seinen Bewohnern zu den verschiedenen Jahreszeiten und in den verschiedenen Tiefen auszuführen, dann würden wir sehen, ob die durch die Theorie geforderte Kongruenz zwischen Produktionsfähigkeit und dem Kreislauf der Nährstoffe besteht. Die Schwierigkeit, die sich dem entgegenstellt, beruht nicht so sehr in der genauen Analyse des Meerwassers selbst, als in dem Erfordernis, auch die in den Organismen enthaltenen Nährstoffmengen zu kennen. Eine einfache Überlegung wird uns das klar machen. Gesetzt den Fall, die in Betracht kommenden Organismen vermöchten etwa die gegebenen Stickstoffquellen immer bis auf einen gewissen minimalen Rückstand verwerten, so werden wir in zwei Gebieten verschiedenen Nährstoffgehalts und Produktionsvermögens schließlich in filtriertem Wasser die gleiche Menge stickstoffhaltiger Substanz finden. Das Wesentliche liegt in dem Unterschied des in den Stoffwechsel gezogenen Stickstoffs. Von dieser Erkenntnis ausgehend haben Brandt und Hensen Methoden ausfindig zu

n versucht, den Stickstoffgehalt des Planktons zu bestimmen,

doch sind diese für unsern Zweck bei weitem nicht genau genug, weil dabei die größten und die kleinsten Organismen der Untersuchung entgehen. Andererseits besitzen wir auch kaum zureichende Analysen des Meerwassers, was z. B. an Stickstoffbestimmungen sich findet, stammt von ungenügend filtriertem Wasser her, in dem die kleinsten Organismen sicherlich noch vorhanden sind. Nur betreffs der Kieselsäure hat MURRAY die Notwendigkeit der Filtration betont und so hat auch RABEN[1]) bei den auf seine Veranlassung gemachten Analysen in Anwendung gebracht.

Wenn wir die Literatur überschauen und zu ermitteln suchen, ob sich nicht wenigstens Anhaltspunkte für eine Lösung der eingangs gestellten Frage ergeben, so gelangen wir zu negativen Resultaten. Die eingehendsten Untersuchungen von Meerwasser, die ich kenne, sind diejenigen von NATTERER[2]) im östlichen Mittelmeer. Aber für unser Problem ist daraus z. Z. noch nicht viel zu entnehmen; wie oben auseinandergesetzt wurde, ist gerade das östliche Mittelmeer kein günstiges Gebiet für seine Lösung. Ferner ist nicht recht ersichtlich bis zu welchem Grade die Körper des Planktons aus dem Wasser entfernt wurden, so daß wir aus den Stickstoffbestimmungen keine Antwort auf unsere Fragen erhalten. Phosphorsäurebestimmungen in den verschiedenen Schichten, welche für uns von großer Bedeutung wären, sind leider nicht vorhanden. Aber eine höchst interessante Tatsache ist in den NATTERERschen Arbeiten beschrieben (l. c. Bd. 60, pag. 66 und Bd. 61, pag. 36), die von außerordentlichem Interesse für uns ist, weil sie geradezu eine Illustration für den von uns konstruierten Kreislauf der Nährstoffe abgibt, das sind die Veränderungen, die der Bromgehalt des Meeres stellenweise erleidet. Westlich von der Nilmündung findet sich nämlich ein Gebiet, in welchem eine lebhafte Algenvegetation zu beobachten ist; ohne Zweifel spielen hier die vom Nil eingeführten Nährstoffe eine große Rolle. Nun hat NATTERER gefunden, daß hier das Verhältnis zwischen Chlor und Brom außerordentlich stark zu Ungunsten des letzteren verschoben ist; während dieses Verhältnis im Ozean nach DITTMARS[3]) Forschungen

1) RABEN, Quantitative Bestimmungen der im Meerwasser gelösten Kieselsäure in Wiss. Meeresuntersuchungen. Abt. Kiel Bd. 8 (1905) pag. 89.

2) NATTERER, Chemische Untersuchungen im östlichen Mittelmeer in Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien Bd. 60ff.

3) Reports of H. M. S. Challenger, Physics and Chemistry Vol. I, pag. 89ff.

außerordentlich konstant ist und auch im Mittelmeer im übrigen den normalen Wert von etwa 100 : 0,334 aufweist, ist in dem fraglichen Gebiet der Bromgehalt etwa um ein Drittel niedriger, Da diese Anomalie nicht durch Chlorzufuhr entstanden sein kann, bleibt nur die Annahme übrig, daß hier eine starke Absorption von Brom im Spiele ist. NATTERER zieht auch den zweifellos richtigen Schluß, daß die Algen das Brom speichern und durch Hinabfallen in die Tiefe dem Oberflächenwasser entführen. Nun vermochte NATTERER dieses bromarme Wasser als Index für vertikale Bewegungen zu verwenden, er fand es oft in der Tiefe und zwar dicht neben Schichten normalen Bromgehalts. An diesen Stellen muß es also an der Oberfläche durch Tiefenwasser normaler Zusammensetzung ersetzt worden sein, und wir sehen hier, wie sich bezüglich des Broms der Kreislauf abspielt, den wir für die notwendigen Nährstoffe annehmen.

Bei Betrachtung dieser Erscheinungen drängte sich mir naturgemäß die Frage auf, ob man nicht auch anderwärts den Bromgehalt als Index für die vertikalen Wasserbewegungen verwenden könne. Nun zeigt aber ein Blick auf DITTMARS Analysen der Challenger-Wasserproben, daß das nicht der Fall ist. DITTMAR stellte drei Gemische aus ungefähr je 70 Wasserproben her, von denen die einen den obersten Schichten, die anderen intermediären und die dritten Tiefenwasserschichten entstammten. Alle drei Gemische zeigten bis auf minimale Differenzen den gleichen Bromgehalt, das erweckte zunächst in mir selbst Bedenken, denn dieser Unterschied zwischen dem Mittelmeer und dem offenen Ozean legte die Frage nahe, ob denn der vertikale Kreislauf der Nährstoffe, auf den meine ganzen Vorstellungen sich gründeten, etwa nur in einem so ruhigen und abgeschlossenen Meeresgebiet, wie es eben das Mittelländische Meer ist, sich abspielen können. Doch lehrt eine einfache Berechnung, daß unter normalen Bedingungen eine merkliche Abnahme des Broms im Meere gar nicht stattfinden kann, und daß an jener Stelle ganz ungewöhnliche Bedingungen die Bromspeicherungen bedingen müssen. Normalerweise enthält ein Liter Meerwasser etwa 70 Milligramm Brom, dagegen nach Untersuchungen von RABEN, die wir gleich noch eingehender zu berücksichtigen haben, in der Nordsee im günstigsten Falle etwa 0,3 Milligramm Stickstoff in gebundener, also für das Plankton disponibler Form. Diese Zahl ist gewiß relativ hoch,

ich wähle aber absichtlich für den durchzuführenden Vergleich das stickstoffreiche Nordseewasser. Nun enthält der Pflanzenkörper, abgesehen von gewissen Reservestofforganen, ca. 3% der Trockensubstanz an Stickstoff. Der Bromgehalt der Meeresalgen macht etwa den hundertsten Teil davon aus: es wird für die Asche ein Bromgehalt von etwa 0,2% angegeben, andererseits beträgt der Aschengehalt der Trockensubstanz von Fucus ungefähr 15%, daraus würde sich ein Bromgehalt von 0,3% der Trockensubstanz berechnen. Wir sehen also, daß bei voller Ausnützung der disponiblen Stickstoffverbindungen das Plankton in der Nordsee noch nicht den zwanzigtausendsten Teil des im Meerwasser vorhandenen Broms aufzunehmen imstande wäre; wie also an der betreffenden Stelle des Mittelmeeres diese ungewöhnliche Abnahme des Bromgehaltes zustande kommt, ist mir völlig rätselhaft. Einmal wird gewiß eine erhöhte Stickstoffzufuhr durch den Nil und eine gewisse Stagnation des Wassers die stärkere Inanspruchnahme des Broms ermöglichen, andererseits muß es sich hier um Algen von exzessiv hohem Speicherungsvermögen für Brom handeln, deren Kenntnis physiologisch sehr interessant wäre, vor allem aber auch für unsere meeresbiologischen Fragen von Interesse werden könnte; denn überall da, wo dieselben Formen vorkommen, könnten wir vielleicht den Bromgehalt als Index der vertikalen Wasserbewegung benutzen.

Wir sehen also, daß zu einer empirischen Behandlung der Frage nach dem vertikalen Kreislauf der Nährstoffe im Meer das Material bei weitem nicht ausreicht. Wir müssen uns also hier mit einer ganz kurzen Diskussion darüber begnügen, welche Stoffe eigentlich als Minimum in Betracht kommen. HENSEN hat zuerst diese Rolle dem Stickstoff zugesprochen, und BRANDT hat diese Anschauung in seinen oben zitierten Abhandlungen näher ausgeführt. Wenn nun, wie wir gesehen haben, gewichtige Gründe gegen die Vorstellung sprechen, die sich BRANDT von der Art des Stickstoffkreislaufs im Meere macht, so besagt das noch nichts gegen die Grundanschauung, daß der Stickstoff das im Minimum befindliche Element ist und so die Produktionsfähigkeit der verschiedenen Meeresteile mit bestimmt. Angesichts der geringen Mengen von Stickstoffverbindungen im Meere und dem relativ großen Bedarf der Organismen ist diese Annahme durchaus nicht unwahrscheinlich. Wir wollen nun einen kurzen Bl

auf die Tatsachen werfen, die uns über den Stickstoffkreislauf im Meere bekannt sind und auf die Probleme, die uns dabei entgegentreten.

Fassen wir zunächst die statischen Verhältnisse ins Auge, d. h. den Gehalt von Meerwasser verschiedener Provenienz an verschiedenen Stickstoffverbindungen. Es liegen darüber einige Untersuchungen vor, von denen die älteren in BRANDTS zweiter Abhandlung zitiert sind. Seither hat RABEN in der Nord- und der Ostsee zahlreiche Bestimmungen gemacht. Vergleichen wir alle diese bekannten Tatsachen, so treten uns so viele Lücken entgegen, daß wir kaum imstande sind, irgend welche Schlüsse entscheidender Art hieraus zu ziehen. So hat z. B. RABEN[1]) in der Nord- und Ostsee nicht unbeträchtliche Mengen von Salpeterstickstoff gefunden, NATTERER im Mittelmeer gar keinen. Meine Befunde im Golf von Neapel habe ich oben (pag. 368) erwähnt. Ich habe dort in unmittelbarer Küstennähe nicht unbeträchtliche Salpetersäuremengen konstatieren können, die aber in einiger Entfernung von der Küste vollständig verschwinden. Es sind dabei, wie sich zeigen ließ, die Stoffwechselerscheinungen der Algen in hohem Maße beteiligt. Diese Befunde legen die Frage nahe, ob es mit dem Salpetergehalt der Nord- und Ostsee nicht genau dieselbe Bewandtnis hat, ob es sich nicht auch hier um eine Zufuhr vom Lande her handelt, die sich nur infolge der ungeheuer viel größeren Wassermengen, die hier durch die Flüsse eingeführt werden, in einer weit größeren Entfernung von der Küste bemerklich macht. Hier können uns nur Bestimmungen in reinem atlantischen Wasser entscheidendes Vergleichsmaterial bieten. Bis dahin kann man auch dem beschriebenen Unterschied zwischen Nordsee und Mittelmeer durchaus nicht etwa auf eine intensivere Tätigkeit der denitrifizierenden Bakterien im wärmeren Wasser schließen. Was nun den Ammoniakgehalt betrifft, so sind RABENS Zahlen, die die Nordsee betreffen, im ganzen von derselben Größenordnung, wie NATTERERS Zahlen aus dem Mittelmeer, ja die letzteren sind meist noch etwas größer.

Betreffs der Fragen nach dem Umsatz der Stickstoffverbindungen im Meere, stehen wir gleichfalls noch einer Reihe von ungelösten

---

1) RABEN, Über quantitative Bestimmung von Stickstoffverbindungen im Meerwasser, in Wiss. Meeresuntersuchungen Abt. Kiel Bd. 8 (1905) pag. 83.

Problemen gegenüber. BENECKE und KEUTNER[1]) haben aus dem Wasser der Ostsee Formen aus der Gattung Azotobacter isoliert, also Bakterien, die die Fähigkeit besitzen, freien Stickstoff zu binden und in organische Form überzuführen. Wären diese Formen allenthalben verbreitet, so würden sie gewiß im Stoffwechsel des Meeres eine große Rolle spielen; ich kann aber nur soviel sagen, daß ich schon früher in zahlreichen Versuchen in Neapel vergeblich nach solchen Bakterien gesucht habe, und es erscheint nicht unwahrscheinlich, daß ihr Vorkommen in der Ostsee gleichfalls dem Einflusse des Süßwassers zuzuschreiben ist. Ihr Fehlen im Meere ist übrigens durchaus verständlich. WINOGRADSKYS Untersuchungen haben gezeigt, wie unökonomisch diese Bakterien im Stoffwechsel arbeiten: Clostridium pasteurianum verbraucht um 3 mgr. Stickstoff zu fixieren, 1 Gramm Zucker[2]), und so ist es klar, daß derartige Bakterien nur da einen günstigen Boden für ihre Entwicklung finden, wo ihnen reichlich organische Verbindungen zur Verfügung stehen. Das ist im offenen Meere nicht der Fall. Nur eine Gruppe von Meeresbakterien gibt es, denen für ihren Stoffwechsel eine reichliche Kohlenstoffquelle zur Verfügung steht, das sind diejenigen Formen, welche die Membranen abgestorbener Algen zu verwerten wissen. GRAN[3]) hat zuerst aus dem Meerwasser bei Helder Bakterien zu isolieren vermocht, die Agar-Agar d. h. Zellmembranen mariner Algen durch besondere Enzyme aufzulösen imstande sind. Ich habe in Neapel daraufhin Formen isoliert, deren Eigenschaften mit den GRANschen Diagnosen annähernd übereinstimmen. Es kam mir nun der Gedanke, daß vielleicht diese Bakterien, denen eine reichlichere Kohlenstoffquelle als anderen zur Verfügung steht, die Fähigkeit besitzen könnten, freien Stickstoff zu assimilieren, alle Versuche fielen negativ aus. Sie erfordern für die Kultur die Zugabe von gebundenem Stickstoff und lassen dessen Menge unverändert. Ich glaube daher, daß die Annahme am wahrscheinlichsten ist, daß der Zuwachs des Meeres an gebundenem Stickstoff nur von außen her stattfinden kann.

Es fragt sich nun, welchen Umwandlungen der zugeführte

1) BENECKE und KEUTNER, Über stickstoffbindende Bakterien aus der Ostsee. er. d. d. Bbotan. Gesellschaft Bd. 21 (1903) pag. 333.

2) Vgl. PFEFFER Pflanzenphysiologie Bd. I (1887) pag. 386.

3) GRAN, Studien über Meeresbakterien II. Bergens Museum Aarbog 1

Stickstoff unterliegt. Zunächst ist soviel sicher, daß ein großer Teil davon sowohl des Salpeterstickstoffs als des Ammoniakstickstoffs von den Algen in den Stoffwechsel gerissen und in organische Form übergeführt wird. Betreffs der übrigen Möglichkeiten haben wir die Frage nach der Nitrifikation ja schon in der Einleitung berührt, und dabei gesehen, daß die absolut negativen Befunde von GRAN und mir und die wesentlich negativen Befunde von BRANDT gegen die Annahme dieses Prozesses im Meerwasser sprechen. Ich muß aber noch auf einige Befunde von NATTERER (l. c. Bd. 60, pag. 67 ff.) zurückkommen, die die Frage zu komplizieren scheinen. NATTERER hat bei seinen Studien das Meerwasser mit Jodzinkstärkelösung auf salpetrige Säure hin untersucht und fand dabei, daß die obersten Schichten gar keine Reaktion, die darunter liegenden dagegen eine schwache Bläuung aufwiesen. Er nahm nun an, daß in den obersten beleuchteten Regionen Algen die salpetrige Säure absorbieren und in ihrem Stoffwechsel reduzieren, daß in den darunter liegenden Wasserlagen dagegen infolge des Fehlens dieser Algen die salpetrige Säure erhalten bleibt. Diesen Unterschied zwischen obersten und tieferen Schichten konnte er ebenso wie den Unterschied des Bromgehaltes als Index für vertikale Wasserbewegungen benutzen. Soweit sind die Dinge ganz plausibel. Nun aber erhebt sich die Frage, woher denn eigentlich die salpetrige Säure der tieferen Schichten stammt, denn diese stellen ja nichts anderes dar, als die im östlichsten Teile des Meeresbeckens herabgesunkenen Wassermassen. Sie haben sich also früher einmal an der Oberfläche befunden und waren demnach frei von salpetriger Säure. Die Zufuhr von außen könnte aber nur durch die Oberfläche erfolgen, in der sie jedoch nicht nachweisbar ist, also muß man logischer Weise annehmen, daß die salpetrige Säure in diesen Schichten selbst entstanden ist. Soll man nun diesen Befund doch durch Nitrifikation erklären? NATTERERS eigene Angaben sprechen dagegen. Er hat nämlich nie in dem Wasser eine deutliche Diphenylaminreaktion gefunden; das zeigt also, daß eine Ansammlung von Salpetersäure nicht stattfindet, was bei den beobachteten Ammoniakmengen und der Anwesenheit von nitrifizierenden Bakterien schon recht auffällig wäre. Nun ha[illegible]er selbst auch Proben längere Zeit stehen lasse[illegible]n untersucht; er sagt darüber folg[illegible]nm. 2): „Bei dem

Aufbewahren von Wasserproben, welche unmittelbar nach dem Schöpfen so gut wie frei von salpetriger Säure und Salpetersäure waren, habe ich auch einen erheblichen Unterschied bemerkt, je nachdem sie im Dunkeln gehalten oder dem Tageslichte ausgesetzt wurden. Im ersteren Falle hatten sich öfters schon nach wenigen Tagen relativ große Mengen von salpetriger Säure gebildet, dagegen war auch nach einem Jahre noch keine Salpetersäure entstanden. In letzterem Falle, in den dem Lichte ausgesetzten Wasserproben bildete sich keine oder fast keine salpetrige Säure, dafür aber Salpetersäure. Die Salpetersäure trat ganz langsam auf, doch entstanden bei ihr bei einjährigem Stehen des Wassers ziemlich bedeutende Mengen, vielleicht deshalb, weil in diesen öfters geöffneten Flaschen aus Luftkeimen stammende Organismen die Oberhand gewonnen hatten."

Diese Befunde scheinen schwer erklärlich. Warum sollte in den beleuchteten Flaschen die Bildung salpetriger Säure ausbleiben, da wir doch wissen, daß das Licht auf die nitrifizierenden Bakterien keinen merklichen Einfluß ausübt und anscheinend in denselben Flaschen durch nachträgliche Infektion tatsächlich Nitrifikation eintritt. Und warum sollte in den Dunkelflaschen die Nitrifikation auf einer Stufe stehen bleiben, in der keine nachweisbare Diphenylaminreaktion sich zeigt? denn auch die Anhäufung größerer Mengen von salpetriger Säure würde diese Reaktion hervorrufen. Ich kann mir die gesamten Befunde nicht anders erklären, als daß die Bläuung der mit Schwefelsäure versetzten Jodzinkstärkelösung, die NATTERER einzig als Reagens auf salpetrige Säure verwandt hat, garnicht durch salpetrige Säure sondern durch Spuren aktivierten Sauerstoffs erfolgt. Daß solcher im Stoffwechsel gewisser Meeresbakterien entstehen kann, habe ich bei Gelegenheit von Untersuchungen des Stoffwechsels gewisser Schwefelbakterien gefunden. Man denke ferner daran, daß das Leuchten vieler Meerestiere auf der Ausscheidung autooxydabler Stoffe beruht, die sehr wohl Ursache zur Bildung aktivierten Sauerstoffs geben können. Die ganze Frage würde sich ohne weiteres durch Prüfung des Tiefenwassers mit schwefelsaurem Metaphenylendiamin lösen lassen, welches ein eindeutiges Reagens auf salpetrige Säure darstellt, leider war mir zur Zeit meines Neapeler Aufenthaltes die NATTERERsche Angabe noch unbekannt, so daß ich über keine einschlägigen Erfahrungen verfüge.

Auf jeden Fall verdient dieser Punkt weiter verfolgt zu werden; denn jede Tatsache, die eine chemische Unterscheidung der Wasserschichten verschiedener Tiefe erlaubt, ist bei den Schwierigkeiten, die im allgemeinen dem Studium der Vertikalzirkulation entgegenstehen, von großer Bedeutung. Wir sehen also, daß nichts dafür spricht, daß das Ammoniak außer durch den Stoffwechsel der Algen noch anderweitigen Veränderungen unterliegt. Es fragt sich nun, was mit den eingeführten Nitraten und Nitriten geschehen war. Dieser Punkt ist für uns rasch erledigt, wir haben gesehen, daß sie zum großen Teil von den Algen absorbiert und in organische Form übergeführt werden. Ein Teil mag ja auch den nitrifizierenden Bakterien zum Opfer fallen. Wie weit wir diesen eine bedeutende Rolle für den Stoffwechsel im Meere zuzuschreiben haben, ist bereits oben diskutiert worden.

Ein beachtenswerter Punkt ist von NATTERER ausführlich behandelt worden, (l. c. Bd. 65. pag. 479 ff.) das ist nämlich das Verhältnis zwischen dem präformierten Ammoniak und demjenigen, das erst durch Oxydation mit Kaliumpermanganat gebildet wird. NATTERERS Untersuchungen, die im Mittelmeer und später im großen Maßstabe im roten Meer gemacht wurden, zeigen, daß die Menge des letzteren meist größer ist, als die des ersteren. Das Mengenverhältnis ist nicht überall dasselbe, konvergiert aber nach dem Werte 2 : 1. Es geht daraus hervor, daß bei der bakteriellen Zersetzung der organischen Substanzen im Meere nicht aller Stickstoff in Ammoniak übergeführt wird, das kann uns im übrigen nicht Wunder nehmen, da wir z. B. auch von Schimmelpilzen durch neuere Untersuchungen wissen, daß sie bei Verbrauch von Eiweißstoffen nur bedingungsweise und in verschiedenen Mengen Ammoniak entstehen lassen. Die Quantität dieser organischen Stickstoffverbindungen ebenso ihre Qualität, die nicht überall dieselbe zu sein scheint, kann für die Ernährung des Phytoplanktons von großer Bedeutung sein, und es ist daraus ersichtlich, daß zu einer empirischen Beantwortung der Frage, ob die Stickstoffverbindungen wirklich für die Produktion des Meeres maßgebend sind, die Lösung einer ganzen Reihe von Einzelproblemen notwendig ist.

Was nun schließlich die Stickstoffverluste des Meeres angeht, so haben wir ja schon davon zu sprechen Gelegenheit gehabt. Daß außer durch die Tätigkeit der denitrifizierenden Bakterien

und durch die Abgabe von Ammoniak an die Atmosphäre noch anderweitig freier Stickstoff aus organischen Verbindungen durch die Stoffwechseltätigkeit von Organismen entsteht, ist zwar theoretisch nicht absolut auszuschließen, jedoch nach allen unsern physiologischen Erfahrungen durchaus unwahrscheinlich. Wir haben mit diesem Umstande, der allerdings den Stoffumsatz im Meere aufs höchste komplizieren würde, kaum zu rechnen.

Von andern Elementen, die als im Minimum befindlich angenommen werden könnten, erwähnt BRANDT die Phosphorsäure. Dabei teilt er mit[1]), daß die letzten auf seine Veranlassung ausgeführten Untersuchungen für diese Möglichkeit zu sprechen scheinen. Ich möchte auch betonen, daß dabei auf die Form zu achten ist, in der die Phosphorsäure sich im Meere befindet. Auf jeden Fall müssen ja die Tiere des Meeres phosphorhaltige Stoffwechselprodukte ausscheiden, denn beim Erwerb der für sie notwendigen Kohlenstoffnahrung müssen sie ja notwendigerweise auch phosphorhaltige Verbindungen mit aufnehmen; ob nun die Ausscheidung von deren Überschuß in organischer oder anorganischer Form erfolgt, wissen wir nicht. Das Vorkommen gepaarter organischer Phosphorsäuren im Meerwasser würde einmal natürlich bei der Ausführung der Analysen zu berücksichtigen sein, andererseits auch für die Ernährungsverhältnisse im Meere in Betracht kommen. Genau das Gleiche gilt nebenbei gesagt von der Schwefelsäure, wie denn überhaupt in den Ausscheidungsprodukten der Tiere sich alle Elemente finden müssen, die für den Aufbau und die Ernährung des Phytoplanktons notwendig sind. Für die letztere ist möglicherweise die Form, in der sie bei den Tieren zur Ausscheidung gelangen, gleichgültig, so daß hier die Möglichkeit für außerordentlich komplizierte Wechselbeziehungen zwischen den einzelnen Vertretern des Phyto- und Zooplanktons vorliegt, welche bei der geographischen Verteilung der einzelnen Arten sehr wohl eine Rolle zu spielen vermag. Von einem Einblick in alle diese komplizierten Fragen sind wir noch außerordentlich weit entfernt.

Für die Diatomeen kommt als Nährstoff auch Kieselsäure in Betracht, die zum Aufbau der Schalen notwendig ist. RABEN (s. o. pag. 428) hat auch hiervon quantitative Bestimmungen ge-

1) BRANDT, die Produktionsbedingungen im Meere pag. 12; in Conseil Permanent etc., Rapport Vol. III Anlage D.

macht und dabei das Verhältnis von gelöster Kieselsäure zur Diatomeenkieselsänre berücksichtigt. Es zeigte sich, daß dieses Verhältnis während der Wucherungsperiode abnahm, nach deren Aufhören im Sommer bis zum Eintritt des zweiten Diatomeenmaximums zunahm, so daß also in dieser Zeit eine Anreicherung von gelöster Kieselsäure stattfindet. Dieser Umstand scheint mir durchaus dagegen zu sprechen, daß die Kieselsäure für die Diatomeen das Minimum darstellt. Wenn in den Sommermonaten eine Anreicherung bis zu einem relativ beträchtlichen Werte stattfindet, so beweist das, daß eben die Diatomeen in dieser Zeit die vorhandene Kieselsäure zu verwerten vermögen und zwar wahrscheinlich infolge eines Mangels an irgend einem anderen Nährstoff.

Wir kommen zum Schluß nun auch noch auf einen äußerst wichtigen Punkt zu sprechen, nämlich auf das Verhalten der Kohlensäure im Meerwasser. BRANDT sagt gelegentlich seiner Diskussionen, welcher der Nährstoffe sich im Minimum befinden könne, daß die Kohlensäure dabei nicht in Betracht kommen könne; denn wenn sie im Meerwasser auch in ziemlich geringen Mengen vorhanden ist — durchschnittlich enthält ein Liter 40—50 mgr. — so sei diese Konzentration doch noch bedeutend zu nennen im Vergleich zu derjenigen der atmosphärischen Luft. Dabei sind aber die Bindungsverhältnisse zu berücksichtigen. Darüber haben wir durch DITTMARS Untersuchungen Aufschuß erhalten[1]), seine Resultate lehrten, daß im Meerwasser die Basen sich im Verhältnis zu den starken Säuren im Überfluß befinden und das dieser Überfluß an Kohlensäure gebunden ist. Die Kohlensäuremenge ist nun stets größer als zur einfachen Bindung der Basen nötig wäre, von wenigen Ausnahmen abgesehen, aber kleiner als deren doppelte Bindung erfordern würde. Das Meerwasser enthält also in der Regel ein Gemisch von doppelt- und von einfachkohlensauren Salzen. Es fragt sich nun, wie sich in diesen die Assimilationsverhältnisse der Planktonpflanzen gestalten.

Über die Verwertung von Bikarbonaten in der Kohlensäureassimilation ist relativ wenig gearbeitet worden.[2]) Daß die Pflanzen imstande sind, die Kohlensäure dieser Salze zu verwerten,

1) DITTMAR l. c. pag. 103 ff.

2) PFEFFER Pflanzenphysiologie I pag. 314; CZAPEK, Biochemie der Pflanzen Bd. I (1904) pag. 420 f.

ist zuerst von RASPAIL angegeben worden, später von anderen Forschern bestätigt und zuletzt von HASSAK[1]) durch exakte Versuche nachgewiesen worden. HASSAK fand u. a., daß nach 12tägiger Assimilation Ellodäa 40% und Ceratophyllum 76% der leichtgebundenen Kohlensäure in der Assimilation reduziert hatten. HASSAK, der bei seinen Untersuchungen andere Gesichtspunkte im Auge hatte, verfolgte die Frage nicht weiter und stellte nicht fest, ob die gefundenen Werte etwa die Grenze darstellten, bis zu welcher die Verwertung der locker gebundenen Kohlensäure überhaupt möglich sei. In Anbetracht der Wichtigkeit dieser Frage für die Biologie des Phytoplanktons habe ich diese Untersuchung aufgenommen, wobei sich, wie nicht anders zu erwarten war, recht komplizierte Verhältnisse ergaben; immerhin kann ich schon einiges von meinen Versuchsergebnissen mitteilen, das für unsere Betrachtungen nicht ohne Interesse ist.

Ich arbeite zunächst mit Süßwasserpflanzen aus rein methodischen Rücksichten. Es ist wohl zu erwarten, daß die spätere Nachuntersuchung mit Meeresalgen im Prinzip entsprechende Resultate geben wird. Untersucht man die Assimilation von verschiedenen Wasserpflanzen, wie Elodea oder Cabomba in 0,05% und 0,1%igen Natriumbikarbonatlösungen, so kann man in beiden lebhafte Blasenausscheidungen beobachten. Fügt man zur 0,05%igen Lösung eine äquivalente Lösung von Natriumkarbonat hinzu, so wird die Assimilation sistiert, um beim Ersatz dieser Flüssigkeit durch eine der reinen Bikarbonatlösungen sofort aufs neue zu beginnen. Der Zusatz des Karbonats übt also eine hemmende Wirkung auf den Assimilationsprozeß aus, und wir entnehmen aus dem Versuch, daß die betreffende Pflanze von der locker gebundenen Kohlensäure des Bikarbonats nur einen bestimmten Bruchteil hätte verwerten können: dann wäre die Hemmung durch das entstehende Karbonat von selbst eingetreten.

Schon diese eine Tatsache ist für uns von Wichtigkeit. Es geht nämlich daraus hervor, daß für die Ernährung des Phytoplanktons es keineswegs alleine auf die Menge der Kohlensäure ankommt, sondern auf deren Bindungsweise. Diese wird aber nun genau wie im Versuch, so auch im offenen Meere durch die

1) HASSAK in Untersuchungen a. d. Tübinger botan. Institut Bd. II (1888) pag. 465ff.

Pflanzen selbst verändert. Der erste, der auf diese Verhältnisse aufmerksam gemacht hat, ist Pettersson. Er fand bei seinen Untersuchungen in der Ostsee an manchen Stellen Hand in Hand mit einem auffallend niedrigen Kohlensäuregehalt eine Übersättigung an Sauerstoff und brachte diese Erscheinung mit der Tätigkeit pflanzlicher Organismen in Zusammenhang. Knudsen und Ostenfeld haben dann während der Ingolfexpedition diesen Gegenstand weiter verfolgt und dabei unter anderm gefunden, daß z. B. der Sauerstoffüberschuß des Oberflächenwassers in den Nachmittagsstunden größer ist als in den Morgenstunden; das Phytoplankton ist also sehr wohl imstande, durch seine Tätigkeit den Kohlensäuregehalt des Meerwassers merklich zu verändern. Stellen wir uns nun, um uns die Folgen dieser Erscheinung zu vergegenwärtigen, wiederum das abgeschlossene Meeresbecken vor, das uns schon mehrfach als Beispiel diente, so würde dann nach einer Periode der Winterruhe das sich entwickelnde Phytoplankton den Kohlensäuregehalt des Wassers bis in die Nähe der die Assimilation noch zulassenden Grenze herabsetzen. Die weitere Assimilationstätigkeit wäre dann von der Kohlensäurezufuhr abhängig. Dafür bestanden zunächst zwei Quellen, als erste die Atmungstätigkeit der übrigen Planktonorganismen derselben Schicht, als zweite die Diffusion von unten her und die Absorption aus der Luft, die, wie wir noch ausführlicher sehen werden, bei der Erreichung eines bestimmten Alkaleszenzgrades eintreten wird. Aber auch diese letzte Quelle wird nur beschränkt sein in Anbetracht dessen, daß namentlich bei intensiver Beleuchtung eine lebhafte Assimilation sich bis in einige Tiefe erstrecken kann. Es wird also ein stationärer Zustand erreicht werden, in welchem nur dasjenige Verwertung finden kann, was an Kohlensäure durch die bezeichneten Vorgänge entsteht oder zugeführt wird. Wir sehen also, daß in diesem Falle ein Strom von Tiefenwasser, das ja infolge der vorwiegenden Zersetzung organischer Substanz stets kohlensäurereicher ist, die Assimilation aufs neue befördern wird. So sehen wir denn, daß trotz des relativ hohen Kohlensäuregehalts im Meere unter Umständen dennoch eine Herabsetzung der Assimilation eintreten kann, die durch vertikale Durchmischung des Wassers aufgehoben wird.

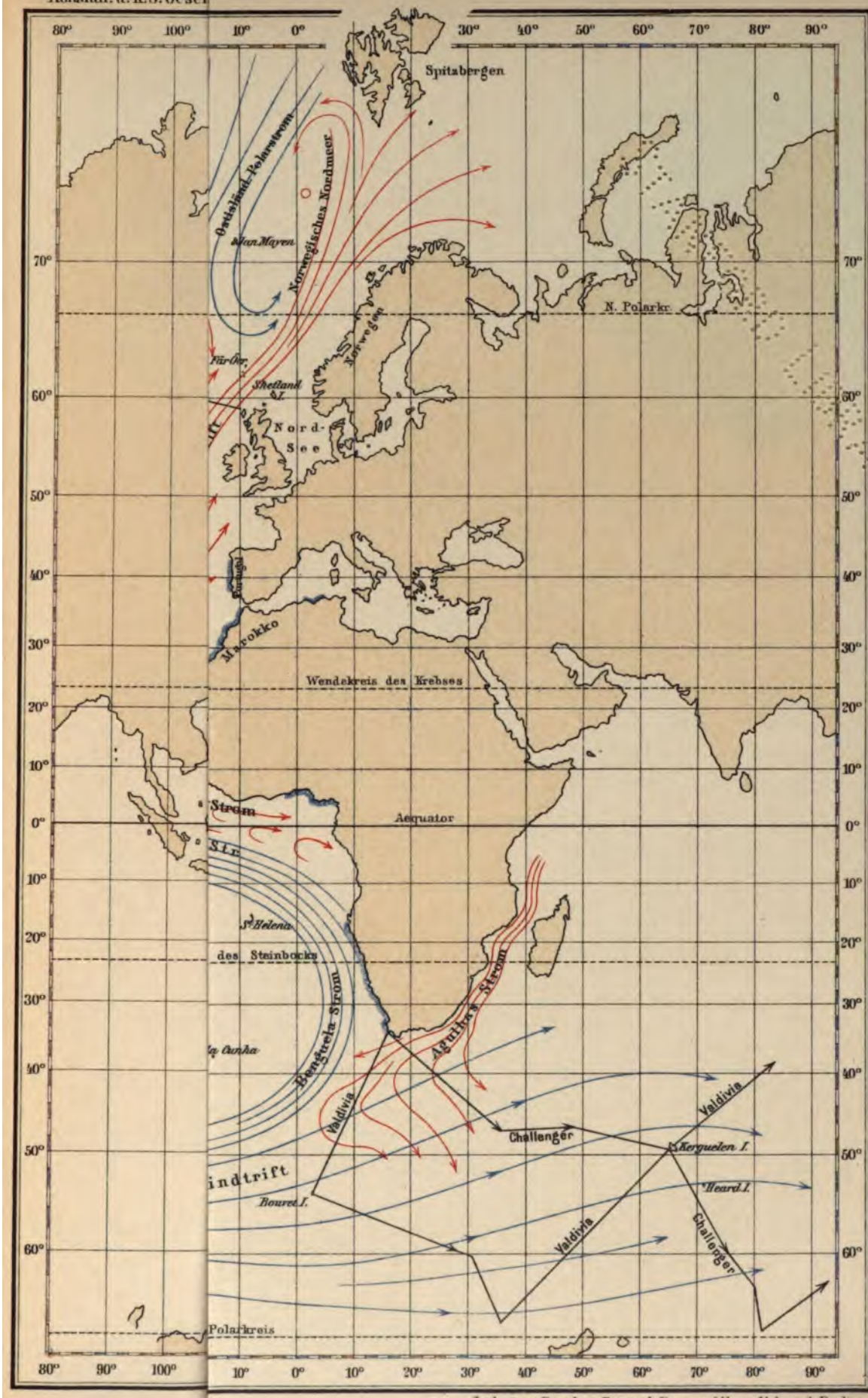
Es fragt sich nun, worauf die hemmende Wirkung des Karbonats beruht. Um die Frage zu entscheiden, haben wir uns

zu vergegenwärtigen, was für Veränderungen in der Lösung durch Hinzufügen oder durch die allmähliche Entstehung des Karbonats hervorgerufen werden, und wir werden dabei sehen, daß für unsere meeresbiologischen Schlußfolgerungen dieses Problem durchaus nicht belanglos ist. In erster Linie würden wir geneigt sein, die Wirkung der Alkalikarbonatlösung auf die in ihr enthaltenen OH-Ionen zurückzuführen. Wir könnten uns wohl denken, daß diese bei einer gewissen Konzentration die Assimilation hemmen und schließlich völlig sistieren. Es ist aber noch eine andere Möglichkeit vorhanden. Wie KROGH[1]) und vor ihm schon HAMBERG gezeigt haben, besitzt eine Bikarbonatlösung einen bestimmten Kohlensäuredruck, d. h. es ist infolge der Hydrolyse des Salzes eine gewisse Menge freier Kohlensäure vorhanden. KROGH hat diese Verhältnisse vom theoretischen Standpunkte und unter Berücksichtigung der Zusammensetzung des Meerwassers entwickelt und diese Entwicklung experimentell nachgeprüft. Es zeigt sich dabei, daß, wie von vornherein zu erwarten ist, der Zusatz von Karbonat zur Bikarbonatlösung die Kohlensäurespannung stark deprimiert. Es fragt sich nun, ob die Zufuhr von OH-Ionen oder die Depression der Kohlensäurespannung für die Herabsetzung der Assimilation durch Karbonatlösungen verantwortlich zu machen sind. Ich glaube schon jetzt sagen zu dürfen, daß der letztere Punkt jedenfalls bei weitem mehr ins Gewicht fällt. Das Prinzip der Versuche, deren Komplikationen ich hier nicht beschreiben will, beruht auf folgendem: es wird zunächst die Assimilation in einer 0,05 prozentigen mit der in einer wesentlich stärkeren z. B. 0,2 prozentigen reinen Bikarbonatlösung verglichen und dann untersucht, wie viel Karbonat jeder Lösung zuzusetzen ist, um gerade die Sistierung der nachweislichen Assimilation herbeizuführen. Käme es nun auf die Konzentration der OH-Ionen an, so wird die betreffende Menge eine andere sein, als wenn die Depression der Kohlensäurespannung in Betracht kommt. Die Versuche sprechen nun, wie ich bei einer späteren Besprechung ausführlich darlegen werde, für die letztere Alternative; es scheint aus ihnen hervorzugehen, daß für die Assimilation nur die gasförmige, gelöste Kohlensäure in Betracht kommt und die Ionen dabei direkt keine Verwertung finden. Daß die gesamten Verhältnisse der dabei

1) KROGH, Meddelelser om Grønland Bd. 26 pag. 333 ff.

stattfindenden Stoffaufnahmen äußerst komplizierte sind, will ich hier nur andeuten.

Die Lösung dieser Frage ist deshalb für die Biologie des Planktons von Bedeutung, weil die Verteilung der Kohlensäure in den verschiedenen Meeresteilen ungleichmäßig ist. Schlössing hat zuerst auf die von uns schon berührte Tatsache hingewiesen, daß zwischen Atmosphäre und Ozean ein Austausch von Kohlensäure stattfinden muß, der regulierend auf den Kohlensäuregehalt der Luft wirkt. Nun hat die Luft in allen Breiten annähernd den gleichen Kohlensäuregehalt, und darum muß auch der Kohlensäuredruck des Meereswassers überall nach diesem Werte konvergieren. Nun entspricht aber diesem Drucke bei verschiedener Temperatur ein verschiedenes Verhältnis von Bikarbonat und Karbonat, eine Tatsache, auf die Dittmar bei Besprechung seiner Ergebnisse hinweist und deren Folgen er auch in ihnen wiederfindet. Je höher die Temperatur ist, umso weniger Bikarbonat braucht das Meerwasser im Verhältnis zum Karbonat zu enthalten, um einen bestimmten Kohlensäuredruck zu besitzen, daher sind auch die warmen Meere absolut kohlensäureärmer, als die kalten, sie besitzen also bei geringerem Gehalt die gleiche Tension. Dieser Umstand muß auf die Verteilung des Phytoplanktons in ganz anderer Weise einwirken, wenn bei der Hemmung der Kohlensäureassimilation die OH-Ionen-Konzentration maßgebend ist, als wenn es lediglich auf die Kohlensäurespannung ankommt. Die letztere konvergiert überall nach dem gleichen Werte, die erstere ist in den verschiedenen Meeresteilen außerordentlich verschieden. Daß es noch jahrelanger Arbeit bedürfen wird, um die Beeinflussung der Planktonproduktion durch diese Faktoren zu ermitteln, ergibt sich bei der Kompliziertheit dieser Aufgabe von selbst.



Lithogr. u. Druck v. Dietrich Reimer (Ernst Vohsen) Berlin

DIE GESCHWINDIGKEIT DER RÖNTGENSTRAHLEN

EXPERIMENTALUNTERSUCHUNG

VON

ERICH MARX

DES XXIX. BANDES
DER ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
N° VI

MIT 6 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1906

Vorgetragen für die Abhandlungen am 26. Februar 1906.
Das Manuskript eingeliefert am 13. März 1906.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 5. April 1906.

DIE GESCHWINDIGKEIT DER RÖNTGENSTRAHLEN

EXPERIMENTALUNTERSUCHUNG

VON

ERICH MARX

Abhandl. d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch., math.-phys. Kl. XXIX. VI.

I.

Vorwort.

Seit Entdeckung der Röntgenstrahlen im Jahre 1895 sind die Bemühungen der Experimentalphysiker wiederholt darauf gerichtet worden, die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen zu bestimmen.[1]) —

Die Theorie die sich über die Natur der Strahlung herausgebildet hat, setzt für die Strahlen Lichtgeschwindigkeit voraus. Sie nimmt an, daß die Röntgenstrahlen in einer Folge unabhängiger Pulsationen des Äthers bestehen, die von den Punkten ausgehen, wo die der Kathode enteilenden Teilchen die Antikathode treffen. Die dieser Ätherstoß-Theorie zugrunde liegende Hypothese, die WIECHERT[2])-STOKESsche[3]) Hypothese, konnte bisher nur an einer positiven Eigenschaft der Röntgenstrahlen, der als Beugung gedeuteten, von den Herren HAGA und WIND[4]) entdeckten, Erscheinung, geprüft werden. Herr SOMMERFELD[5]) und Herr WIND[6]) zeigten, daß über den qualitativen Verlauf des Beugungsbildes durch die Theorie Rechenschaft gegeben wird, und daß auch das Fehlen einer Polarisation und Refraktion im Einklang mit der Ätherstoß-Theorie ist. Ist hierdurch die Berechtigung der Hypothese auch wesentlich gestützt,[7]) so liegt doch der Kernpunkt ihrer Prüfung in der experimentellen Lösung des Geschwindigkeitsproblems. Erst der exakte Beweis der Identität der Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen mit der Lichtgeschwindigkeit konnte über die Zulässig-

1) BRUSCHES, c. R. 130. 960, 1900; BLONDLOT, c. R. 135, 666. 1900.

2) E. WIECHERT, Abh. d. phys. Ges. Königsberg u. WIED. Ann. 59. 1896.

3) GEORGE STOKES, Proc. of the Cambridge phil. Soc. 9. 125. 1896.

4) HAGA und WIND, Phys. Z. 1. 91. 1899. 2. p. 292. 1901. WIED. 68. p. 884. 1899.

5) SOMMERFELD, Phys. Z. 1, 105, 1899; 2, 55, 1900; 2, 88, 1900.

6) WIND, Phys. Z. 2. 292. 1901.

7) Vergl. auch J. J. THOMSON. Phil. Mag. 45. 17[illegible]

keit der Grundlage der Vorstellungen von der Natur der Röntgenstrahlen entscheiden.

Zweck der in Folgendem mitgeteilten experimentellen Untersuchung ist es, die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen zu bestimmen und die verwendete Methode unter möglichster Variation der Versuchsbedingungen bis zur Grenze der Genauigkeit zu treiben, die durch eine in technischer Hinsicht möglichst vollkommene Apparatur heute erreichbar erscheint. Einen vorläufigen Bericht über den induktiven Gang der Untersuchung und den Verwendungsbereich der Methode habe ich, ohne Angabe von Zahlenmaterial, auf der *Naturforscherversammlung in Meran* im September 1905 gegeben[1]). In Folgendem wird das Zahlenmaterial mitgeteilt und der exakte Beweis für die Richtigkeit des s. Z. vorgetragenen Endergebnisses mit der inzwischen vervollkommneten Methode geführt. Die Untersuchung wurde im Leipziger Physikalischen Institut ausgeführt. Herrn Prof. Dr. WIENER habe ich es zu danken, daß mir die beträchtlichen Mittel, welche diese Untersuchung erforderte, bei jahrelanger Verfolgung des Problems und wiederholten vergeblichen Anläufen, bis zur Durchführung zur Verfügung standen. Beide Direktoren der hiesigen Physikalischen Institute, sowohl Herr WIENER als Herr DES COUDRES haben den Fortgang der Untersuchung durch das entgegengebrachte Interesse aufs Dankenswerteste unterstützt. Die zum Schlusse der Arbeit angeführten Messungen, wurden von mir z. T. objektiv vor größerem Auditorium demonstriert, auch sind sie mit der subjektiven Ablesung von verschiedener Seite wiederholt und quantitativ bestätigt worden[2]).

II.

Das Meßprinzip.

Die Methode beruht auf dem Vergleich der Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen mit der Lichtgeschwindigkeit.

Es sind 2 Eigenschaften, die von den Röntgenstrahlen ausgelöst werden, welche bei der Methode als wesentlich in Betracht kommen.

---

1) E. MARX, Verh. d. D. Phys. Ges. VII. p. 302. 1905. Phys. Zeitschrift VI p. 768.

2) Vergl. z. B. l. c. p. 320 resp. p. 777.

Ad I die Fähigkeit der Röntgenstrahlen zu veranlassen, daß ein von ihnen getroffenes Platinblech, Kathodenstrahlen[1])[2]) emittiert. Ad II ihre Eigenschaft Gasreste zu ionisieren.

Die erste Wirkung der Röntgenstrahlen ist in so fern polarer Natur, als sie, bei der gewählten Experimentalanordnung, nur zur Beobachtung gelangt, wenn das, von den Röntgenstrahlen getroffene Platinblech unterhalb eines, von der Höhe des Vakuums abhängigen Potentials liegt[3]). Hat dagegen das Potential des Platinbleches zur Zeit des Auftreffens einen positiven Wert, der eine bestimmte Höhe übersteigt, so kommt die Wirkung I, die Kathodenstrahl-Emission nicht zur Beobachtung, während II, die Ionisation, bestehen bleibt. Alsdann wird also keine negative Strömung von der Elektrode fort, beobachtet, vielmehr zieht das Platinblech, vermöge seines hohen positiven Potentials die negativen Elektrizitätsträger, die der Wirkung II entstammen, an sich, vorausgesetzt, daß die Beweglichkeit derselben groß genug, die Dauer der positiven Ladung lang genug ist, um die Zurücklegung des Weges bis zum Platinblech zu ermöglichen. Ist dies erfüllt, so bleiben die Gasreste mit positiver Ladung zurück. — Es sei bemerkt, daß bei sehr niedrigen Drucken die Geschwindigkeit der negativen Elektrizitätsträger, die der Ionisation der Gasreste entstammen, in ihrer Größe der Elektronengeschwindigkeit nahe kommt.[4])

Diese mit I und II bezeichneten Eigenschaften der Röntgenstrahlen finden in folgendem Prinzip ihre Verwendung: (Fig. 1.). Zwei Entladungsröhren sind senkrecht übereinander angebracht. Die obere Röhre ist in den Schließungskreis der Kondensatoren

1) E. DORN, Abh. d. Math. Ges. Halle 22. p. 39. 1900. Lorentz-Jubelband. Arch. Nderl. p. 595. 1900.

2) CURIE u. SAGNAC, Journal de Physique [4] p. 13. 1902.

3) Anmerkung: Ich möchte ausdrücklich darauf hinweisen, daß es unrichtig wäre zu behaupten, daß die Wirkung I, für sich allein, polarer Natur ist; wie weiter unten auseinandergesetzt wird, ist man im Gegenteil zu der Annahme gezwungen, daß auch bis nahe an die höchsten positiven Potentiale, die hier in Betracht kommen, Elektronenemission bei Bestrahlung stattfindet, daß aber diese dann nicht elektrometrisch zur Beobachtung gelangt, wenn sie durch eine negative Strömung von der bestrahlten Elektrode fort, kompensiert, resp. überkompensiert wird, wie dies bei der hier zu beschreibenden Anordnung zutrifft. (Vergl. p. 447 und 452). Ob bei absolutem Vakuum eine elektrostatische Beeinflussung der durch Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen überhaupt möglich ist, ist bisher nicht mit Sicherheit zu bejahen. Untersuchungen hierüber sind im Gange.

4) LANGEVIN: Recherches sur les gaz ionisés. [illegible] Univ. Paris. 1902.

eines LECHERschen Systems geschaltet. Die Röhre sendet bei Erregung des Systems Röntgenstrahlen aus. Diese Röntgenstrahlen sind intermittierend; sie treten nur während der negativen Phase der elektrischen Schwingung an der Kathode auf, kommen also so oft pro Sekunde zur Emission, als Kathodenstrahlen, die von der Hohlspiegelkathode ausgehen, die Antikathode treffen. Die Emissionszahl ist demnach abhängig von der Periodenzahl des Schwingungskreises.

Angenommen die Emissionszahl sei identisch mit der Periodenzahl der kürzesten Schwingung, die im Schließungskreise pulsiert,

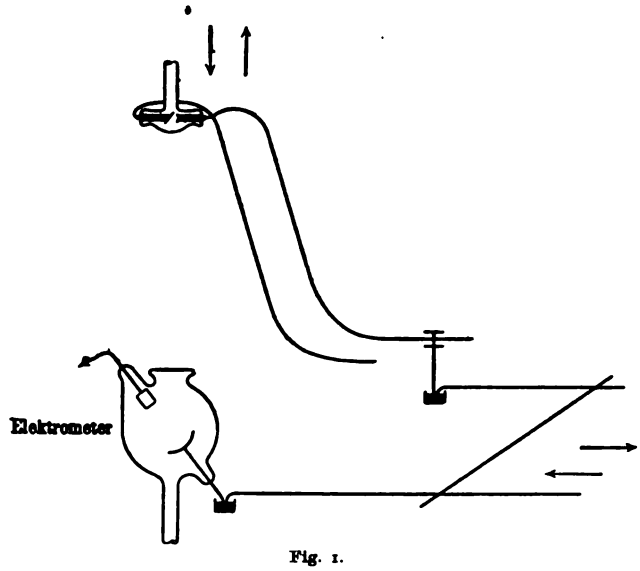


Fig. 1.

die Röhre sende also n Mal pro Sekunde Röntgenstrahlen aus, wenn n die Schwingungszahl der kürzesten Schwingung des Systems ist. Dann gelangen auch n Mal in der Sekunde Röntgenstrahlen, diese hinreichend durchdringend vorausgesetzt, in das zweite Entladungsgefäß, treffen dort Gasreste und gelangen zu der im Gefäß befindlichen Hohlspiegelkathode aus Platin.

Durch das Auftreffen der Strahlen auf das Platin wird der als I bezeichnete Effekt hervorgerufen: Es findet vom Platin Kathodenstrahl-Emission statt, die dann zur Beobachtung gelangt, wenn das Potential der bestrahlten Elektrode unterhalb eines, von der Höhe des Vakuums abhängigen Potentials liegt. Die Beobachtung erfolgt dadurch, daß die so erzeugten Kathodenstrahlen mit Hilfe eines Faradayzylinders aufgefangen und elektrometrisch gemessen werden. Diese Messung ist natürlich nur dann

möglich, wenn durch die ausgelösten Kathodenstrahlen auch eine Erhöhung des negativen Potentials des Elektrometers erfolgt. Dies ist aber nicht immer der Fall; denn wenn das Vakuum im Auffanggefäß nicht sehr beträchtlich ist, und wenn gleichzeitig ein starkes positives Feld an der bestrahlten Elektrode liegt, so tritt zweierlei ein. Erstens solche Verzögerung der dem Platin entstammenden Elektronen, daß ihre Geschwindigkeit zum Teil o wird, oder das Zeichen wechselt. Zweitens, eine dem Effekt II, der Ionisation der Gasreste, entstammende Strömung zur positiven Elektrode hin. Überwiegt die Anzahl, der aus dieser Strömung vom Faradayzylinder fort gezogenen negativen Elektrizitätsträger die zum Zylinder hingehenden, so kommt keine negative, sondern eine positive Ladung zur Beobachtung.

Wenn nun an der Elektrode, die bestrahlt wird, ein zwischen großen positiven und negativen Werten schwingendes Potential anliegt, und die Elektrode im gleichen Tempo, in welchem sie schwingt, bestrahlt wird, so wird, je nach dem Potential, das sie zur Zeit der auf sie treffenden Strahlung besitzt, entweder Elektronenemission zur Beobachtung gelangen, die das Elektrometer negativ lädt, oder es wird, falls die Elektrode positiv angetroffen wird, eine positive Ladung vom Elektrometer angezeigt werden. Ist der Abstand zwischen Röntgenröhre und Elektrode konstant, und ist die Frequenz-Gleichheit der Röntgenemission mit der bestrahlten Elektrode erfüllt, so wird diese von den Röntgenstrahlen ceteris paribus immer während derselben Teilschwingung des ganzen Schwingungsvorganges angetroffen. Liegt während der Bestrahlung ein hohes positives Potential an der Elektrode, so tritt eine positive Ladung des Faradayzylinders und Elektrometers als Folge des Effektes II auf; ist das Potential während der Bestrahlung negativ, so kommt Effekt I zur Beobachtung; das Elektrometer lädt sich negativ. Diese negative Ladung wird alsdann noch durch die in gleicher Richtung gehende Strömung, die dem Effekt II entstammt, unterstützt.

Dieses unterschiedliche Verhalten des elektrometrischen Ausschlags, je nach dem die in das Empfangsrohr gelangenden Röntgenstrahlen ein positives, oder ein negatives Potential antreffen, ist das wesentliche Reagens, welches bei der Geschwindigkeitsmessung zur Verwendung kommt.

Der Vergleich der Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen mit

der Lichtgeschwindigkeit erfolgt nun mit Hilfe einer Nullmethode, die durch das Schema der Figur 1 illustriert wird.

Über den Schließungsdraht des Lecherschen Systems, der zur Kathode im Röntgenrohr führt, ist ein kurzes Stück Isolierrohr geschoben, das eine Windung einer Drahtleitung trägt, die über eine auf geraden Drähten verstellbare Brücke hin, zur bestrahlten Elektrode führt. Die bestrahlte Elektrode ist so mit dem Lecherschen System gekoppelt. Durch die Koppelung wird erreicht, daß die bestrahlte Elektrode im gleichen Takt schwingt, wie die Kathode im Röntgenrohr. — Hat die Röntgenröhre eine konstante Entfernung von dem Auffanggefäß, so werden die Röntgenstrahlen einen Schwingungszustand an der bestrahlten Elektrode antreffen, der je nach der Stellung der verschiebbaren Brücke verschieden ist. Ist λ cm die Wellenlänge im Primärsystem und wird die Brücke um $\frac{\lambda}{2}$ cm von der Elektrode fort stetig verschoben, so wird nach der Brückenverschiebung von den Röntgenstrahlen ein Potential an der Elektrode angetroffen, das einem stetig sich veränderndem Schwingungszustande der erzeugenden Welle entspricht. Die Änderung ist bestimmt durch die Zeit, welche die Welle braucht, um $2 \cdot \frac{\lambda}{2}$ cm Drahtlänge zu durchlaufen. Da die Elektrizität längs geraden Drähten sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt, so ist der von den Röntgenstrahlen an der bestrahlten Elektrode angetroffene Schwingungszustand um die Zeit $\frac{\lambda}{c}$ von dem vor der Verschiebung angetroffenen verschieden. Auf diese Weise kann man durch Verstellung der Brücke erreichen, daß das von den Röntgenstrahlen an der Elektrode angetroffene Potential jeden Wert hat, der zwischen dem größten positiven und größten negativen Schwingungspotential liegt. Wird ein starkes positives Potential angetroffen, so zeigt das Elektrometer, das mit dem Faradayzylinder gegenüber der Elektrode verbunden ist, eine positive Ladung an, wird ein negatives Potential angetroffen, so lädt sich das Elektrometer negativ.

Wird die Brücke so gestellt, daß gerade weder eine positive noch eine negative Ladung des Elektrometers zu beobachten ist, daß also Nullstellung des Elektrometerausschlags eintritt, so wird eine Verschiebung der Röntgenröhre nach oben verursachen, daß die an der Elektrode ankommenden Röntgenstrahlen eine Verspätung erleiden. Die Verspätung ist gleich der Zeit, welche die Röntgenstrahlen brauchen, um die Verschiebungsstrecke zu durch-

laufen. Nach der Verschiebung treffen die Röntgenstrahlen, die vor derselben ein Potential der Elektrode antrafen, das den Elektrometerausschlag *o* veranlaßte, ein Potential an, das am Elektrometer einen von *o* verschiedenen Ausschlag veranlaßt. Um wieder Null zu erhalten, muß also das Elektrodenpotential um die gleiche Zeit verspätet werden, die der Röntgenstrahlverspätung entspricht; es muß also die Brücke von der Elektrode fort verschoben werden. Das Verhältnis der doppelten Brückenverschiebung zur Röntgenröhrenverschiebung ergibt alsdann das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit zur Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen.

III.

Die Grundlagen der Versuchsanordnung.

Im vorigen Kapitel wurden die Grundlagen der Methode erörtert. Es wurde das Meß-Prinzip unter vorläufiger Abstrahierung davon auseinandergesetzt, daß bei Durchführung der Methode neben den physikalischen Erscheinungen, die der Messung dienen, auch solche Effekte auftreten, die dem ideellen Prinzip nicht dienen. Nebenerscheinungen dieser Art brauchen auch dann nicht notwendig Fehlerquellen in sich zu schließen, wenn die benutzten Effekte in ihrer Stärke zum Teil Funktion der Nebenerscheinungen sind. Aber komplizieren werden sie in diesem Falle das ideelle Prinzip. Mit diesen Nebenerscheinungen wird sich im Wesentlichen Kap. VII beschäftigen. Hier sollen zunächst die Prinzipien erörtert werden, die für die Durchführung der Methode maßgebend waren, und es soll auf die Nebenerscheinungen nur so weit eingegangen werden, als durch sie die experimentellen Prinzipien und die Dimensionierung der Versuchsanordnung wesentlich beeinflußt wurden.

Das Problem der Messung der Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen ist, da die Wege mit dem Zirkel auf Bruchteile von Prozenten genau abgegriffen werden können, ein Problem der Zeitmessung. Es wird die Zeit gemessen, welche die Röntgenstrahlen brauchen, um eine gegebene Strecke zu durchlaufen. Die Messung erfolgt nach dem in Kap. II erörterten Prinzip in Lichtweg-Zeiten. Da nun die Zeit, welche die elektrischen Wellen für Durcheilung einer gegebenen Strecke brauchen, unabhängig ist von der Wellenlänge, so ist auch die Messung der Geschwindig-

keit der Röntgenstrahlen nach dem angegebenen Prinzip hiervon unabhängig. Solange die Verschiebung nur auf Strecken erfolgt, die gegen die halbe Wellenlänge klein sind, ist die Wellenlänge des Systems keine Konstante, deren Kenntnis erforderlich ist, und es ist alsdann der einzig wesentliche Parameter der Versuchsanordnung die Verschiebung. Hierin unterscheidet sich dieses Kompensationsverfahren vor der anderen sich hier bietenden Möglichkeit der Messung, die darin besteht, daß die bestrahlte Elektrode mit konstanter Drahtlänge mit dem primären Kreise gekoppelt wird, und die Röntgenröhre von der *o* Stellung bis zum Wiederantreffen der *o* Stellung, von der bestrahlten Elektrode fort, verschoben wird.

Bei Anwendung dieses Verfahrens ist für die Berechnung der Geschwindigkeit die genaue Kenntnis der Wellenlänge erforderlich; bei der Notwendigkeit mit Wellen von einigen Dezimetern $\frac{\lambda}{2}$ zu arbeiten, sind beträchtliche Verbiegungen des Kondensator-Schließungskreises resp. des Kopplungsdrahtes, also Änderungen der Selbstinduktion der Kreise nicht zu vermeiden. Alle diese Umstände tragen Fehlerquellen in sich, welche das Kompensationsverfahren nicht hat. Liegt bereits hierin ein Vorzug der Kompensationsmethode, so wäre hierdurch allein doch nicht die tatsächliche Größe der Überlegenheit dieses Verfahrens vor dem zuletzt diskutierten verständlich. Was hierfür wesentlich ist, sind Nebenerscheinungen, die bei dem Kompensationsverfahren, bei kleiner Verschiebung und geeigneter Dimensionierung unschädlich gemacht werden können, aber um so fühlbarer dort auftreten müssen, wo die Wellenlänge ein wesentlicher Parameter der Versuchsanordnung ist und wo die Verschiebung über beträchtlich größere Strecken als bei dem Kompensationsverfahren erfolgen muß.

Da in der Berücksichtigung dieser Nebenerscheinung der Kernpunkt für die Reinheit der Experimentalanordnung liegt, so wird diese Nebenerscheinung und ihr Einfluß zunächst eingehend diskutiert werden, wozu ein etwas weiteres Ausholen erforderlich ist.

Die Röntgenröhre, welche durch elektrische Schwingungen erregt wird, ist bei meiner Anordnung direkt in den Schließungsbogen der LECHERschen Kondensatoren geschaltet. In einem solchen Schließungsbogen ist niemals nur eine Schwingung vorhanden,

sondern mindestens zwei,[1])[2]) und bei intensiver Erregung meist noch die erste Oberschwingung von jeder dieser Grundschwingungen. [Vergl. Kap. IV]. Es ist wohl zu beachten, daß man längs der Drahtleitung eines LECHERschen Systems dann eine annähernd einheitliche Schwingung herausgreifen kann, wenn, bei ganz loser Kopplung,[3]) die erste Brücke geeignet gelegt und geerdet wird. Hinter der ersten Brücke ist dann eine einigermaßen einheitliche Schwingung, die bei intensiver Erregung eine Oberschwingung aufweist, möglich. Ist die Kopplung aber nicht ganz lose, so sind auch bei geerdeter Brücke, selbst bei völliger Gleichheit der Periode der Teilschwingungen des Systems, stets zwei resultierende Grundschwingungen vorhanden.[4]) Eine derartig lose Kopplung würde aber hier, wegen dem mit ihr verbundenen Mangel an Intensität, nicht brauchbar sein. Es sind also Schwingungen verschiedener Periode stets vorhanden, und diese müssen dann die Grundlage des Meßprinzips stören, wenn es nicht gelingt alle Schwingungen bis auf eine, für das Meßprinzip selbst auszuschalten.

Das Wesen des Meßprinzips liegt nun darin, daß durch die Verschiebung der Röhre, resp. der Brücke, bewirkt wird, daß nach der Verschiebung merklich andere Schwingungsphase der Meß-Schwingung an der bestrahlten, schwingenden Elektrode angetroffen wird als vorher. Daraus folgt, daß die Anordnung so getroffen werden muß, daß diese Grundbedingung merklicher Phasenverschiedenheit, infolge der Verschiebung, allein für die Meßschwingung erfüllt sein darf, nicht für die Nebenschwingungen. Das aber ist nur möglich, wenn die Nebenschwingungen groß gegen die Meßschwingungen sind. Also muß notwendig mit der kürzesten Schwingung des Systems gemessen werden, und diese muß soviel kleiner sein als die nächst längere Schwingung des Systems, daß eine Anordnung sich ermöglichen läßt, bei der die von der Nebenschwingung emittierten Röntgenstrahlen, über den ganzen Verschiebungsbereich hin, stets diejenige Phase ihrer gleichfrequenten Schwingung an der Elektrode antreffen, welche für die zur Beobachtung gelangende Elektronenemission einen Knoten darstellt. Oder mit andern Worten, es müssen im ganzen Ver-

1) J. v. GEITLER: [16] dieser Abh.
2) MAX WIEN: [16] dieser Abh.
3) E. MARX. WIED. Ann. 66. p. 414. 1898.
4) Vergl. z. B. M. ABRAHAM und FÖPPL. Theorie d. Electr. I. p. 298.

schiebungsbereich an der Empfangselektrode stets positive Potentiale der Nebenschwingung von den aus ihr herrührenden, bei negativer Phase erzeugten, Röntgenstrahlen angetroffen werden. Zwar wird durch diese Röntgenstrahlen ein Überwiegen des Effektes II im Gase erzeugt werden, indem das Gas ionisiert wird, und es wird infolge des zur Zeit der Ionisation vorhandenen positiven Nebenpotentials durch ihr Eintreffen ein Überwiegen der negativen Strömung zur bestrahlten Elektrode hin stattfinden; diese superponierte Strömung braucht aber die Schärfe der Nullpunkte der Meßschwingung nicht zu beeinträchtigen; sie wird bewirken, daß die Nullstellen des Elektrometerausschlags, die dadurch bestimmt sind, daß zum FARADAY-Zylinder gerade soviel negative Elektrizität hinfließt als von ihm wegfließt, so verschoben erscheinen, als wenn die nötige Stärke der Negativität des Potentials der kürzesten Schwingung noch nicht erreicht wäre, während dieses allein, ohne Nebenschwingung, schon für die Beobachtung der Elektronenemission ausreichen würde. Diese Verschiebung der Null ist aber nicht nur kein Nachteil, sondern sie ist, wenn sie durch eine über die ganze Verschiebung annähernd konstant fließende Strömung erzeugt wird,[1]) geradezu ein Vorteil. Denn durch diese Strömung wird die Negativität der Elektrometerausschläge reduziert, ohne es notwendig zu machen, durch Erhöhung des Gasdruckes den Effekt II zu verstärken, und den Effekt I abzuschwächen. Letzteres ist aus folgendem verständlich: Herr DORN[2]) und nachher Herr v. LIEBEN[3]) zeigten, daß die Geschwindigkeit der Sekundärstrahlung bei ungeladenem Metall etwa $^1/_3$ Lichtgeschwindigkeit ist, daß sie also beschleunigenden Kräften von etwa — 60 000 Volt äquivalent ist. Es wird deshalb stets, weit in das positive Gebiet der Welle hinein, Elektronenemission statthaben, nur wird sie bei der gewählten Experimentalanordnung dann nicht in Erscheinung treten, wenn die, auch bei hohem positivem Potential, zum FARADAY-Zylinder hineilenden Elektronenschwärme eine Kompensation resp. Überkompensation durch die

1) Anmerkung: Die Stärke der positiven Strömung die aus der Nebenschwingung resultiert, wird sich bei mäßiger Verschiebung, während der, der Nebenschwingung entstammenden Emission der Röntgenstrahlen, prozentuell nur unwesentlich ändern. Einmal weil von der größeren Nebenschwingung nur ein kleiner Teil Röntgen-Emission veranlaßt, und ferner weil für die Ionisation nahezu Sättigungspotentiale des Stromes vorhanden sind.

2) DORN l. c.

3) v. LIEBEN. Phys. Zeitschr. 4. 469. 1903; 5. 72. 1903.

negative Strömung erfahren, die als Folge der Ionisation zur bestrahlten positiven Elektrode hinfließt. Die hier als *o* beobachtete Elektrometerruhe entspricht, wie bereits wiederholt betont, tatsächlich einem beweglichen Gleichgewicht, das sich aus den Komponenten, der aus der Oberflächendissoziation und Volumdissoziation entspringenden, nach entgegengesetzten Richtungen hinfließenden, Strömungen herstellt. Wird die negative Strömung zur bestrahlten Elektrode hin unterdrückt, indem die Ionisation durch Entfernung der Gasreste beseitigt wird, so ist auf der ganzen Drahtleitung negativer Ausschlag, indem über das ganze positive Gebiet hin der Effekt I, ungeschwächt durch II, zur Beobachtung gelangt, woraus hervorgeht, daß bis zu den höchsten positiven Potentialen alsdann noch Elektronen emittiert werden. Wird dagegen der Effekt II, die Ionisation, verstärkt, indem mehr Gas in das Auffanggefäß eingelassen wird, so wird die negative Strömung zum FARADAY-Zylinder hin geschwächt und gleichzeitig die entgegengesetzte verstärkt, so daß die negativen Gebiete auf der Drahtleitung immer kürzer werden, und schließlich bei der Abnahme der Elektronenbeweglichkeit mit dem Druck nur noch die Nebenschwingungen zur Geltung kommen, so daß, wenn das Postulat der Knotenstellung der Nebenschwingung erfüllt ist, auf der ganzen Drahtleitung positiver Ausschlag beobachtet wird. [Vergl. Tabelle III pag. 35 und 37].

Würde die Entlastung des Elektrometers durch die negative Strömung zur bestrahlten Elektrode nicht durch die positiven Potentiale der langen Nebenschwingungen verstärkt, so müßte auch die Elektronenemission geschwächt werden, um wieder Gleichgewicht zu erhalten. Es würde also eine Schwächung beider Komponenten, die im Gleichgewicht sind, eintreten, was einem Unempfindlichermachen der Einstellung gleich käme.

Alle diese Überlegungen haben natürlich als Grundvoraussetzung, daß die Dimensionierung so getroffen wird, daß über den ganzen Verschiebungsbereich hin von den, von der Nebenschwingung erzeugten Röntgenstrahlen, lediglich positive Potentiale angetroffen werden. Die Erfüllbarkeit dieser Voraussetzung ist aber um so leichter möglich, je kleiner, einmal die Meßschwingung und dann die Verschiebung, gegen die halbe Wellenlänge der kürzesten Nebenschwingung ist. Bei der hier in Betracht kommenden Verwendung des Meßprinzips für die Geschwindigkeitsmessung der Röntgenstrahlen wird die Erfüllung dieser Voraussetzung noch dad

erleichtert, daß das Einsetzen der Röntgenstrahlung nicht so durch die absolute Höhe des negativen Potentials der Kathode, als durch den Potentialanstieg[1]) bedingt ist. Hierdurch wird, je länger die Welle ist, bei je späterem Potential Röntgenstrahlenemission eintreten [vergl. Kap. IV]. Tritt doch bei den Gasdrucken, bei denen das kleine Röntgenrohr Röntgenstrahlen durch kurze Hertzsche Wellen emittiert, für Tesla-Schwingungen keine Röntgenstrahlung auf. Bei Berechnung der Dimensionierung des Apparates ist diese prozentische Einengung des Emissionsgebietes der Schwingung bei zunehmender Wellenlänge mit zu berücksichtigen. Hierdurch wird das Innehalten des hier für Gültigkeit des Meßprinzips aufgestellten Postulats selbst bei beträchtlicher Verschiebung möglich. Dieses Postulat läßt sich kurz dahin zusammenfassen, daß man sagt: Der ganze Verschiebungsbereich auf dem Draht, resp. der Röhre, muß in bezug auf die bestrahlte Elektrode in einem relativen Knoten der zweitkürzesten Welle des schwingenden Systems liegen.

Ob aber dieses Postulat, das die Dimensionierung zu erfüllen hat, wirklich erreicht ist, ob die Messung also wirklich nur durch die kürzeste Schwingung des Systems bestimmt ist, dafür liefert schließlich die Messung selbst das untrüglichste Kriterium. *Es ist erfüllt, wenn auf der Drahtleitung scharfe Nullpunkte der kürzesten Schwingung sich bei der Brückenverschiebung ergeben.* Kommen mehrere Schwingungen für das Meßprinzip selbst in Betracht, so ist überhaupt keine scharfe Knotenlage auf dem Brückendrahte möglich. Wie die Dimensionierung bei dem verwendeten System getroffen wurde, um dieses Postulat zu erfüllen, wird in folgendem Kapitel erörtert.

Zum Schlusse dieses Kapitels sei es gestattet, auf den eingangs herangezogenen Vergleich der Kompensationsmethode mit der direkten Methode der Verschiebung von o bis o zurück zu greifen. Nicht in der Unsicherheit der genauen Kenntnis der bei der direkten Methode in die Rechnung eingehenden Wellenlänge der Meßschwingung, sondern im Wesentlichen in der geringen Verschiebung und der hierdurch eliminierbaren Wirkung der Nebenschwingungen, liegt die Anfangs erwähnte Überlegenheit des Kompensationsverfahrens über das direkte. Hätten wir letzteres Ver-

1) Th. Des Coudres: Verh. d. Phys. Ges. z. Berlin 14. 163. 1897.

fahren gewählt, so wäre dies in gewisser Analogie zu der berühmten Geschwindigkeitsmessung der Kathodenstrahlen von Herrn Wiechert nach der Des-Coudres-Wiechertschen[1])[2]) Methode gewesen. Bei Herrn Wiechert bestanden die ablenkenden Stromschleifen, in denen die Meßschwingung, deren Länge in die Rechnung einging, pulsierte, aus zwei Schließungsbögen der Lecherschen Kondensatoren (ohne geerdete Brücke). Zum Zwecke der Messung wurden diese Schließungsbögen auf große Strecken gegeneinander nach der direkten Methode verschoben. Die Berechnung des Geschwindigkeitswertes erfolgte alsdann, unter Zugrundelegung der Wellenlänge der einen der zwei oder mehr Grundschwingungen des Systems. Die erzielte Genauigkeit des Resultats der Zeitmessung betrug damals etwa 50% bei 350 cm Licht-Wegzeit. Bei der Messung der Röntgenstrahlengeschwindigkeit nach dem Kompensationsverfahren, waren etwa 50 Mal kleinere Zeiten zu messen, und es wurde für sie eine etwa 50 Mal größere Genauigkeit des Resultates erreicht.

IV.

Die Dimensionierung des Meßsystems.

Im vorigen Kapitel wurde für die Reinheit der Experimentalanordnung das Postulat erhalten, daß der ganze Verschiebungsbereich der Brücke, resp. der Röhre in bezug auf die bestrahlte Elektrode im (relativen) Knoten der zweitkürzesten Welle liegen muß. Um diesem Postulat bei der Dimensionierung des Meßsystems gerecht zu werden, ist die genaue Kenntnis der Schwingungen im Schließungskreis des Lecherschen Systems erforderlich.

Die Feststellung dieser Schwingungen geschah ohne irgend welche Änderung an dem Primärsystem, gegenüber seinem Zustande während der Messung. Es wurden die Drähte des Schließungsbogens, die aus einem Eisenkasten, welcher die Kondensatoren und die Wellenerregung enthielt, heraus zur Röntgenröhre geführt waren, in diesem Zustande belassen, und mit Hilfe eines Luftresonators (Vergl. Kap. V), der aus einer Parallelleitung oberhalb des Eisenkastens bestand, wurde die genaue Wellenlänge der im

1) E. Wiechert: Gött. Nachr. 1898. p. 290. Wied. Ann. 69. 739. 1899.
2) Th. Des Coudres: Verh. d. D. Phys. Ges. Berlin 14. 86. 1895.

System befindlichen Schwingungen bei der losesten Kopplung, welche noch die Beobachtung mit der Leuchtröhre zuließ, angestellt.

Hierbei wurden alle die Vorsichtsmaßregeln, welche die Methode, dank den Bemühungen des Herren DRUDE[1]), zu einer Präzisionsmethode ausgestaltet haben, sorgfältig beachtet.

Die Untersuchung erstreckte sich hierbei auf drei verschiedene Schwingungssysteme, mit welchen die definitiven Geschwindigkeitsmessungen ausgeführt wurden. Wenn auch die Wellenlänge kein wesentlicher Parameter der Versuchsanordnung ist, so erschien eine Änderung der Wellenverteilung und Wellenlänge bei den einzelnen Bestimmungen der Geschwindigkeitsmessung als geeigneter Variationsfaktor zur Prüfung der Versuchsanordnung. Diese drei verschiedenen Wellensysteme wurden durch Kapazitätsänderungen des schwingenden Systems erhalten, indem den Platten des Luftkondensators verschiedene Abstände erteilt wurden.

Folgende Tabelle ergibt das Resultat der Wellen-Messung; die angegebenen Zahlen sind Mittelwerte aus vielen Einstellungen.

Tabelle I.

Abhängigkeit der Schwingungen des geschlossenen Kondensatorkreises von dem Abstand der Kondensatorplatten.

	Platten-Entfernung	1te Grundschwingung $\frac{\lambda}{2}$	Nachweisbare zugehörige Oberschwingung $\frac{\lambda}{2}$	2te Grundschwingungen $\frac{\lambda}{2}$	Nachweisbare zugehörige Oberschwingung $\frac{\lambda}{2}$
A	2 cm	570 cm	190 cm	135 cm	45 cm
B	4 cm	523 cm	174,5 cm	140,5 cm	46,8 cm
C	6 cm	499 cm	166,5 cm	142,5 cm	47,5 cm

Auf den ersten Blick mag das Resultat paradox erscheinen. Die zweite Grundschwingung des Kondensatorkreises wächst mit abnehmender Kapazität, während die erste sich normal verhält. Dies aber ist genau das Verhalten, das für die zwei Grundschwingungen eines LECHERschen Systems auch von Herrn J. v. GEITLER[2]) experimentell erhalten und zuerst theoretisch begründet

1) P. DRUDE; DRUDES Ann. 9 p. 298 1902.

2) J. v. GEITLER, Sitzber. d. k. Ak. d. Wissensch. Wien. Math. naturw. Kl. CIV II. 1895. WIED. Ann. 55 p. 514. 57 p. 412. 1896, Kl. CVII Abt. II a Juli 1898. Vergl. auch M. WIEN. WIED. Ann. 65 p. 575, 1897.

wurde. Daß nur die ungradzahligen Oberschwingungen bei der Lecherschen Anordnung beobachtet werden können, ist des öfteren erwiesen, experimentell von Herrn Mazotto[1]) und Lamotte[2]), theoretisch durch Herrn Abraham[3]). Die hier erhaltenen Resultate sind aber vielleicht an sich, wegen der Größe der Präzision der Wellenmessung nicht uninteressant; sie ist einmal der Messung selbst mit dem von Herrn Drude ausgebildeten Verfahren, dann aber der verhältnismäßig außerordentlich großen Häufung der Zündungen der gedämpften Schwingungen des Lecherschen Kreises durch den geschlossenen Teslakreis zu danken. Hierdurch wird eine sehr geringe Kopplung des messenden Systems mit dem zu messenden notwendig. Es braucht nur ein kleiner Teil der schrägen Drähte des Resonators in etwa 30 cm Entfernung über dem Primärkreis sich zu befinden, und es lassen sich trotzdem mehrere Knoten der Oberschwingungen scharf abgreifen.

Nach der Tabelle I ist die kürzeste Schwingung, die im System mit Luftresonator und Leuchtröhre nachgewiesen werden kann, die Welle von 45 cm $\frac{\lambda}{2}$. Daß diese Schwingung auch die kürzeste ist, welche im Kreise Röntgenstrahlen erzeugt, das wird unabhängig in Kap. VII gezeigt werden. Hier handelt es sich zunächst darum, unter der Voraussetzung, daß sie es ist, zu entscheiden, wie die Dimensionierung zu treffen ist, damit die Anordnung dem eingangs aufgestellten Postulat gerecht wird. Hierzu wird, zunächst unbekümmert um die Meßschwingung, die zweit kürzeste Schwingung allein betrachtet werden.

Durch sie werden natürlich Röntgenstrahlen nur erzeugt während der Dauer ihrer negativen Phase, und die während dieser Dauer erzeugten Strahlen sollen an der bestrahlten Elektrode positive Phase der gleichfrequenten Schwingung antreffen. Bei der gewählten Anordnung ist über dem Kathodendraht der Röntgenröhre ein kleiner Kondensator angebracht, welcher die Kopplung der im Schließungsdraht pulsierenden Schwingung mit der bestrahlten Elektrode vermittelt. Durch diesen Kondensator wird die Phase im Kopplungsdraht gegenüber der des Schließungsdrahtes verschoben. Wäre ohne Kondensator abgezweigt worden,

1) Mazotto, Atti della R. Acc. delle Sc. d. Torino :
2) Lamotte. Wied. Ann. 65, p. 92, 1898.
3) M. Abraham. Wied. Ann. 66, p. 435, 1898.

so hätte die Drahtlänge, welche bis zur Elektrode eingeschaltet werden muß, damit die Röntgenstrahlen positive Phase antreffen um $\frac{\lambda}{2}$ länger genommen werden müssen, als dies bei dieser Anordnung der Fall ist. Bei der Dämpfung, welche die Meßschwingung notwendig besitzt, wäre eine direkte Abzweigung selbst dann nicht rationell, wenn sich bei direkter Verknüpfung eine Beeinflussung der Primärschwingung vermeiden ließe. So aber ist nur erforderlich, daß die Zeit, welche die, die Röntgenstrahlen erzeugende Energie braucht, um von der Kondensatorstelle auf dem Primärdrahte bis zur bestrahlten Elektrode zu gelangen, stets nahe gleich der Zeit ist, welche die Elektrizität bei direkter Verknüpfung brauchen würde, um zur gleichen Stelle zu gelangen, vermindert um die Voreilung φ der Phase beim Durchtritt durch den Kondensator. Sind diese Zeiten, die wir in ihnen äquivalentem Lichtweg-Maß ausdrücken wollen, hiernach bemessen, so wird nicht die der Weggleichheit entsprechende identische Phase, sondern die umgekehrte Phase angetroffen. Die Verschiebungen, welche die genaue Null stören würden, müssen so klein sein, daß sie gegen die übrigen Längen nicht in Betracht kommen, eine Bedingung, die natürlich in sich eine sehr große Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen voraussetzt. Da aber diese Voraussetzung sich hier nur auf Gewinnung eines Anhaltes der Dimensionierung bezieht, und sich, falls sie falsch ist, durch das Ergebnis zu erkennen gibt, so liegt in ihrer vorläufigen Annahme keine Vorentscheidung oder Beeinflussung des Meßergebnisses. Denn wäre die Annahme, die wir über diese Geschwindigkeit machen, falsch, so würde sie sich in einer Störung durch die Nebenschwingung, also in der Unmöglichkeit, scharfe Knotenlagen der Meßschwingung auf dem Brückendraht zu erhalten, nachträglich zu erkennen geben. Bei Aufstellung der Zeitgleichung ist, wie bereits im vorigen Kap. betont wurde, zu berücksichtigen, daß die Röntgenstrahlung erst einsetzt, wenn der negative Potentialwert der Schwingung der Kathode im Röntgenrohre eine beträchtliche Höhe, die vom Gradienten abhängt, erreicht hat, daß sie aber, nachdem sie einmal eingesetzt ist, bei späterem Potential wieder abreißt als sie einsetzte.[1])

Zunächst werde die Zeit berechnet, welche die Energie von

1) TH. Des Coudres. l. c.

der Transformatorstelle des Primärdrahtes aus braucht, bis sie als Röntgenstrahlung an der bestrahlten Elektrode ankommt. Diese Zeit wird in Lichtweg-Maß ausgedrückt werden, und es wird, wie erwähnt, für die Berechnung der Dimensionierung einstweilen angenommen, daß die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Die Röhrenstellung sei eine für die Experimente sich als Mittelstellung der Verschiebung ergebende Röhrenentfernung von 10 cm vom Fenster. Dann braucht die Energie, falls der Anfang der Zählung mit dem Potential *o* an der Abzweigungsstelle zusammenfällt, bis sie zuerst als Röntgenstrahlung an der bestrahlten Elektrode ankommt, eine Zeit, die sich aus folgenden Komponenten zusammensetzt.

45	cm	Primärdraht	45	cm	Lichtweg-Zeit
+ 3	mm	Kathodenstrahlweg	1	cm	„
+ 0,5	cm	Weg der R.-Str. von der Antikathode bis z. Glas. . . .	0,5	cm	„
+ 10	cm	Abstand v. Fenster. . . .	10	cm	„
+ 7,5	cm	Entfernung d. Fensters von d. bestr. Elektrode	7,5	cm	„
+ 50	cm	Potential-Anstiegs-Strecke im Röntgenrohr	50,0	cm	„
			114	cm	Lichtweg-Zeit

Um im relativen Knoten der Elektronenemission dieser Welle an der Elektrode zu bleiben, ist demnach erforderlich, daß der kürzeste Weg vom Transformator über die Brückendrähte etwa gleich 114 cm $+ \frac{\lambda}{2} - \varphi$ ist. Dann wird positives Potential angetroffen und dieses muß dann auch fernerhin über die ganze Verschiebung, die maximal im Apparat vorgenommen werden kann, angetroffen werden. Nehmen wir an, daß die nach etwa 50 cm Lichtweg-Zeit, der Dauer der negativen Phase, einsetzende Röntgenstrahlung zu einer Zeit abbricht, die 40 cm vor der Phasenumkehr liegt, so gehen während $135 - 90 = 45$ cm Lichtweg-Zeit, Röntgenstrahlen aus. Diese während 45 cm Lichtweg-Zeit ausgehende Röntgenstrahlung, soll nun, bei der kürzesten Brückenstellung, noch gerade den äußersten Bereich positiver Phase der 135 cm Welle erreichen, um zu bewirken, daß bei Verlängerung der Sekundärdrähte um 90 cm immer noch positive Phase angetroffen wird. Wäre die Leitung (ohne störende Selbstinduktion voraus-

gesetzt) um 50 cm kürzer als die eben berechnete, so wäre, um dieses Postulat zu erfüllen, bei direkter Verknüpfung eine Hinzuschaltung von 135 cm nötig, so aber ist für die ganze Leitung nur $114 - 50 + (135 - \varphi)$ cm erforderlich. Die Phasenverschiebung φ ist leicht sehr angenähert anzugeben. Der Ohmsche Widerstand der Sekundärleitung ist für diese Frequenz etwa 10 Ohm; die Frequenz selbst etwa $6 \cdot 10^8$, und der kleine Kondensator hat etwa $\frac{1}{2}$ cm [Elektrost. Einheiten] Kapazität. Diese Daten ergeben die Phasenverschiebung zu etwa $\frac{\pi}{4}$. Infolgedessen kann die Länge der Sekundärleitung etwa zwischen 131,5 und 221,5 cm variabel sein. Die tatsächlichen Dimensionen im Apparate waren folgende:

Von dem Transformatorröhrchen bis zum ersten Quecksilbernäpfchen	12 cm
Kürzeste Brückenstellung, die im Apparat möglich ist, (290 der Skala) bis zur Brücke	14 cm
Brücke	23 cm
Von hier zum zweiten Quecksilbernäpfchen	14 cm
Zur Elektrode	50 cm
	113 cm

Die äußerste Stellung der Brücke, die überhaupt möglich ist, ist nun bei 805 der Skala, demnach 103 cm hinter dem Anfang: also ist die Sekundärleitung von 113 bis 216 cm variabel, während sie nach unserer Überschlagsrechnung von 135 cm bis 225 cm variabel sein dürfte. Demnach trifft die Röntgenstrahlung der zweitkürzesten Welle mit sehr großer Annäherung in positives Gebiet der zugehörigen Welle auf der ganzen überhaupt möglichen Verschiebung. Die hierbei angenommene Dauer der Röntgenemission mit 45 cm Lichtweg-Zeit ist wahrscheinlich zu hoch gegriffen. Denn bei dem großen Druck im Röntgenrohr, der für die kürzeste Welle reguliert ist, werden wesentlich längere Wellen erst bei sehr hohem Anstieg Kathodenstrahlen und hierdurch Röntgenstrahlen erzeugen. Würde aber der Zeitpunkt des Einsetzens später erfolgen, als hier angenommen ist, so würde sich hierdurch der zulässige Verschiebungsbereich vergrößern.

Da demnach bei dieser Dimensionierung für die zweitlängste Welle des Systems im ganzen Apparat das Postulat der Knotenstellung als sicherlich sehr nahe erfüllt, betrachtet werden kann,

so ist es à fortiori für diejenigen Verschiebungen erfüllt, welche die eigentliche Messung der Geschwindigkeit erfordert, die ja im Maximum $^1/_8$ der ganzen zulässigen und möglichen Verschiebung beträgt, und es ist auch für alle zusammengehörigen längeren Wellen für sich genommen im System erfüllt, soweit diese überhaupt wegen ihres geringeren Potentialgradienten zur Erzeugung von Röntgenstrahlen bei dem hohen Drucke im Röntgenrohr noch fähig sind, indem, wie schon erwähnt, das Emissionsgebiet mit zunehmender Wellenlänge bei dem hohen Drucke immer mehr abnimmt, und die äußerst intensiven Schwingungen des Teslakreises überhaupt keine Röntgenstrahlen in dem Rohr erzeugen, welches bei Speisung mit kurzen Herzschen Wellen noch auf 20 cm Entfernung lebhafte Fluoreszens auf dem Bariumplatincyanyrschirm erzeugt. Wenn nun auch die hier geforderte Knotenstellung bei der gewählten Dimensionierung für die zusammengehörigen Paare der Schwingungen erfüllt ist, so ist dies noch nicht für die nicht zusammengehörigen Schwingungen erwiesen. Es ist zu untersuchen, ob nicht auf der maximalen für die 135 cm Welle selbst zulässigen Verschiebung von den durch die 190 cm Welle erzeugten Röntgenstrahlen, negatives Gebiet der 135 cm Welle angetroffen wird.

Machen wir die Annahme, daß die 190 cm Welle auf eine gleiche Strecke wie die 135 cm Welle Strahlen emittiere, also etwa 20 cm vor dem Kulminationspunkt des Potentials die Emission einsetze und 25 cm hinter ihm abbreche, so werden Röntgenstrahlen während 25 cm Lichtweg-Zeit länger von der Röhre emittiert als der Emission der 135 cm Welle entspräche, alsdann würde bei der äußersten hier für die 135 cm Welle geschätzten, zulässigen Verschiebung von 225 cm, von dieser Röntgenstrahlung schon negatives Gebiet der 135 cm Welle bei den letzten 8 cm der möglichen Brückenverschiebung getroffen. Es wäre demnach die maximale Verschiebung bei der engsten Kopplung nicht mehr ganz so weit zulässig, als sich hier ergeben hatte; bei der losesten Kopplung des schwingenden Systems wäre die zulässige Verschiebung unter gleichen Annahmen wieder größer als bei der engsten; sie würde sich nur 3 cm kürzer als die oben angegebene ergeben. Hier ist aber zu bedenken, daß die angetroffene, gerade beginnende negative Phase der 135 cm Welle, von starken positiven Potentialen der 190 cm Welle so überdeckt ist, daß eine Abnahme der negativen Strömung zur bestrahlten

Elektrode hin, wohl sicherlich erst in einem Stadium der Negativität der 135 cm Welle einsetzen kann, das weit hinter dem noch gerade angetroffenen liegt.

Es erübrigt sich, diese Betrachtungen auch auf die längsten Wellen des Systems auszudehnen, denn selbst wenn auch diese noch Röntgenstrahlen erzeugen würden, was bei dem hohen Drucke wohl kaum der Fall ist, so würde dies zu einer Zeit geschehen, wo die andern Wellen im wesentlichen bereits abgeklungen sind. Bevor aber diese, die Dimensionierung bestimmenden Überlegungen verlassen werden, ist noch auf den Einfluß, den die große Endkapazität, am Ende der Sekundärleitung hat, hinzuweisen. Die bestrahlte Elektrode bildet mit der gegenüber befindlichen Hülle des Faraday-Zylinders eine Kondensatorkapazität von solcher Größe, daß die elektrischen Wellen von den hier verwendeten Frequenzen mit nicht in Betracht kommender Schwächung den Kondensator passieren können. Wäre dies nicht der Fall, so würden Reflexionen an der Elektrode stattfinden, welche die Reinheit der Welle stören würden. So aber fließen die Wellen in die Erdleitung, ohne daß merkliche Störungen zu beobachten sind. Die beim Durchtritt der Wellen durch diesen Kondensator etwa stattfindende Phasenverschiebung braucht nicht diskutiert zu werden, da der Kapazitätswiderstand im Röntgenrohre von gleicher Größenordnung ist wie im Auffanggefäß.

Zum Schlusse sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Berechtigung dieser Überlegungen, welche die Dimensionierung des Apparates so gestalten sollten, daß die Experimentalanordnung von den Nebenschwingungen unabhängig wurde, erst durch das Experiment selbst erwiesen werden konnte. Wurde doch über die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen selbst die unbewiesene Annahme der Lichtgeschwindigkeit gemacht, um einen Anhaltspunkt für die Dimensionierung zu gewinnen. Die Entscheidung aber, daß diese Überlegungen zum Ziele führen, daß wirklich eine einzige, und zwar die kürzeste Schwingung des Systems die Röntgenemission und die der angekoppelten Elektrode bestimmt, kann einmal aus der Tatsache entnommen werden, daß bei höherem Druck im Auffanggefäß auf der ganzen Leitung positives Potential zur Beobachtung kommt, [Kap. III p. 13 und Kap. VI p. 35] und wird exakt durch den Nachweis bewiesen, daß erstens die Röntgenstrahlemission im Takt der kürzesten Schwingung er-

folgt, daß zweitens keine Eigenschwingung die Messung beeinflußt, und daß drittens scharfe Nullstellen der kürzesten Welle auf den Brückendrähten erweisbar sind. Dieser Nachweis wird in Kapitel VI erbracht werden. Das folgende Kapitel enthält die Beschreibung der Apparate.

V.

Die Apparate.

Röntgenrohr und Auffanggefäß sind in Fig. 2 in ihren wesentlichen Teilen in $^1/_2$ natürlicher Größe wiedergegeben. Die kleine Röntgen-

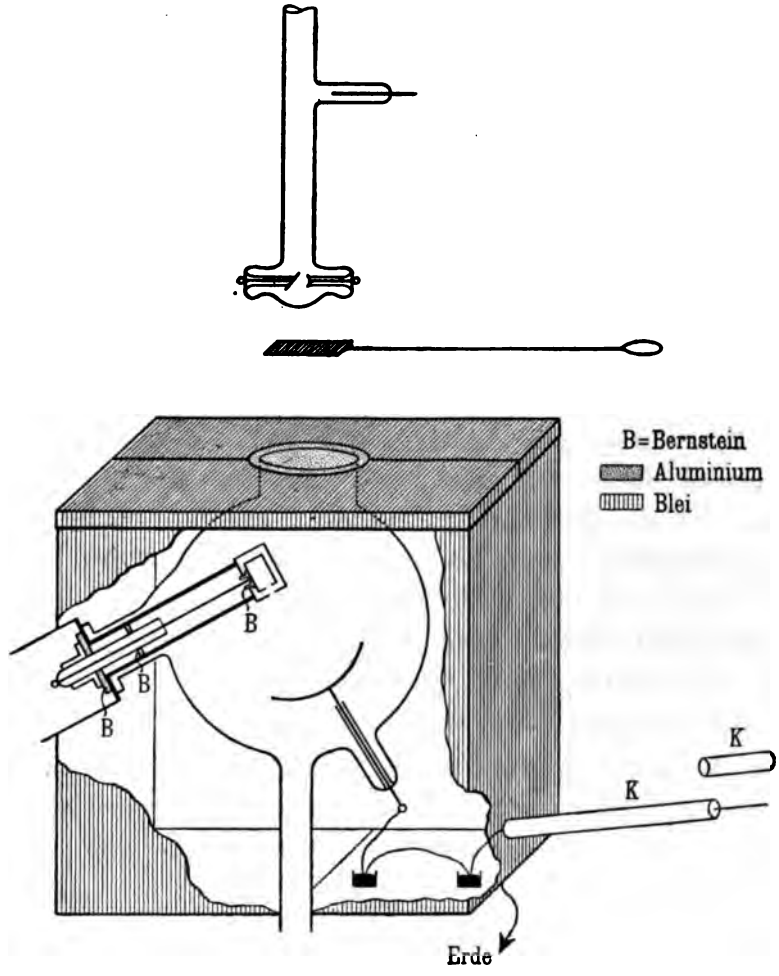


Fig. 2.

röhre hat 2 Platinelektroden die bis zu den Stirnflächen in Glas eingeschmolzen sind. Die Dimensionen gehen aus der Figur her-

vor. Zum Zwecke der Regeneration ist ein Palladiumröhrchen am seitlichen Ansatze angebracht. Bei den unten angeführten Messungen war diese Röhre an eine Glaskugel von 15 cm Durchmesser angeschmolzen (vergl. Fig. 5).

Die Kleinheit der Dimensionen der Röhre läßt die Schwingungen des primären Erregers durch diese ohne wesentliche Schwächung derselben hindurch. Mit dieser kleinen Röhre lassen sich die Knochen der Hand noch bei 25 cm Entfernung von der Röhre mit elektrischen Wellen von $\frac{\lambda}{2} = 45$ cm sichtbar machen. Der Druck im Rohre ist der Frequenz entsprechend außerordentlich hoch. Die Kleinheit des Widerstandes für die Schwingungen läßt sich dadurch erweisen, daß bei Messung der Wellenlänge des Systems mit Luftresonator und Leuchtröhre, kein wesentlicher Unterschied festgestellt werden kann, ob die Elektroden der Röhre metallisch kurzgeschlossen sind, oder nicht.

Das Auffanggefäß besteht aus einer Glaskugel mit 2 abgeschliffenen Ansätzen für das große Aluminiumfenster von 0,05 mm Dicke und 3 cm Durchmesser, und den Faradayzylinder. Der Faradayzylinder ist von seinem Inneren durch Bernsteinisolation vollkommen isoliert. Die äußere Hülle umgibt ihn als vollkommener Käfigschutz bis zum Elektrometer hin. Um dies zu erreichen, ist ein Messingring mit Außengewinde auf das äußere Rohr aufgelötet, und dieser mit Marineleim auf die geschliffene Fläche gekittet. Ist die Kittung fest, so wird ein weites Messingrohr, das die Zuleitung zum Elektrometer außerhalb des Vakuums schützen soll, auf die Platte aufgeschraubt. Der Abschluß nach außen geschieht durch einen großen Bernsteinring, durch Glasflausch und Glasrohr, deren Anordnung durch die Figur illustriert wird. Die Dichtung wird wieder mit Marineleim bewerkstelligt.

Die bestrahlte Elektrode besteht ganz aus Platin und ist Hochglanz poliert. Die Auffangröhre bleibt über einem Barometerverschluß an der KAHLBAUMpumpe. Die Pumpe wird mit einer WIENERschen Quecksilberturbine betrieben. Zur Vermeidung jeglicher Spur Feuchtigkeit wird das Rohr vor dem Aufstülpen auf den Barometerverschluß durch heiße Luft total getrocknet, und es wird nach einigem Pumpen durch Öffnung des Pumpenhahns aus dem Phosphorpentoxydgefäß der KAHLBAUMpumpe Phosphorpentoxyd durch das ganze Evacuationsrohr gestäubt, wobei Vorsicht

nötig ist, damit die Platinoberfläche nicht mit bestäubt wird. Vermeidung jeglicher Spur Feuchtigkeit ist für das Gelingen wesentlich. (Vergl. VIII).

Das Primärsystem (Fig. 3 und 4) besteht aus LECHERschen Kondensatoren aus Zinkblech. Es sind 4 Platten von 30×30 cm² Fläche. Die Funkenstrecke besteht aus Messingkugeln von 3 cm Φ, die an den Plattenpaaren mit Messingstäben befestigt, verstellbar

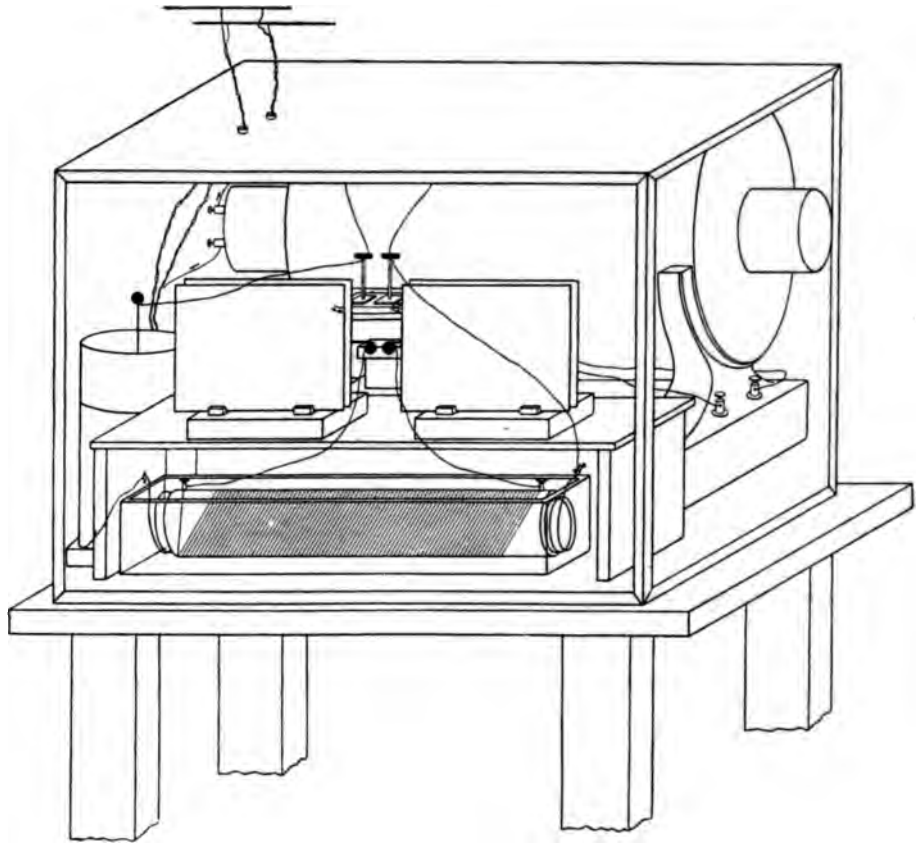


Fig. 3.

angebracht sind; sie spielt in Kaiseröl. Die Kautschuk isolierten 2 mm starken *Cu*-Drähte, die zur kleinen Röntgenröhre führen und mit dieser den Schließungsbogen der Kondensatoren bilden (Fig. 1) sind je 74 cm lang.

Die Erregung erfolgt durch geschlossenen, abgestimmten Kondensatorkreis, mit Öl-Tesla-Transformator (Fig. 3), und Leidner Flaschen. Das Induktorium ist ein Klingelfuß Induktor von 30 cm Schlagweite, der Unterbrecher ein LEVYscher Turbinenunterbrecher

für variable Stromstärke. Der Induktor wird mit maximalem Strom von 110 Volt Spannung betrieben. Die Sekundärrolle ist durch eine verstellbare Luftfunkenstrecke geschlossen. Die ganze Anordnung ist, wie die Figur 4 zeigt, in einem großen Eisenkasten montiert, dessen Türen allseitig herausgenommen werden können. Die Zuführungsdrähte zur Röntgenröhre werden durch die vordere Eisenwand hindurch, mehrfach durch dickwandige Glasröhren von ihr isoliert, aus dem Eisenkasten herausgeführt.

Der Resonator besteht aus 2 parallelen straff gespannten Drähten, von 2,5 cm Abstand. Die Drähte sind fest auf drei langen Maßstäben montiert; der mittelste ist, wie die Fig. 5 zeigt, im

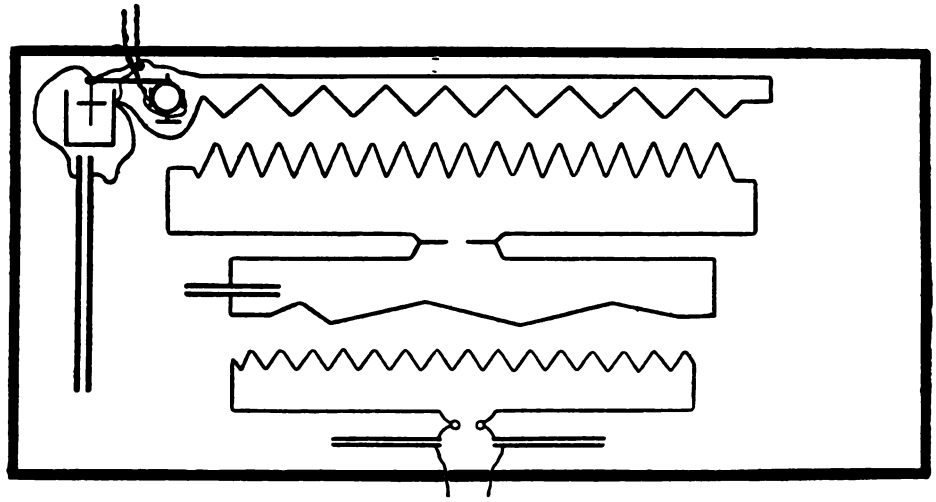


Fig. 4.

stumpfen $\sphericalangle$ gegen die beiden andern gestoßen. Das Gestell wird auf dem Eisenkasten zur Wellenmessung so befestigt, daß ein Teil der schrägen Leitung nahe den Zuführungsdrähten zur Röhre vorbei geht. Auf der Drahtleitung sind 2 Brücken verstellbar und eine Leuchtröhre dient als Indikator.

Die Sekundärleitung beginnt einige cm vom Eisenkasten entfernt. Hier ist über den Primärdraht, der zur Kathode führt, ein schmales Stück Isolierrohr von 1,5 cm innerer Weite angebracht; es ist unverrückbar auf dem Drahte befestigt; auf ihm befindet sich eine einzige Windung eines isolierten Guttaperchadrahtes von $^1/_2$ mm Φ. Dieser Guttaperchadraht führt zu einem 12 cm unter dem Primärdraht aufgestellten Glastischchen, auf welchem ein Quecksilbernäpfchen steht (Fig. 5). Hier endet der eine der 2 geraden Brückendrähte.

Diese sind 75 cm lang, 2 mm dick und liegen in einer Ebene, die gegen die Horizontalebene um etwa 30° geneigt ist. Die Drähte sind durch Ebonitstücke nahe ihrer Enden gehalten; sie haben eine senkrechte Entfernung von 20 cm. Die Brücke schleift auf ihnen derart, daß sich gegen die geraden Drähte auf beiden Seiten kleine *Cu*-Federn andrücken, welche sicheren Kontakt gewähr-

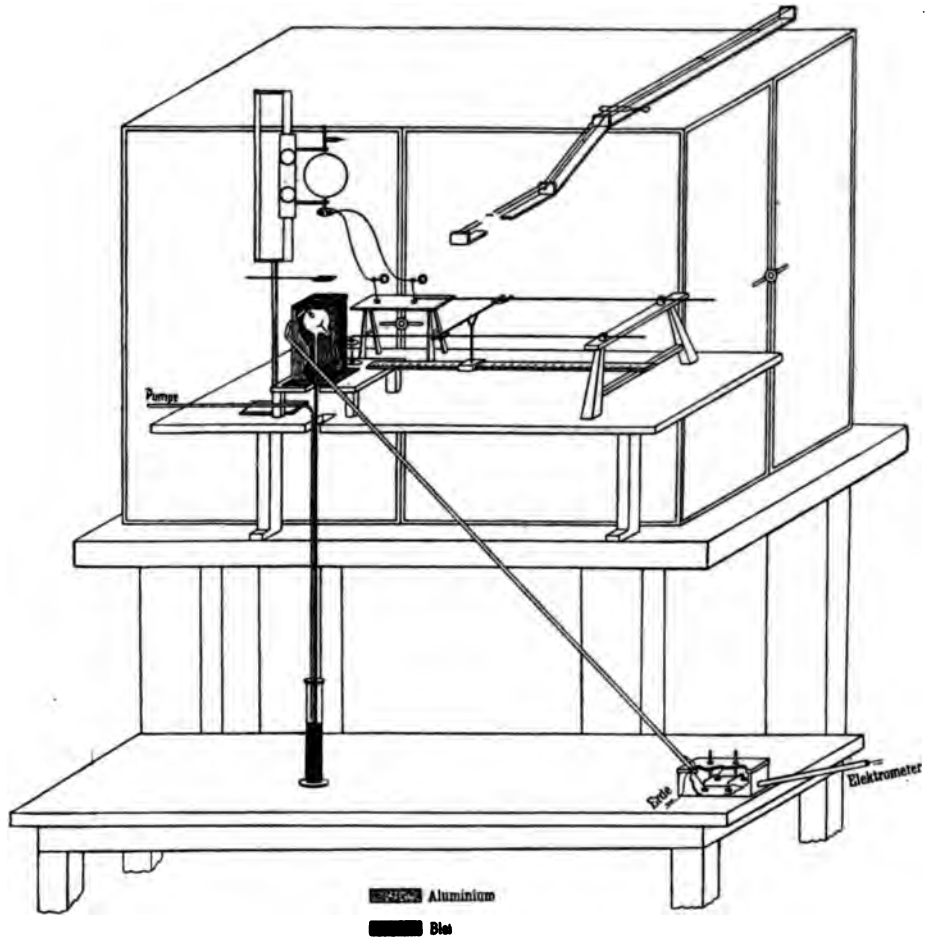


Fig. 5.

leisten und Funkenbildung ausschließen. Diese Federn sind in Ebonitgabeln angebracht; von denen je 2 jeden Draht umklammern, aber nur je eine Federn trägt. An die Federn, die auf beiden Drähten schleifen, ist ein *Cu*-Draht von 23 cm Länge, der die Brücke bildet, angelötet. Die Brücke ist im Winkel der Ebene der gestreckten Drähte, etwas schräg nach vorn an einem Glasstabe angesiegelt, welcher in einem, auf dem Maßstab geführten

Schieber befestigt ist. Der zweite *Cu*-Draht endet in einem Quecksilbernäpfchen, das wieder auf einem Glastisch steht. Von hier aus führt ein *Cu*-Draht, sorgfältig isoliert, durch einen, den oberen Teil des Auffangrohres umgebenden Bleikasten zu einem Quecksilbernäpfchen, in welches ein Wollastondraht von $^1/_{100}$ mm Dicke und 5 cm Länge hineinragt. Das andere Ende dieses Drahtes führt wieder in ein Quecksilbernäpfchen, in das der an die bestrahlte Elektrode angelötete, etwa 30 cm lange *Cu*-Draht einmündet. Die Brückendrähte sind nicht auf ihrer ganzen Länge benutzbar, da sie an den Enden durch Ebonitklammern gehalten sind.

Der Bleikasten, der das Auffangrohr schützt, hat oben einen aus 2 Teilen bestehenden Deckel (Fig. 2), aus einer Öffnung ragt oben das große Aluminiumfenster heraus. Über diesem zeigt die Figur eine kleine bewegliche Bleiklappe, um auf Störungsfreiheit von anderen Einflüssen, als den der Röntgenstrahlen zu prüfen.

Die Zuführung zum Elektrometer liegt völlig isoliert in weiten Messingrohren, so daß der Käfigschutz aus dem Vakuum, (vergl. oben unter „Auffanggefäß"), lückenlos bis zum Elektrometer reicht. Das Elektrometer ist ein DOLEZALECKSches, mit Bernsteinisolation. Die Nadel ist aus versilberten Glimmer (Scholl), welcher zu der bekannten MAXWELLschen Form zurechtgeschnitten ist. Die Empfindlichkeit betrug bei einem Skalenabstand von 1,50 m etwa 400 mm für 0,1 Clark, bei aperiodischer Dämpfung und unkommutiert.

VI.

Beweis, daß die Grundbedingung der Methode, die Gleichheit der Frequenz der Röntgenstrahlen mit der Frequenz der bestrahlten Elektrode, erfüllt ist, und daß die Nebenschwingungen das Messprinzip nicht stören.

In Kap. IV wurde auseinandergesetzt, welche Überlegungen die Dimensionierung des Apparates bestimmten; ob diese zum Ziele führten, das konnte, schon wegen der z. T. unerwiesenen Annahmen, welche sie leiteten, erst das Experiment entscheiden. Der Beweis, daß sie es taten, wird jetzt erbracht. Er zerfällt, wie am Schluß des Kap. IV auseinandergesetzt wurde, in drei Teile.

1. *Beweis, daß die Emission der Röntgenstrahlen mit einer Frequenz erfolgt, die mit der übereinstimmt, welche als höchste Frequenz des Primärsystems mit Hilfe des Luftresonators sich ergeben hatte.* Dieser Beweis wäre entbehrlich, da er indirekt aus dem Resultate unter 3 dieses Kapitels sich ergibt. Da er aber mit Hilfe einer an sich sehr beachtenswerten Erscheinung geführt werden kann, soll er hier folgen. Zu diesem Zwecke wird der die Quecksilbernäpfchen verbindende Wollastondraht (in Fig. 2) durch einen kurzen *Cu*-Draht ersetzt. Der aus dem Bleikasten herausragende Draht wird in eine Messingröhre eingekapselt. Der Draht wird periodisch um 5 cm verkürzt und die Ausschläge des Elektrometers werden beobachtet. Man kann hierbei in zweierlei Weise vorgehen; entweder man hat im Auffanggefäß einen Druck von mehreren Millimetern (etwa 7) und beobachtet erstens, wann bei Verkürzung eines angehängten Drahtes die Kathodenstrahlung aufhört und zweitens, wann sie bei weiterer Verkürzung, nachdem sie wieder eingesetzt hatte, zum zweiten Mal aufhört. Der Abstand ist dann $= \lambda$. Oder man verfährt so, daß man während der Bestrahlung mit Hilfe einer Hochspannungsbatterie durch einen Flüssigkeitswiderstand, oder feuchte Schnur ein hohes positives Potential der Elektrode erteilt. Dann ist nicht notwendig, den Druck im Rohr so hoch zu nehmen, sondern es genügt 1 bis 2 mm. Auch hier wird in gleicher Weise λ durch allmähliches Verkürzen des eingekapselten Drahtes abgegriffen. Bei sehr gutem Vakuum gelingt der Versuch nicht.

$\frac{\lambda}{2}$ auf diese Weise direkt zu messen, ist aus Gründen, die gelegentlich von Tabelle IVa verständlich werden, nicht möglich. Es zeigte sich, daß die Umkehrpunkte, d. h. das Aussetzen der Kathodenstrahlung anfing, wenn der angehängte Draht von 137 cm Länge verkürzt wurde bis auf 112 cm. Alsdann blieb während weiterer Verkürzung zunächst die Kathodenstrahlung aus, setzte bei noch weiterer Verkürzung wieder ein, und verschwand zum zweitenmal bei $\sim$ 25 cm Länge, das entspricht also einer Wellenlänge von $\sim \lambda = 87$ cm.

Das Experiment zeigt, daß die Emission der Röntgenstrahlen mit der, 45 cm $\frac{\lambda}{2}$ entsprechenden Frequenz erfolgt. Denn durch die alle 45 cm Lichtweg-Zeit sich wiederholende Röntgenstrahlung gehen im selben Tempo Kathodenstrahlen aus und der

angehängte Draht gerät in Resonanzschwingung. Diese Eigenschwingung enthält in sich die Möglichkeit, für eine andere, hier nicht zu behandelnde Methode, die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen zu messen[1]). Auf diese m. E. außerordentlich interessante Schwingungserregung soll aus Rücksicht auf die Einheitlichkeit des hier zu behandelnden Problems an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

2. *Beweis, daß die Resonanzschwingung des Elektrodendrahtes,*

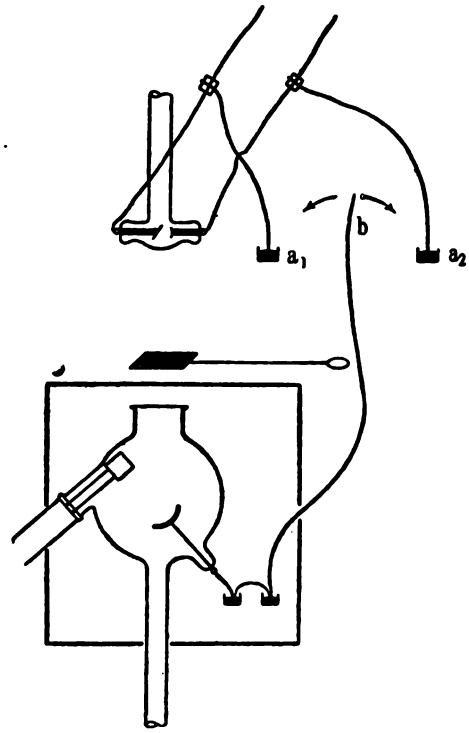


Fig. 6.

so stark gedämpft werden kann, daß sie gegen die aufgezwungene Schwingung verschwindet.

Der Wollaston-Draht von 5 cm Länge und $\frac{1}{100}$ mm Dicke wird wieder zwischen die Quecksilbernäpfchen geschaltet. Von hier aus führt ein Draht von etwa 45 cm aus dem Kasten heraus. Dieser Draht kann, wie es die Fig. 6 zeigt, einmal zur Anodenseite, das zweite Mal zur Kathodenseite der 10 cm langen Sekundärleitung geschaltet werden. Die ganze Leitung bis zur Elektrode ist demnach etwa 1 m lang. Man erhält

1) E. MARX, Phys. Zeitschr. 6, p. 834, 1905.

bei der Schaltung zur Anodenseite einen starken negativen, bei der Schaltung zur Kathodenseite, einen schwachen positiven Ausschlag.

Dieses Experiment zeigt, daß die Eigenschwingung des Drahtes *b* klein gegen die aufgezwungene Schwingung ist. Denn da Länge und Form des Drahtes *b* konstant bleiben bei der veränderten Schaltung zu a_1 oder a_2, dürfte die Schwingung, falls sie Eigenschwingung ist, nicht an der Elektrode ihr Zeichen wechseln. Ist dieser Beweis vielleicht in sofern nicht völlig streng, indem man einwenden kann, daß bei der gewählten Drahtlänge ja gerade die Eigenschwingung sich in einem Minimum an der Elektrode äußeren kann, so läßt er sich dadurch streng ergänzen, daß man die Brückendrähte statt des Drahtes *b*, wie bei der definitiven Anordnung anschaltet, die Brücke auf *o* stellt und zeigt, daß eine geringe Verschiebung der Röhre sofort wieder von *o* verschiedene Ausschläge erzeugt. — Hätten wir es mit Eigenschwingungen zu tun, so wäre bei dieser Anordnung der Ausschlag unabhängig von der Zeit, welche die Röntgenstrahlen brauchen,

---

In den „Beiblättern" hat Herr K. T. FISCHER ein Referat über meinen Vortrag in Meran veröffentlicht, in welchem die Methode der Geschwindigkeitsmessung, beschrieben wird Herr FISCHER schreibt dann: „Besonders störend wirkten Eigenschwingungen ... welche es ihm trotz der gelungenen Schwächung dieser Eigenschwingungen unmöglich machten, die Grundschwingung des Lecherschen Systems von 135 cm halber Wellenlänge dem untersuchten Kreis der Elektrode ohne Oberschwingung aufzuzwingen." — Ganz sicher bin ich nicht, was eigentlich Herr FISCHER hier meint; nach dem „trotz" zu schließen, meint er Störungen durch Eigenschwingungen. Wenn diese Referierung richtig wäre, so müßte Herr FISCHER zeigen, daß Beweis 2 dieses Kapitels eine Lücke enthält. (Am besten wohl an einer Stelle, an der eine Diskussion möglich ist, nicht in den „Beiblättern".) Die wesentlichen Tatsachen desselben sind sämtlich in meinem Vortrage enthalten. — Zum Schluß bemerkt Herr FISCHER; „Leider teilt der Verfasser zu wenig Zahlen über jene Messungen mit, auf Grund deren er sein Resultat formuliert, sowie nur wenige darüber, wie viele aufeinanderfolgende Nullstellungen, bez. Maxima und Minima er auffinden konnte. Ohne eine ausführlichere Veröffentlichung wird man daher noch nicht die volle Überzeugung von der Richtigkeit des vom Verfasser ausgesprochenen Resultates gewinnen können." Es sei dazu folgende Bemerkung gestattet: Erstens ist im Vortrage mehrfach angegeben, daß 3 Nullstellen auf den Brückendrähten liegen, und dann: In jedem Vortrag von 20 Minuten gewährter Zeit werden ausführlichere Zahlenangaben nicht zu finden sein, einmal aus Mangel an Zeit, und dann, weil ausführliche Veröffentlichungen bisher noch stets einem Referat über eine große Arbeit folgten. Mir scheint deshalb, diese Beanstandung hätte wohl erspart bleiben dürfen, da sie, so richtig sie an sich ist, mit gleichem Recht hinter jeden Vortrag gesetzt werden kann!

um zur Elektrode zu kommen, also unabhängig von der Verschiebung der Röntgenröhre bei feststehender Brücke. Da die definitiven Messungen im Kap. VIII alle zeigen, daß er davon abhängig ist, so ist hierdurch streng bewiesen, daß die Eigenschwingungen abgedämpft sind; eine besondere Tabelle erscheint deshalb an dieser Stelle unnötig.

3. *Beweis, daß die Störungsfreiheit von den Nebenschwingungen erfüllt ist.*

Der strenge Beweis, daß die Nebenschwingungen keine Störung hervorrufen, liegt in der Beobachtung mindestens eines, besser mehrerer scharfer Nullpunkte auf dem Brückendraht. Für die Messung der Geschwindigkeit [vergl. Kap. VIII] ist es unnötig und nicht ratsam, die Verschiebung aller Nullpunkte auf den Drähten zu beobachten. Um aber die tatsächliche Unabhängigkeit der Messung von den Nebenschwingungen im ganzen Verschiebungsgebiet zu erweisen, dazu ist erforderlich, die ganze Drahtleitung abzusuchen; hierbei ist auf möglichst gute Abstimmung (vergl. p. 35 u. Kap. VII p. 38) beider Vacua zu achten, um die + und — Gebiete möglichst gleich lang zu erhalten (vergl. auch dieses Kap. weiter unten S. 35).

Folgende Tabelle stellt eine solche Beobachtung dar. Die verwendeten Röntgenstrahlen waren so weich wie möglich, indem möglichst viel Luft im Röntgenrohr belassen wurde.

Tabelle II.

Verteilung der Nullstellen auf dem Brückendraht bei gut abgestimmten Vacuis.

Loseste Kopplung des Primärsystems. Kondensatorstellung *C* der Tabelle I. Abstand der Röhre vom Fenster etwa 7 cm.

mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag
800	−	680	+	450	−
790	schw. −	660	+	440	−
788	g. schw. −	640	schw. +	420	−
786	g. schw. −	610	+	400	schw. −
785	∓ ±	590	schw. +	380	schw. −
	↔	570	s. schw. +	360	schw. −
784	schw. +	550	+	350	g. schw. −
780	schw. +	540	schw. +	330	schw. −
765	+		↔	310	−
750	+	530	schw. −	305	schw. −
735	+	520	schw. −	300	o; ± ∓
720	+	510	−		↔
705	+	490	−	295	o; schw. +
700	+	470	−	290	schw. +

$\pm\ \mp$ bedeutet hierbei ein Schwanken der Elektrometernadel um den Nullpunkt. Die Erklärung hierfür findet sich in Kap. VII; $\leftrightarrow$ bedeutet die als Nullage angenommene Zahl.

Aus dieser Tabelle folgt, daß die Umkehrpunkte liegen bei

$$784.5 \text{ mm} \quad \sim 535 \text{ mm} \quad \sim 300 \text{ mm}.$$

Das entspricht der Brückenverschiebung: 249.5 mm und 235 mm

also: $\frac{\lambda}{2} = 49{,}9$ cm und 47 cm.

Das Mittel hieraus ist

48,4 cm während

47,5 cm

die mit dem Resonator aus mehreren Einstellungen erhaltene Wellenlänge ist. Die Übereinstimmung ist so gut, daß sie streng beweist, daß die Nebenschwingungen keine Störung innerhalb des ganzen Verschiebungsbereiches ausgeübt haben.

Es wäre zwecklos genau analoge Tabellen für die beiden anderen Koppelungen mitzuteilen; sie ergeben das gleiche Resultat.

Dagegen erscheint es nicht überflüssig, zur Illustration des Einflusses des Gasdruckes im Auffanggefäß, folgende 3 Messungsreihen für die engste Kopplung wiederzugeben.

Tabelle III.

Abhängigkeit der Nullstellen auf dem Brückendraht vom Gasdruck im Auffanggefäß.

Engste Koppelung des Primärsystems. Kondensatorstellung A der Tabelle I.

A		B		C	
mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag
800	—	800	—	800	—
790	schw. —	790	—	790	schw. —
780	—	780	schw. —	788	g. schw. —
760	—	770	—	785	± ∓
750	—	760	g. schw. —		↔
740	—	758	schw. —	783	± ∓; schw. +
730	—	756	schw. —	780	schw. +
720	schw. —	754	± ∓	775	+
718	schw. —		↔	760	+
716	∓ ±	753	± ∓	740	+
	↔	751	± ∓; schw. —	700	+
714	∓ ±	750	± ∓; schw. +	650	+
712	schw. +	748	schw. +	620	+
705	schw. +	746	schw. +	600	+
700	schw. +	740	schw. +	570	+
680	schw. +	720	schw. +	540	+
660	+	700	+	520	schw. +
640	+	680	+	515	± ∓; schw. +
630	+	650	+	513	± ∓; schw. +
600	+	620	schw. +	511	± ∓; schw. +
580	+	600	+	509	± ∓; schw. +
560	schw. +	580	+	507	± ∓; ± ∓
550	± ∓	560	+		↔
	↔	540	g. schw. +	505	schw. —

A		B		C	
mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag
545	—	535	g. schw. +	500	schw. —
540	—	530	± ∓; g. schw. —	490	schw. —
530	—	528	± ∓; schw. +	470	schw. —
480	—		↔	450	schw. —
450	—	526	± ∓; schw. —	430	schw. —
400	—	524	± ∓; schw. —	400	schw. —
370	—	522	schw. —	380	schw. —
340	—	520	schw. —	360	schw. —
300	—	510	schw. —	340	schw. —
290	—	500	schw. —	330	± ∓; schw. —
		470	schw. —	325	± ∓ ± ∓
		450	—	320	± ∓; schw. +
		430	—	315	± ∓; schw. +
		410	—	310	schw. +
		390	schw. —	300	g. schw. +
		360	—	295	o; g. schw. +
		340	schw. —	290	g. schw. +
		320	schw. —		
		310	g. schw. —		
		308	schw. —		
		306	schw. —		
		304	± ∓		
			↔		
		302	± ∓; schw. +		
		300	± ∓; schw. +		
		298	g. schw. +		
		295	g. schw. +		
		290	g. schw. o		

Die Zahlenreihe unter *B* bezieht sich au[illegible] ab-
gestimmte Vacua, d. h. es [illegible]
Einlassen resp. Beseitigen [illegible]

geglichen, bis die positiven und negativen Gebiete einander nahezu gleich sind. Der Druck, bei dem dies eintritt, ist nicht nur vom Druck im Auffanggefäß, sondern auch von dem im Röntgenrohr abhängig, da von letzterem die Härte der Röntgenstrahlen, abhängt (vergl. Kap. VIII).

Die Zahlenreihe *A* zeigt die Verteilung bei zu niedrigem Druck.
Die Zahlenreihe *C* diejenige bei zu hohem Druck.
In der mittleren Spalte *B* geht

das positive Gebiet von $752 - 527 = 22{,}5$,
das negative Gebiet von $527 - 304 = 22{,}3$,

also beträgt die positive Drahtlänge 45 cm und die negative 44,6 cm.

Hieraus folgt im Mittel $\frac{\lambda}{2} = 44{,}8$ cm.

In der letzten Spalte *C* geht

das positive Gebiet von $785 - 507 = 27{,}8$ also pos. $= 55{,}6$
das negative Gebiet von $507 - 325 = 18{,}2$ also neg. $= 36{,}4$

Hieraus folgt im Mittel $\frac{\lambda}{2} = 46$ cm.

In der Spalte *A* dagegen geht das positive Gebiet von 715 bis 550, und es ist nicht möglich, auf den Brückendrähten die Umkehrpunkte der angrenzenden negativen Gebiete festzustellen. Dieser Einfluß des Gasdruckes im unteren Rohr ist bereits in Kap. III p. 12 u. 13 als in dem Wesen der Methode liegend erörtert worden. Diese Tabelle III dokumentiert obige Ausführungen. Durch Änderung des Gasdruckes wird das Gleichgewicht der Elektrometernadel, das einerseits durch die negative Strömung von der Elektrode fort (Effekt I), und andrerseits durch die zur Elektrode hin (Effekt II) bestimmt ist, verschoben, indem bei zunehmendem Gasdruck eine Steigerung von II, bei abnehmendem Gasdruck eine Schwächung von II auftritt. Hierdurch wird die Nulllage der positiven und negativen Gebiete verschoben. Ist der Effekt II ganz unterdrückt, dann wird auf der ganzen Drahtleitung negatives Potential beobachtet, ist aber zu viel Luft im Gefäß, so kann Effekt I nicht mehr zur Beobachtung kommen, und da gleichzeitig die Beweglichkeit der den Gasresten entstammenden Elektrizitätsträger abnimmt, so scheiden die kurzen Wellen für ihre Entfernung aus dem Gase mehr und mehr aus und nur die langen, z. Zt. der Ionisation stets die eigene positive Wellenphase antreffenden Wellen haben noch Dauer genug, um die negativen Ionen anzuziehen. So kommt es, daß bei zu hohem

Druck der Faradayzylinder auf der ganzen Leitung positiv beobachtet wird. (Vergl. hierzu Kap. III p. 13.) Die Wellenmessung selbst kann hierdurch wie Spalte A der Tabelle III illustriert, unmöglich gemacht werden, während trotzdem die Geschwindigkeitsmessung, für die nur *ein* scharfer Nullpunkt erforderlich ist, wenn man nur hinreichend weit um den Nullpunkt sondiert, ohne Störung ausgeführt werden kann.

Hierauf wird in Kap. VIII zurückgekommen. Hier dient die Tabelle allein zu dem Nachweis, daß die Knotenlagen der kürzesten Welle auf dem Brückendrahte scharf bestimmt sind durch die kürzeste Schwingung des Systems. Dies aber wird durch die Tabelle bewiesen, und hiermit ist gleichzeitig auch für die engste Kopplung des Systems der strenge Nachweis erbracht, daß eine Störung durch Nebenschwingungen des Systems durch die Dimensionierung desselben, ausgeschlossen ist.

VII.

Über die übrigen Vorgänge, welche neben den für das Messprinzip notwendigen im Apparat ablaufen.

Wie bereits in der Einleitung zu Kap. III auseinandergesetzt wurde, beschäftigte sich Kap. III nur soweit mit der Versuchsanordnung, als die Wirkungen der für Durchführung des Prinzips notwendigen und für die Dimensionierung wesentlichen Erscheinungen diskutiert wurden.

Neben diesen Effekten gehen aber gleichzeitig einige andere nebenher, deren Einfluß bei Ausführung der Messung z. T. in Erscheinung tritt.

1. Wenn im *Auffangrohr* ein Platinblech im Vacuum von Röntgenstrahlen getroffen wird, so gehen von diesem Platinblech zwei wesentlich verschiedene Strahlenarten aus. Erstens die für das Prinzip selbst notwendigen Kathodenstrahlen, zweitens aber neue Röntgenstrahlen, die sogenannten sekundären Röntgenstrahlen. Diese sekundären Röntgenstrahlen sind sehr leicht absorbierbar, sie sind infolgedessen starke Ionisatoren. Es wird demnach durch diese Nebenerscheinung die als Effekt II bezeichnete Ionisation verstärkt. Die Verstärkung kann möglichen Falls so weit gehen, daß die, dieser Sekundärstrahlung entstammende Ionisation der Gasreste, namentlich dann, wenn die zu messenden Röntgenstrahlen

selbst nicht sehr weich sind, die aus letzterer resultierende Ionisation überwiegt.

Hierdurch wird keineswegs eine Störung des Prinzips hervorgerufen; woher die Ionisation im Auffanggefäß stammt, ist für die Messung völlig gleichgiltig. Es ist im Gegenteil leicht einzusehen, daß diese Ionisation durch sekundäre Röntgenstrahlen der Reinheit der Experimentalanordnung förderlich ist. Da nämlich die Wirkung der durch Ionisation in den Gasresten frei werdenden, negativen Elektrizitätsträger von der Größe der Beweglichkeit dieser abhängt, die Beweglichkeit selbst aber mit abnehmendem Druck zunimmt, so ist die Anordnung um so reiner, je weniger Gasreste erforderlich sind, um die für die Nullmethode hinreichende Ionisation zu erzielen, je vollkommener also die Ionisation der Gasreste vor sich geht.

2. Außer der Ionisation durch die primären und sekundären Röntgenstrahlen kommt noch ein dritter Faktor, der wünschenswerten, möglichst weitgehenden Dissoziierung der Gasreste zu Hilfe. Es ist dies die Ionisation durch Stoß, hervorgerufen durch Aufprallen der Elektronen, die von den Röntgenstrahlen am Platin frei gemacht werden, auf die Gasmoleküle. Namentlich bei stark verzögerten Kathodenstrahlen, bei hohem Druck und positivem Felde, werden diese Strahlen als Ionisatoren wirken. Alle diese Umstände wirken zusammen, daß nur sehr geringe, meist einen Druck von 1 mm nicht erreichende Gasreste erforderlich sind, um einen scharfen Übergang des Elektrometerausschlags von + zu — durch die Brückenverschiebung zu erreichen. Genaue Angaben der Höhe des erforderlichen Druckes sind deshalb nicht möglich, weil dieser, wie schon im Kapitel VI p. 35 erwähnt wurde, von der Härte der Primärstrahlen abhängt, sie sind um so weniger möglich, als auch die andern Effekte, die soeben in ihrer Wirksamkeit als Ionisatoren beschrieben sind, in dieser Wirkung in gleicher Richtung Funktionen der Härte der Primärstrahlen sind, wie die Primärstrahlen selbst.[1]) Jede, auch die geringste Spur von Feuchtigkeit, ist selbstverständlich im Auffanggefäß mit aller extremster Sorgfalt zu vermeiden, damit die Beweglichkeit der negativen Elektrizitätsträger nicht durch Belastung beeinträchtigt wird [Vergl. Kap. V p. 464].

3. Zu diesen beiden Effekten, deren Existenz das Messprinzip an sich nicht erfordert, tritt ein dritter hinzu, den man als

1) LANGEVIN: Recherches sur les gaz ionises. Thèses etc. Paris 1902.

tertiäre Kathodenstrahlung bezeichnen kann. Wenn nämlich die sekundäre Röntgenstrahlung auf den Faradayzylinder fällt, so treten auch von diesem neue Kathodenstrahlen aus, indem alsdann die sekundäre Röntgenstrahlung die Rolle der primären übernimmt. Dieser Einfluß der sekundären Röntgenstrahlen ist im allgemeinen während der Messung nicht zu beobachten, denn da diese Strahlen, die von der bestrahlten Elektrode ausgehen, vor den sekundären Kathodenstrahlen, die gleichzeitig mit ihnen ausgelöst werden, den Faradayzylinder erreichen, so wird eine etwaige momentane, durch die sekundären Röntgenstrahlen hervorgerufene positive Ladung des inneren Zylinders nur beschleunigend auf die später ankommenden Elektronenschwärme wirken.

Wenn aber die bestrahlte Elektrode ein so hohes positives Potential erreicht hat, daß keine negative Elektrizität von ihr aus am Faradayzylinder zur Beobachtung gelangt, oder besser, daß ebensoviele negative Elektrizitätsträger von ihr zum Zylinder wandern, als zu ihr aus den Gasresten herangezogen werden, dann geht, unbekümmert um das Potential der bestrahlten Elektrode, von dieser in gleicher Stärke wie vorher die sekundäre Röntgenstrahlung aus. Diese kann dann beim Auftreffen auf das Innere des auf dem Potential *o* befindlichen Faradayzylinders, Kathodenstrahl-Emission veranlassen. Dann lädt sich der Zylinder positiv, so lange bis sein Potential hinreicht, um die in der Nähe befindlichen Elektronen auf sich zu zu beschleunigen. Die so herangezogenen Elektronen laden das Elektrometer alsdann negativ, so lange bis das Spiel von neuem beginnt. Ist diese Vorstellung richtig, so müßte man erwarten, daß der richtige Nullpunkt zwischen negativem und positivem Elektrometerausschlag sich durch ein Pendeln der Nadel um den Nullpunkt zu erkennen gibt, und dies ist, wie bereits aus den Tabellen des Kap. V zu ersehen ist, auch der Fall.

4. Beim *Röntgenrohr* ist vor allem darauf zu achten, daß das Vakuum sich bei der Verschiebung nicht merklich ändert. Die Zeit des Einsetzens und Abreißens der die Röntgenstrahlen erzeugenden Kathodenstrahlung ist eine Funktion des Potentialgradienten[1]), und da dieser vom Gasdruck abhängt, so ist das Vakuum konstant zu halten. Abgesehen hiervon würde, wie bereits erwähnt, eine Änderung des Vakuums, also der Härte, eine veränderte Ionisation im Auffanggefäß bedingen. Die konstantesten

1) TH. DES COUDRES l. c.

Verhältnisse erhält man, wenn der Druck im Röntgenrohr so hoch wie irgend möglich ist. Es ist dies wie schon in Kap. IV p. 20 f. ausführlich erörtert wurde, auch deshalb zu empfehlen, weil der schädliche Einfluß der Nebenschwingungen in Hinsicht der Größe des Verschiebungsbereichs um so mehr zurücktritt, je mehr Luft im Röntgenrohre ist.

5. Daß die durch die *Verschiebung* verursachte Intensitätsänderung der ankommenden Strahlen keinen Einfluß auf die Nullagen ausübt, wurde durch Anwendung von Bleiblenden nachgewiesen.

6. Eine Veränderung des Selbstinduktionskoeffizienten der Primärdrähte findet praktisch nachweisbar durch die Verschiebung nicht statt. Dies war schon wegen der geringen geometrischen Veränderung bei der geringen Verschiebung von vornherein wahrscheinlich, ich habe mich aber außerdem durch Messung der Welle mit dem Luftresonator davon überzeugt, daß auch hier die Verschiebung keine Fehlerquelle mit sich bringt, daß also auch dieser Einfluß stets klein gegen die wesentlichen bleibt.

VIII.

Die Messung der Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen.

Es war nach den Betrachtungen und Experimenten in den Kapiteln VI und VII zu erwarten, daß der in V beschriebene Apparat im stande sein würde, das in II entwickelte Meßprinzip ohne nachweisbare Störungen zu verwirklichen.

Hierfür ist ein und nur ein möglichst scharfer Nullpunkt erforderlich und dieser ist vor und nach der Messung auf seine Konstanz zu prüfen. Selbstverständlich ist bei der Messung darauf zu achten, daß nicht etwa bei der Verschiebung ein Nullpunkt übersehen wird; da wie in Tabelle IV gezeigt ist, die Nullstellen auf den Drähten bei nicht genau abgeglichenem Vakuum wesentlich geringere Entfernung als $^1/_2$ Wellenlänge haben können, so ist notwendig, die benutzte Nullstelle am Anfang und Ende bis über die Einstellung nach der Verschiebung zu sondieren.

Folgende Tabellen geben das gesamte definitive Beobachtungsprotokoll für die drei benutzten Wellenlängen wieder. Die Röhrenverschiebungen wurden mit dem Zirkel genau ausgemessen; die Angabe „Anfangsentfernung vom Fenster“ hat an sich keinen Genauigkeitsanspruch.

Tabelle IV.

Geschwindigkeitsmessung.

Kondensatorstellung A der Tabelle I; Anfangsentfernung vom Fenster 52,0 mm.

Anfangsnulllage		Nach der Verschiebung von 52 mm bis 114 mm		Zurück zur Anfangslage	
mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag
600	+	600	+		
580	+	595	+		
560	+	593	+	560	+
559	schw. +	592	+	558	schw. +
557	± ∓; schw. +	590	± ∓; +		↔
556	± ∓	588	± ∓	555	schw. −
555	schw. −	587	schw. +	554	schw. −
	↔	585	schw. +		
554	± ∓; +; ± ∓		↔		
552	schw. −	584	schw. −		
550	−	582	schw. −; schw. +		
548	g. schw. −	580	± ∓; ± ∓		
540	−	579	± ∓; schw. −		
		578	schw. −		
		575	schw. −		
		570	−		
		560	−		
		555	−		

Hiernach:

Brückenverschiebung 584,5 − 555,5 = 29,5 mm
Röhrenverschiebung 114 − 52 = 62 mm

Also

Drahtlänge = 59 mm
Röhrenverschiebung = 62 mm

Tabelle V.

Geschwindigkeitsmessung.

Kondensatorstellung A der Tabelle I; Anfangsentfernung vom Fenster 66,3 mm.

Anfangsnulllage		Nach der Verschiebung von 66,3 mm bis 160,1 mm		Zurück zur Anfangslage	
mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag
581	+	581	+		
570	+	580	+; +; +		
565	+	576	± ∓; o		
560	+	575	± ∓; + schw.; ± ∓		
540	+				
532	+		↔	533	+
531	+	574	± ∓; schw. −	532	+
530	s. schw. −; ± ∓; g. schw. −	573	schw. −; ± ∓	530	± ∓
		572	schw. −		↔
528	schw. +	570	schw. −; +; schw. −; schw. −	528	± ∓; schw. −
	↔			526	± ∓; schw. −
527	schw. +			524	−; schw. −; + −
526	± ∓; schw. +	567	schw. −		
525	schw. −; o −	565	−		
523	schw. −	560	−		
520	schw. −	550	−		
520	schw. −; −	540	−		
510	−	530	−		
500	−	520	−		

Hiernach:

Brückenverschiebung 575 − 529 = 46 mm
Röhrenverschiebung 160,1 − 66,3 = 93,8 mm

Also

Drahtlänge = 92 mm
Röhrenverschiebung = 93,8 mm

Tabelle VI.

Geschwindigkeitsmessung.

Kondensatorstellung A der Tabelle I; Anfangsentfernung vom Fenster 61,5 mm.

Anfangsnulllage		Nach der Verschiebung von 61,5 mm bis 180 mm		Zurück zur Anfangslage	
mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag
730	+				
700	+	600	+		
660	+	590	+		
630	+	585	schw. +		
600	+	580	−; ± ∓; schw. +		
570	+	577	schw. +		
540	schw. +	575	± ∓; schw. +		
530	schw. +	573	± ∓; schw. +		
525	schw. +	572	schw. +		
520	schw. +		↔		
518	schw. +	570	schw. −	520	+
516	± ∓; schw. +	565	−	518	+
515	± ∓; schw. −	560	−	516	+
	schw. −	550	−		↔
	↔	530	−	514	± ∓
512	± ∓	516	−	512	schw. −
510	± ∓			511	schw. −
508	schw. −				
505	schw. −				
500	schw. −				
495	schw. −				
490	−				

Hiernach:

Brückenverschiebung 571 − 513 = 58 mm
Röhrenverschiebung = 118,5 mm

Also

Drahtlänge = 116 mm
Röhrenverschiebung = 118,5 mm

Tabelle VII.

Geschwindigkeitsmessung.

Kondensatorstellung A der Tabelle I; Anfangsentfernung vom Fenster 63 mm.

Anfangsnulllage		Nach der Verschiebung von 63 mm bis 214 mm		Zurück zur Anfangslage	
mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag
790	—	805	—		
780	—	802	—; schw. —		
760	—	801	+		
750	—		↔		
740	schw. —	800	+; ± ∓; —		
730	—	799	+		
727	schw. —	797	+	727	—
725	schw. —	790	+	725	schw. —
	↔	780	+	724	schw. —
724	schw. +			723	schw. —
722	schw. +			722	± ∓
721	schw. +				↔
718	+			721	± ∓
700	+			720	schw. +
				718	schw. +

Hiernach:

Brückenverschiebung $801 - 723 = 78$ mm

Röhrenverschiebung $= 151$ mm

Also

Drahtlänge $= 156$ mm

Röhrenverschiebung $= 151$ mm

Tabelle VIII.

Geschwindigkeitsmessung.

Kondensatorstellung B der Tabelle I; Anfangsentfernung vom Fenster 82 mm.

Anfangsnulllage		Nach der Verschiebung von 82 mm bis 148 mm		Zurück zur Anfangslage	
mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag
650	+	650	+		
640	+	640	+		
630	+	637	± ∓; +		
620	schw. +	635	schw. −; schw. +; +		
610	schw. −				
600	schw. −	634	schw. +; schw. +	600	schw. +
598	schw. −	633	schw. −	597	± ∓
	⟷	630	± ∓; schw. −; schw. +	596	± ∓
596	schw. −			595	± ∓; schw. +
595	± ∓		⟷		⟷
593	schw. −	629	schw. −	594	schw. −; ± ∓; schw. −
590	schw. −	627	schw. −		
		625	schw. −	593	schw. −
		620	−		
		598	−		

Hiernach:

Brückenverschiebung 630 − 595,7 = 34,3 mm
Röhrenverschiebung = 66 mm

Also

Drahtlänge = 68,6 mm
Röhrenverschiebung = 66 mm

Tabelle IX.

Geschwindigkeitsmessung.

Kondensatorstellung B der Tabelle I; Anfangsentfernung vom Fenster 58 mm.

Anfangsnulllage		Nach der Verschiebung von 58 mm bis 165,6 mm		Zurück zur Anfangslage	
mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag
640	+	640	+		
620	+	635	−; +; +		
600	+	634	schw. +		
590	± ∓; schw. +	632	schw. +; ± ∓		
585	schw. +		↔		
582	+; +	630	schw. −	582	+
581	g. schw. −	628	± ∓; schw. −	581	± ∓
	↔	625	−		↔
580	± ∓; ± ∓	620	−	579	± ∓
579	± ∓	600	−	578	schw. −
578	schw. −	580	−		
575	± ∓; schw. −				
570	schw. −				
565	schw. −				
560	−				
530	−				
450	−				

Hiernach:

Brückenverschiebung 631 − 580,3 = 50,7 mm
Eingeschaltete Drahtlänge = 101,4 mm
Röhrenverschiebung = 107,6 mm

Tabelle X.

Geschwindigkeitsmessung.

Kondensatorstellung C der Tabelle I; Anfangsentfernung vom Fenster 70 mm.

Anfangsnulllage		Nach der Verschiebung von 70 mm bis 150 mm		Zurück zur Anfangslage	
mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag
580	+	580	+		
570	+	578	schw. +		
560	+	575	± ∓		
550	+		↔		
540	+	574	± ∓	540	+
535	schw. +; schw. +	573	schw. —	535	schw. +
	↔	572	schw. —	534	± ∓
534	schw. —; schw. —	570	± ∓; schw. —	533	± ∓
533	schw. —	560	—	531	schw. —
532	± ∓; ± ∓	550	—	528	schw. —
530	—	530	—		
525	schw. —				
520	schw. —				
500	—				

Hiernach:

Brückenverschiebung	575 — 534,5 = 40,5 mm
Eingeschaltete Drahtlänge	81 mm
Röhrenverschiebung	80 mm

Tabelle XI.

Geschwindigkeitsmessung.

Kondensatorstellung C der Tabelle I; Anfangsentfernung vom Fenster 59 mm.

Anfangsnulllage		Nach der Verschiebung von 59 mm bis 156 mm		Zurück zur Anfangsl	
mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag	mm der Skala	Ausschlag
600	+	600	+		
575	+	576	+		
550	+	575	+; ± ∓; −		
540	+	574	schw. +; schw. +; schw. −		
530	+				
520	± ∓		⟷	520	± ∓; schw. schw. +
519	± ∓; +	573	−; schw. +; schw. −		
518	schw. +			519	schw. −
516	schw. +	570	schw. −	518	schw. +; schw. −
514	± ∓ +; +; schw. +	560	schw. −		
		550	schw. −	516	schw. +; ±
	⟷	540	schw. −		⟷
512	schw. −	530	−	514	schw. −; ±
510	schw. −			512	−; schw.
500	−			510	−

Hiernach:

Brückenverschiebung	574 − 514 = 50 mm
Eingeschaltete Drahtlänge	100 mm
Röhrenverschiebung	97 mm

Hiermit sind sämtliche Versuche, die ich angestellt habe, welchen während der Messung sich der Nullpunkt nicht wesentlich verschoben hat, hier mitgeteilt. Im folgenden ist das Ergebnis ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit des Wellensystems zusammengestellt.

Tabelle XII.

Röhrenverschiebung	151	118,5	107,6	97	mm
Eingeschaltete Drahtlänge	156	116	101,4	100	mm
	+ 3,28 %	− 2,15 %	− 6,11 %	+ 3 %	
Röhrenverschiebung	93,8	80	66	62	mm
Eingeschaltete Drahtlänge	92	81	68,6	59	mm
	− 1,45 %	+ 1,25 %	+ 3,44 %	− 5,25 %	

Das arithmetische Mittel aus den einzelnen Beobachtungen ergibt hiernach als wahrscheinlichsten Wert der Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen den Wert der Lichtgeschwindigkeit mit einer Abweichung von $^1/_2$ %.

Der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung beträgt 3,87 %, der wahrscheinliche Fehler ± 2,58 %, der mittlere Fehler des Resultats ± 1,37 %, der wahrscheinliche Fehler ± 0,91 %.

Da also die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit innerhalb der Versuchsfehler liegt, so folgt mit einem wahrscheinlichen Fehler von etwa ein Prozent:

Die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen ist gleich der Lichtgeschwindigkeit.

Durch dieses Resultat ist demnach die Berechtigung der heutigen physikalischen Vorstellungen von der Natur der Röntgenstrahlen, als einer Erscheinung des Lichtäthers erwiesen.

Der hier verwendete Apparat ermöglichte es, Lichtwegzeiten von wenigen cm auf wenige % genau zu messen. Der Hinweis sei gestattet, daß seine Verwendbarkeit nicht auf das hier behandelte Problem beschränkt ist. Jede Art der Strahlung, die periodisch erregbar, oder durch periodische Kräfte zerlegbar ist, und ihrerseits polare Eigenschaften eines schwingenden Systems auslöst, wird sich, wie ich denke, mit diesem Apparat untersuchen lassen. Diese Bedingung wird vielleicht für alle bekannten Strahlenarten realisierbar sein.

BEOBACHTUNGEN

AM

ECHSZÖLLIGEN REPSOLDSCHEN HELIOMETER

DER

LEIPZIGER STERNWARTE

VON

BRUNO PETER.

IV. ABHANDLUNG.

TRIANGULATION VON 28 STERNEN IN DEN HYADEN.

DES XXIX. BANDES

DER ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

N° VII.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1906.

BEOBACHTUNGEN

AM

ECHSZÖLLIGEN REPSOLDSCHEN HELIOMETER

DER

LEIPZIGER STERNWARTE

VON

BRUNO PETER.

IV. ABHANDLUNG.

TRIANGULATION VON 28 STERNEN IN DEN HYADEN.

BEOBACHTUNGEN

AM

SECHSZÖLLIGEN REPSOLDSCHEN HELIOMETER

DER

LEIPZIGER STERNWARTE

VON

BRUNO PETER.

IV. ABHANDLUNG.

TRIANGULATION VON 28 STERNEN IN DEN HYADEN.

Vorwort.

Die Triangulation der helleren Sterne in der Hyadengruppe hat von Anfang an zu dem Arbeitsprogramm des Repsoldschen Heliometers der Leipziger Sternwarte gehört. Es empfahl sich jedoch, eine solche Arbeit zurückzustellen, bis die Teilungsfehler der Heliometerskalen untersucht waren, und die nötigen Erfahrungen über die Messung absoluter Distanzen vorlagen. Die Erledigung anderer Arbeiten ist dann Ursache gewesen, daß die Hyadenvermessung erst um 1900 begonnen hat und auch nicht in einem Zuge durchgeführt worden ist.

Da jedoch die Eigenbewegungen der in Frage kommenden Sterne gut ermittelt werden konnten und da auch der innegehaltene Messungsmodus eine Bürgschaft für den sicheren Anschluß zwischen den einzelnen Abschnitten der ganzen Reihe bietet, so ist nicht zu befürchten, daß die Genauigkeit des erlangten Resultates dadurch beeinträchtigt worden ist. Gemessen sind wie bei den meisten mit den neueren Heliometern ausgeführten Triangulationen durchweg nur Distanzen. Die Anlage der Arbeit und die Art der Ausgleichung unterscheidet sich aber wesentlich von dem bei ähnlichen Triangulationen eingehaltenen Verfahren.

Der Arbeitsplan.

Die Anlage der Arbeit hatte zur Folge, daß die nördliche Spitze der Hyadengruppe nicht mit in die Triangulation einbezogen wurde. Bei der weiten Ausdehnung der Gruppe wäre eine Festlegung nach dieser Richtung hin durch rein heliometrische Messungen ohne weitere Stützpunkte zu unsicher gewesen. Von vornherein hat es auch nicht in der Absicht gelegen, sämtliche Sterne der Gruppe bis zu einer gewissen Größenklasse herab zu berücksichtigen.

Im ganzen sind 28 Sterne vermessen worden. Von diesen wurden elf als Punkte erster Ordnung (Hauptsterne) behandelt. Die zwischen ihnen gemessenen Distanzen sind einer gemeinsamen

Ausgleichung unterworfen worden. Die übrigen 17 Sterne wurden an die Hauptsterne angeschlossen. Die Anschlüsse dieser Punkte zweiter Ordnung sind voneinander unabhängig, daher beruht die Position eines jeden angeschlossenen Sternes auf einer Ausgleichung für sich.

Wie aus der Tafel am Schlusse der Abhandlung zu ersehen ist, lassen sich die elf Hauptsterne, welche mit A, B, a, ... i bezeichnet sind, untereinander derart verbinden, daß man sechs Vierecke erhält, die so aneinander stoßen, daß mindestens zwei von ihnen eine Seite gemeinsam haben. Diese Vierecke sind $Aadg$, $abcd$, $Bbch$, $abei$, $abef$, $abfi$. Von jedem Vierecke sind die vier Seiten und die beiden Diagonalen gemessen worden. Jedes Viereck liefert also sechs Distanzen. Die endgültigen Werte dieser Distanzen sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern müssen eine zwischen ihnen bestehende Bedingungsgleichung streng erfüllen. Als Unbekannte werden bei der Ausgleichung die Distanzen selbst eingeführt, deren im ganzen 25 vorhanden sind. Der Vorteil des eingeschlagenen Verfahrens besteht darin, daß die eigentliche Ausgleichung nunmehr auf eine solche mit nur 6 Unbekannten reduziert ist. Jede Distanz des Hauptnetzes ist an 4 Abenden gemessen.

Von den 17 Punkten zweiter Ordnung, welche die Bezeichnung 1, ... 17 führen, sind 13 mit 4 bis 8 Punkten erster Ordnung, 2 mit 2 solchen Punkten durch je eine, nur auf einem Abend beruhende Distanzmessung verbunden. Eine Ausnahmestellung nimmt Stern 16 ein, der mit zur Orientierung des Netzes dienen sollte; er ist an fünf Abenden mit c und an vier Abenden mit d verbunden worden. Schließlich ist Stern 17 an je zwei Abenden an c und 16 angeschlossen worden.

An je zwei Abenden sind auch die Distanzen Ai und Be gemessen worden. Sie sollten nicht bei der Ableitung der Positionen Verwendung finden, sondern durch eine Vergleichung ihrer Werte mit den aus den Schlußpositionen berechneten Distanzen eine Kontrolle für die Zuverlässigkeit der erlangten Resultate bilden.

Um sämtliche Messungen auf einen gemeinsamen Skalenwert reduzieren zu können, sind an jedem Beobachtungsabende die drei Distanzen Aa, ab, bB gemessen worden, aus denen sich der über 14 000″ umfassende Bogen AB zusammensetzt. Dieser Normalbogen ist auch zur Ableitung des Skalenwertes benutzt worden.

Die Beobachtungen.

Die Messung der Distanzen ist genau in der gleichen Weise ausgeführt worden wie bei den Bestimmungen der Fixsternparallaxen.[1]) Jeder einzelne Abendwert beruht auf vier Einstellungen, die gleichmäßig auf beide Schieberstellungen verteilt sind. Die beiden Einstellungen in gleicher Schieberstellung sind mit entgegengesetztem Sinne der letzten Drehung ausgeführt. Das Reversionsprisma am Okular ist durchweg angewandt worden. Eine Drehung der Distanzschraube bewirkte scheinbar immer eine Bewegung der Sterne in vertikaler Richtung. Die Beobachtungen erfolgten bei schwach erleuchtetem Felde.

Für die Reduktion ist als Normalokularstellung bei 0^0 angenommen $N_0 = 9.892$. Wie früher hat sich auch hier wieder N_0 über längere Zeiträume hinweg als nahezu unveränderlich gezeigt. Nach den früheren Bestimmungen ist für die Änderung der Ablesung der Okularskala bei einer Temperaturerhöhung um 1^0 C. der Wert 0.0151 mm und für die Reduktion auf Normalokularstellung der Ausdruck $-(Ok-N)\Delta$ $0^p.000469$ benutzt worden. Hingegen ist auf Grund der Untersuchungen in Band XXVII Nr. IV dieser Abhandlungen für die Reduktion der Distanzen auf 0^0 lediglich die Temperatur des Thermometers an der Säule ($= S$) als maßgebend angesehen und dafür der Ausdruck $- 0^p.00001064\,\Delta S$ benutzt worden.

Zunächst gebe ich die Örter der in die Triangulation einbezogenen Sterne an und zwar mit den Werten, die der späteren Ausgleichung zugrunde gelegt sind. A und B sind dem AUWERSschen Fundamentalkatalog, die übrigen Sterne den betreffenden Abteilungen des Katalogs der Astronomischen Gesellschaft entnommen. Die Größen sind die der Bonner Durchmusterung.

Mittlere Örter für 1900.0.

A	$1^m.1$	$67^0\,32'\,43''.02$	$+16^0\,18'\,29''.94$	f	$7^m.2$	$65^0\,16'\,37''.20$	$+16^0\,48'\,15''.00$
B	3.8	63 31 30.99	+15 23 10.30	g	7.5	67 48 25.05	+15 3 30.00
a	5.0	66 12 28.95	+15 58 35.80	h	7.4	63 58 56.25	+14 10 19.70
b	6.8	64 58 38.10	+15 42 45.60	i	7.3	65 53 26.40	+17 19 29.70
c	5.0	65 14 19.20	+14 29 16.40	1	4.0	65 44 13.35	+15 38 56.70
d	7.3	66 21 37.05	+14 53 22.60	2	4.0	65 42 52.80	+15 44 24.90
e	6.0	64 25 7.80	+16 32 39.90	3	6.5	65 49 4.50	+15 56 18.10

1) Bd. XXII Nr. IV, Bd. XXIV Nr. III, Bd. XXVII Nr. VI dieser Abhandlungen.

4	$5^m.0$	65° 40′ 49″.80	+16° 8′ 8″.90	11	$7^m.7$	65° 6′ 0″.00	+15° 17′ 49″.70
5	7.5	66 15 47.40	+15 55 54.80	12	5.4	67 2 31.80	+14 38 3.70
6	6.0	66 6 32.40	+15 25 11.00	13	5.3	68 23 15.75	+15 43 11.20
7	5.5	66 14 4.35	+15 28 29.30	14	5.3	68 21 37.05	+15 36 11.30
8	5.0	65 9 39.00	+15 23 29.50	15	6.5	68 6 25.65	+15 49 58.10
9	6.5	66 32 11.55	+15 38 13.40	16	5.7	66 14 48.75	+13 30 24.50
10	6.5	65 40 47.25	+14 31 7.30	17	5.0	65 48 27.75	+12 49 32.90

Bezeichnet p_0 den Positionswinkel an der Mitte, c und d die vom Sternorte abhängigen Koeffizienten in dem Ausdrucke für die Aberration in Distanz ($d\Delta = -cC - dD$), so ergeben sich aus den vorstehenden Daten die nachfolgenden, für die Berechnung der Refraktion und Aberration notwendigen Größen.

	p_0	$-\log c$	$\log d$		p_0	$-\log c$	$\log d$		p_0	$-\log c$	$\log d$
aA	75° 31′.2	7.0291	6.6040	2*e*	122° 51′.9	7.0717	6.6826	8*B*	89° 48′.4	7.0958	6.7232
ab	77 26.0	6.9864	6.5880	2*i*	6 4.6	7.1060	6.7013	8*a*	59 52.3	6.9690	6.5697
ac	32 8.3	7.1470	6.7483	3*A*	77 25.9	7.1363	6.7153	8*b*	151 9.4	6.4651	6.0780
ad	172 18.7	6.9441	6.5336	3*a*	84 10.6	6.4806	6.0733	8*c*	175 14.6	6.8574	6.4700
ae	108 17.6	7.1593	6.7649	3*b*	74 24.5	6.8255	6.4312	8*d*	113 26.2	7.0029	6.6035
af	132 49.0	6.9893	6.5879	3*c*	21 4.4	7.0928	6.6982	8*e*	148 15.2	7.0322	6.6489
ag	120 47.9	7.1595	6.7340	3*d*	153 30.1	6.9721	6.5652	8*h*	43 3.6	7.1200	6.7452
ai	167 17.5	7.0452	6.6351	3*e*	114 17.1	7.0696	6.6791	9*A*	55 18.6	6.9783	6.5502
bB	76 51.7	7.0552	6.6839	3*i*	2 52.7	7.0466	6.6406	9*a*	137 3.1	6.5708	6.1570
bc	168 21.4	6.9969	6.6109	4*A*	84 29.8	7.1608	6.7406	9*b*	92 53.0	7.0796	6.6789
bd	121 40.5	7.0970	6.6990	4*a*	107 26.0	6.6300	6.2240	9*c*	47 28.8	7.1327	6.7310
be	147 10.8	6.8950	6.5132	4*b*	57 57.9	6.8030	6.4098	9*d*	12 48.9	6.7887	6.3754
bf	14 46.1	6.9538	6.5634	4*c*	14 29.9	7.1321	6.7390	9*g*	115 17.2	7.0380	6.6093
bh	31 57.8	7.1566	6.7831	4*d*	152 16.4	7.0520	6.6462	9*i*	159 51.1	7.1596	6.7465
bi	28 30.4	7.1663	6.7690	4*e*	108 39.0	7.0074	6.6181	10*a*	19 15.9	7.0911	6.6878
cB	118 29.2	7.1723	6.8008	4*i*	9 36.4	6.9852	6.5803	10*b*	150 24.2	7.0382	6.6478
cd	69 40.9	6.9647	6.5665	5*A*	73 0.3	7 0161	6.5906	10*c*	85 52.5	6.5322	6.1414
ch	75 27.5	6.9964	6.6227	5*a*	130 9.4	5.7459	5.3346	10*d*	60 35.9	6.7802	6.3772
dA	38 48.8	7.1663	6.7415	5*b*	79 57.1	7.0015	6.6027	10*h*	78 6.0	7.1232	6.7452
dg	83 7.0	7.0540	6.6288	5*c*	34 23.7	7.1449	6.7458	11*a*	57 30.6	7.0042	6.6055
eB	36 33.8	7.0563	6.6888	5*d*	174 52.0	6.9233	6.5124	11*b*	164 6.6	6.5360	6.1495
ef	72 27.9	6.8363	6.4498	5*e*	109 4.9	7.1747	6.7798	11*c*	170 35.9	6.8135	6.4267
ei	60 59.9	7.1091	6.7157	5*g*	120 25.4	7.1428	6.7169	11*d*	108 31.0	7.0098	6.6116
gA	168 36.3	7.0137	6.5735	5*i*	165 37.8	7.0625	6.6519	12*A*	16 9.2	7.1479	6.7163
hB	160 0.0	7.0060	6.6468	6*A*	57 15.0	7.1214	6.6983	12*a*	149 3.8	7.0991	6.6820
iA	122 41.8	7.1813	6.7569	6*a*	9 42.9	6.6559	6.2470	12*d*	111 9.7	6.7538	6.3371
if	48 24.3	6.7988	6.3967	6*b*	105 2.4	6.9547	6.5582	12*g*	60 9.9	6.8364	6.4042
1*A*	69 13.9	7.1748	6.7548	6*c*	42 3.7	7.0002	6.6036	13*A*	126 0.7	6.9098	6.4621
1*a*	54 8.6	6.6508	6.2451	6*d*	155 24.8	6.6686	6.2601	13*g*	40 14.9	6.8470	6.3988
1*b*	94 58.1	6.7672	6.3743	6*e*	124 41.6	7.1973	6.8048	14*A*	131 59.2	6.9321	6.4850
1*c*	22 30.6	7.0003	6.6066	6*g*	102 26.4	7.1300	6.7064	14*g*	44 24.4	6.7910	6.3434
1*d*	141 38.0	6.8890	6.4835	6*i*	173 43.6	7.1866	6.7784	15*A*	131 22.4	6.7654	6.3206
1*e*	125 15.5	7.0915	6.7026	7*A*	56 31.6	7.0854	6.6606	15*a*	94 30.1	7.1699	6.7400
1*i*	5 1.4	7.1296	6.7246	7*a*	177 5.4	6.6049	6.1945	15*d*	60 45.1	7.1921	6.7624
2*A*	72 6.3	7.1725	6.7529	7*b*	101 6.8	6.9935	6.5961	15*g*	20 29.1	6.8261	6.3808
2*a*	63 31.5	6.6277	6.2224	7*c*	44 16.0	7.0409	6.6430	16*c*	135 5.0	7.0420	6.6470
2*b*	87 46.5	6.7526	6.3596	7*d*	168 17.0	6.6795	6.2694	16*d*	4 32.8	7.0441	6.6374
2*c*	20 8.9	7.0262	6.6328	7*g*	105 21.2	7.1023	6.6770	16 17	32 7.5	6.8051	6.4074
2*d*	143 47.7	6.9258	6.5202	7*i*	169 53.5	7.1784	6.7686	17*c*	157 24.4	7.1423	6.7528

Die Größen c und d sind nicht für die einzelnen Sterne direkt berechnet worden. Die Werte

$$[\operatorname{tg}\varepsilon \sin\delta + \cos\delta \sin\alpha] : 206\,265 \quad \text{und} \quad \cos\delta \cos\alpha : 206\,265$$

wurden innerhalb der nötigen Grenzen von 1^m zu 1^m in AR. und von Grad zu Grad in Dekl. fortschreitend hergeleitet, aus diesem Netz von Werten die Beträge für die einzelnen Sterne durch Interpolation ermittelt und diese Beträge mit den zugehörigen Distanzen Δ multipliziert. Die Δ sind hierbei in Skalenteilen ausgedrückt worden.

Die Berechnung der Refraktion erfolgte für die Distanzen zwischen den Sternen des Hauptnetzes, die an mehreren Tagen gemessen worden sind, in gleicher Weise wie bei den Parallaxenbestimmungen. Es wurden also für die einzelnen Distanzen Hilfstäfelchen berechnet, aus denen für jede *Einstellung* in Distanz die Refraktion ermittelt wurde. Für die Punkte zweiter Ordnung wurde die Refraktion direkt für das Mittel der Zeiten der vier zusammengehörigen Einstellungen berechnet. Alle diese Rechnungen sind zur Kontrolle doppelt ausgeführt worden. Die von Δ^2 abhängigen Refraktionsglieder waren stets unmerklich.

In der nachfolgenden Zusammenstellung sind die erhaltenen Distanzmessungen in ihrer zeitlichen Folge aufgeführt. Es bedeutet

Θ Beobachtungszeit in Sternzeit;

Ge Lage des am Ende der Deklinationsachse befindlichen Gewichtes; f = Gewicht folgt, v = Gewicht voran. Sofern die Gewichtslage nicht wechselt, ist sie nur bei der ersten Messung des betreffenden Tages angegeben;

Oks Ablesung der Okularskala;

P Ablesung des Positionskreises am maßgebenden Mikroskope. Von den beiden um 180° voneinander verschiedenen Ablesungen bezeichnet I stets die kleinere, II die größere;

Gi Blendgitter vor dem Objektiv. 1 = einfaches, 2 = zweifaches, 3 = dreifaches Gitter;

R Ruhe, *S* Schärfe der Bilder im Fernrohr. Bei 1 sind Ruhe und Schärfe am besten, bei 4 am schlechtesten;

K Mittel der Ablesungen der Thermometer zu beiden Seiten des Objektivkopfes;

S Ablesung des Thermometers an der Säule des Instrumentes;

Δ_g die gemessene Distanz, wie sie sich direkt durch Mittelung

der vier zu einer Messung gehörigen Einstellungen ergibt. Die Ablesungen der Skalen sind nur wegen des Runs korrigiert, und zwar jede Messung mit dem aus ihr selbst folgenden Run;

Σ_c Summe der Korrektionen wegen Refraktion, Aberration, Reduktion auf Normalstellung, Reduktion auf o° Temperatur und wegen der Teilungsfehler. Die Reduktion wegen Eigenbewegung ist in Σ_c nicht mit aufgenommen. Wo kein Vorzeichen angegeben ist, ist Σ_c immer positiv zu nehmen. Die Einheit für Σ_c ist $0^p.0001$.

1899		Θ	Ge	Oks	P	Gi	R	S	K	K − S	Δ_g	Σ_c
Feb. 21	aA	$4^h 26^m.5$	v	9.90	II	2	2	2	+ 2°9	− 1°7	219P6819	243
	ab	4 41.6			II	1	2—3	2—3	+ 2.7	− 1.7	200.9769	258
	bB	4 56.2			II	1	2	2	+ 2.4	− 1.8	238.0710	234
	ac	5 18.8			II		2—3	2—3	+ 2.1	− 1.9	291.2755	763
	ad	5 40.9			II	1	2—3	2—3	+ 1.8	− 2.0	181.6691	442
	bc	6 2.2			II	1	3—2	2—3	+ 1.4	− 2.1	207.1114	520
	bd	6 21.4			II		2—3	2—3	+ 1.2	− 2.1	259.6445	195
	cd	6 44.5			I		3	3—2	+ 1.0	− 2.1	191.6935	519
22	aA	4 1.9	v	9.90	II	2	2	2	+ 3.2	− 1.4	219.6772	231
	ab	4 18.3			II		3—2	2—3	+ 2.8	− 1.4	200.9717	241
	bB	4 34.2			II		3—2	2—3	+ 2.5	− 1.5	238.0711	211
27	aA	3 43.4	v	9.90	II	2	3—2	2—3	+ 1.2	− 0.5	219.6830	270
	ab	4 11.7			II	1	2—3	2—3	+ 0.3	− 1.1	200.9673	273
	bB	4 26.1			II	1	3—2	3—2	− 0.2	− 1.4	238.0511	243
	cB	4 46.4			II	1	3—2	2—3	− 0.6	− 1.6	312.0486	481
	dA	5 8.2			I	3	2	2	− 1.0	− 1.7	301.5899	735
	af	5 33.8			II	1	2	2	− 1.4	− 1.8	201.7625	308
	bf	5 54.9			I		2	2	− 1.7	− 1.9	186.8796	589
	a1	7 7.6			I		3—2	2—3	− 2.0	− 2.0	92.5752	405
	b1	7 26.4			II		3—2	2—3	− 2.1	− 2.1	121.6365	240
	c1	7 43.5					3—2	2—3	− 2.2	− 2.2	208.2031	1325
	d1	8 0.7			I		3—2	2—3	− 2.4	− 2.3	160.4482	265
März 6	aA	4 47.2	v	9.90	II	2	2	2	+ 1.6	− 0.8	219.6745	292
	ab	5 3.4			II		2	2	+ 1.1	− 1.2	200.9597	300
	bB	5 16.4			II		2	2	+ 0.7	− 1.4	238.0539	294
	a2	5 48.9					2	2	+ 0.1	− 1.7	87.8481	160
	b2	6 11.7			I		2—3	3—2	− 0.3	− 1.7	117.6271	258
	c2	6 29.5				2	2	2	− 0.5	− 1.8	220.9890	791
	d2	6 49.4			II		2—3	2—3	− 0.8	− 1.8	174.6498	268
	a3	7 30.4			I		2—3	2—3	− 1.2	− 1.7	62.4886	104
	b3	7 46.0					3	3—2	− 1.3	− 1.7	139.0293	681
11	aA	5 21.0	v	10.00	I	2	2	2	+ 10.5	− 0.7	219.6864	150
	ab	5 34.4			I		2	2	+ 10.1	− 0.9	200.9811	179
	bB	5 48.1			I		2	2	+ 9.8	− 1.1	238.0715	167
	c16	6 8.6			II		2	2	+ 9.3	− 1.3	229.5989	97
	d16	6 26.1			I		2	2	+ 8.7	− 1.5	229.7498	552
	d3	6 58.8			II		2	2	+ 7.7	− 1.9	194.0676	252
	a4	7 24.5			II		2	2	+ 7.1	− 2.2	88.1668	46
	d4	7 43.8			II		2	2	+ 6.7	− 2.4	233.3145	261
	b4	7 58.3			I		2	2	+ 6.4	− 2.6	132.0310	775

1899		Θ	*Ge*	*Oks*	*P*	*Gi*	*R*	*S*	*K*	$K-S$	Δ_g	Σ_c
März 13	*aA*	$5^h\,26^m.4$	*v*	10.00	I	2	3 –2	2	+ 8.5	— 1.0	219.7010	180
	ab	5 40.3			I	1	3—2	2	+ 8.0	— 1.4	200.9756	205
	bB	5 55.2			I	1	3—2	2	+ 7.4	— 1.7	238.0795	205
	*c*3	6 15.9			I	1	3 –2	2	+ 6.9	— 2.0	257.4997	672
	*c*4	6 29.5			I		2—3	2	+ 6.6	— 2.1	282.0105	812
	*a*5	6 46.5			II	1	2	2	+ 6.3	— 2.2	11.4914	— 4
	*d*5	7 26.0			II		2	2	+ 5.6	— 2.4	173.3086	466
	*b*5	7 43.8			I		2—3	2	+ 5.4	— 2.5	208.1223	648
	*c*5	8 4.3			I	1	3	2	+ 5.1	— 2.6	289.7912	2058
14	*aA*	5 23.4	*v*	10.00	I	2	2	2	+ 10.8	+ 0.6	219.6848	188
	ab	5 45.2			I	1	2	2—3	+ 9.9	0.0	200.9724	225
	bB	5 59.4			I	1	2	2	+ 9.4	— 0.5	238.0664	225
	*a*6	6 19.8			I		2—3	3—2	+ 8.7	— 1.0	93.5897	244
	*d*6	6 34.1			II		2	2	+ 8.6	— 1.2	96.5163	260
	*b*6	6 48.6			II		2	2	+ 8.0	— 1.4	187.0801	98
	*c*6	7 3.8			I	1	2.	2	+ 7.6	— 1.6	207.9744	810
	*c*7	7 23.9			I	1	2	2	+ 7.1	— 1.8	228.3435	1026
	*b*7	7 41.7			II	1	2	2	+ 6.8	— 1.9	204.4829	285
	*a*7	7 56.8			II	1	2	2	+ 6.5	— 1.9	83.2509	254
	*d*7	8 10.3			I		2	2	+ 6.2	— 2.0	98.9261	359
17	*aA*	5 12.6	*v*	10.00	I	2	3—2	2—3	+ 10.8	+ 0.3	219.6904	158
	ab	5 47.2			I	1	2—3	2	+ 9.7	— 0.5	200.9764	215
	bB	6 1.2			I	1	2—3	2	+ 9.2	— 0.9	238.0725	215
	*a*8	6 20.1			I		2	2	+ 8.6	— 1.1	193.0851	389
	*d*8	6 38.2			II		2	2	+ 8.5	— 1.1	209.0126	64
	*b*8	6 53.0			II		2—3	2—3	+ 8.3	— 1.2	60.7584	8
	*c*8	7 7.1			II		2—3	2—3	+ 8.1	— 1.2	150.1921	402
	*a*9	7 29.3			II		2—3	2—3	+ 7.8	— 1.3	76.8350	35
	*d*9	7 47.3			I		3	3—2	+ 7.6	— 1.4	126.9677	571
	*b*9	8 4.9			I		3	3	+ 7.3	— 1.5	249.0064	773
	*c*9	8 19.6			II		3	3	+ 7.1	— 1.5	281.6340	2252
24	*aA*	6 20.6	*v*	9.90	I	2	3—2	2—3	— 1.0	— 1.2	219.6515	510
	ab	6 34.2			I	1	3—2	2—3	— 1.3	— 1.3	200.9564	536
	bB	6 47.4			I	1	2—3	2	— 1.6	— 1.4	238.0349	638
	*a*10	7 7.6			I		2	2	— 2.2	— 1.7	255.7643	1205
	*d*10	7 21.4			I		2	2	— 2.5	— 2.0	125.0714	604
	*b*10	7 40.4			II		3—2	2	— 3.1	— 2.3	227.4715	489
	*c*10	7 55.5			II		3	2—3	— 3.5	— 2.6	71.0424	298
Okt. 20	*gA*	1 9.7	*f*	9.90	II	3	2	2	+ 5.0	— 1.7	211.1581	1446
	ag	1 28.9			II	1	2	2	+ 4.5	— 1.8	296.8984	1806
	dg	1 51.9			I	1	2—3	2	+ 4.0	— 1.8	233.0915	690
	aA	2 34.3			II	2	2	2	+ 3.3	— 2.0	219.6439	580
	ab	2 54.4			II	1	2—3	2	+ 3.0	— 2.1	200.9361	549
	bB	3 25.0			II	1	3	3—2	+ 2.6	— 2.3	238.0338	540
Nov. 4	*dA*	1 9.8	*f*	10.10	I	3	3	3—2	+ 12.7	— 1.5	301.5944	388
	ad	1 28.5			II	1	3	2—3	+ 12.3	— 1.6	181.6427	739
	aA	1 52.8			II	2	3	3—2	+ 12.0	— 1.5	219.6652	297
	ab	2 10.6			II	1	3	2—3	+ 11.9	— 1.6	200.9589	270
	bB	2 28.1			II	1	3	2—3	+ 11.8	— 1.7	238.0598	195
	bd	2 54.7			II		3	2—3	+ 11.6	— 1.5	259.6054	519
	ac	3 14.5			II		3—2	2—3	+ 11.5	— 1.5	291.2963	526
	cd	3 34.9			I		3—2	2	+ 11.4	— 1.5	191.7210	188
	bc	4 12.1			II	1	2—3	2—3	+ 11.2	— 1.5	207.1260	512
	cB	4 27.4			II	1	2	2	+ 11.1	— 1.5	312.0344	460
	bh	4 56.9			I		2	2	+ 11.1	— 1.3	300.7258	730
	ch	5 17.4			I	1	3—2	2—3	+ 11.0	— 1.3	208.1741	305
5	*hB*	1 9.7	*f*	10.00	II	1	3	3—2	+ 10.6	— 2.2	213.9595	1193
	ai	1 24.7			II	1	3	2—3	+ 10.3	— 2.3	228.8892	1054
	bB	1 41.4			II	1	2—3	2—3	+ 10.1	— 2.3	238.0479	365

1899		Θ	Ge	Oks	P	Gi	R	S	K	K − S	Δ_g	Σ_c
Nov. 5	*ab*	$1^h 55^m 1$	*f*	10.00	II	1	2	2	+ 10?0	— 2?2	200?9511	386
	aA	2 9.7			II	2	2	2	+ 9.9	— 2.1	219.6641	381
	ae	2 43.6			II		2	2	+ 9.6	— 2.1	299.6312	725
	bi	2 59.7			I		2	2	+ 9.5	— 2.0	303.9106	708
	ei	3 18.0			I	1	2	2	+ 9.3	— 2.0	266.7177	360
	iA	3 35.2			II	3	2	2	+ 9.1	— 2.0	311.7164	774
	eB	3 58.3			I	1	2	2	+ 8.9	— 2.0	238.8467	485
	af	4 17.5			II	1	2	2	+ 8.8	— 2.0	201.7369	459
	bf	4 52.8			I		2	2	+ 8.5	— 1.9	186.8631	552
	*d*16	5 11.8			I		2	2	+ 8.4	— 1.8	229.7042	716
	*c*16	5 30.0			II		2	2	+ 8.3	— 1.8	229.5766	423
6	*be*	1 7.5	*f*	10.00	II		3	3	+ 9.3	— 1.6	163.8416	934
	16 17	1 26.5			I		3	3	+ 9.1	— 1.7	133.2307	302
	*c*17	1 45.8			II		3	3	+ 8.9	— 1.7	290.0198	1508
	bB	2 8.8			II	1	3	3	+ 8.7	— 1.7	238.0565	348
	ab	2 31.6			II	1	3—4	3—4	+ 8.5	— 1.7	200.9614	367
	aA	2 50.0			II	2	3—4	3	+ 8.4	— 1.7	219.6683	368
	1*A*	3 16.4			II	2	3	3	+ 8.1	— 1.7	307.8667	512
21	1*e*	1 37.2	*f*	9.90	I	1	3	3	— 0.1	— 1.9	256.8151	1284
	2*e*	1 55.1			II	1	3	3	— 0.2	— 1.8	245.3408	1068
	ab	2 15.9			II	1	3	3	— 0.2	— 1.7	200.9539	511
	bB	2 29.5			II	1	3	3	— 0.2	— 1.6	238.0408	486
	aA	2 43.9			II	2	3	3	— 0.1	— 1.5	219.6515	515
	2*A*	3 0.8			I	2	3—2	3—2	0.0	— 1.4	306.1968	716
	1*i*	3 20.0			I	2	2—3	2—3	+ 0.1	— 1.3	278.5849	994
28	*ab*	2 24.9	*f*	10.00	I	1	2—3	2—3	+ 7.4	— 0.9	200.9537	331
	bB	2 43.0			I	1	2—3	3	+ 7.1	— 1.1	238.0438	270
	aA	3 0.0			I	2	2—3	2—3	+ 6.8	— 1.3	219.6626	313
Dez. 7	*gA*	2 6.1	*f*	9.90	I	3	2—3	3	— 3.0	— 2.1	211.2113	1031
	dA	2 22.2			II	3	2	2	— 3.4	— 2.5	301.5670	724
	ab	2 42.6			I	1	2	2	— 3.8	— 2.7	200.9509	375
	bB	2 58.7			I	1	2	2	— 4.0	— 2.7	238.0551	415
	aA	3 15.1			I	2	2	2	— 4.1	— 2.8	219.6603	396
	2*i*	3 38.3			I	1	2	2	— 4.2	— 2.7	263.9364	796
	3*i*	4 1.6			I		2	2	— 4.2	— 2.6	229.9636	728
	3*e*	4 21.5			I	1	2	2	— 4.3	— 2.5	244.0635	509
	4*e*	4 40.8			I		2—3	2—3	— 4.3	— 2.4	211.4965	429
1900												
Feb. 15	*ab*	3 6.0	*f*	9.90	II	1	2—3	3	— 1.4	— 1.0	200.9611	222
	bB	3 27.0			II	1	3—2	3—2	— 2.2	— 1.5	238.0481	241
	aA	3 45.9			II	2	3	2—3	— 2.9	— 1.9	219.6775	229
	3*A*	4 10.2			II	3	2—3	3	— 3.4	— 2.3	281.5834	353
22	*ae*	3 21.9	*f*	9.90	I		3—2	2	+ 4.7	— 0.7	299.6599	244
	17*c*	3 47.1			I		3	2	+ 3.9	— 1.2	290.0688	610
	aA	4 6.2			II	2	3	2—3	+ 3.5	— 1.4	219.6808	167
	bB	4 24.5			II	1	3—2	2—3	+ 3.2	— 1.4	238.0716	192
	ab	4 44.6			II	1	3—2	2—3	+ 3.0	— 1.3	200.9759	182
	dg	5 4.3			II		2—3	2	+ 2.7	— 1.4	233.1344	214
	4*A*	5 22.0			II	2	2	2	+ 2.3	— 1.7	298.0104	311
März 2	*cB*	4 24.6	*v*	9.90	II	1	3—2	2—3	— 2.5	— 1.8	312.0306	532
	ac	4 45.8			II		3—2	2	— 3.4	— 2.1	291.2875	750
	aA	5 7.9			I	2	2—3	2—3	— 4.1	— 2.4	219.6740	283
	bB	5 26.5			I	1	2—3	2	— 4.3	— 2.5	238.0620	341
	ab	7 6.7			I	1	2	2—3	— 4.8	— 2.6	200.9326	586
Nov. 3	*aA*	0 51.2	*f*	9.90	I	2	3—2	2—3	+ 2.2	— 1.7	219.6202	745
	ab	1 6.7			I	1	3	3—2	+ 1.9	— 1.9	200.9270	669
	bB	1 25.1			I		3	2—3	+ 1.6	— 2.1	238.0308	618

1900		Θ	Ge	Oks	P	Gi	R	S	K	K − S	Δ_g	Σ_c
Dez. 3	*aA*	1h 34m.9	*f*	9.90	I	2	2	2	— 2s.3	— 1s.9	219p.6378	563
	ab	1 51.9			I	1	2	2	— 2.6	— 2.0	200.9336	514
	bB	2 9.3			I	1	2	2	— 2.8	— 2.0	238.0417	471
	11*a*	2 33.5			I	1	2	2	— 2.9	— 2.0	209.5505	465
	11*d*	2 52.4			II		2	2	— 2.9	— 2.0	212.4788	626
	11*b*	3 15.5			II		2	2	— 2.9	— 1.9	71.5618	234
1901												
Jan. 9	*aA*	1 4.9	*f*	9.90	I	2	3	3—2	— 3.0	— 0.6	219.6385	546
	ab	1 23.0			I	1	3	3	— 3.5	— 0.9	200.9602	483
	bB	1 40.8			I	1	3	3—2	— 4.0	— 1.2	238.0642	417
	11*c*	2 5.3			II	2	3—2	3—2	— 4.6	— 1.4	135.8246	562
	ag	3 53.4			I	1	3—2	2—3	— 6.2	— 2.0	296.9863	692
	bd	4 13.8			I		2—3	2	— 6.4	— 2.0	259.6011	490
	bh	4 34.0			II		2	2	— 6.6	— 2.1	300.7070	884
	4*i*	4 56.7			I		2	2	— 6.9	— 2.1	199.6980	618
10	*hB*	1 57.9	*f*	9.80	I	1	3—2	3—2	— 4.7	— 1.4	213.9990	1077
	bB	2 13.0			II	1	2—3	2—3	— 4.9	— 1.5	238.0345	480
	ab	2 27.6			II	1	2—3	2—3	— 5.2	— 1.5	200.9391	486
	aA	2 40.9			II	2	3—2	3—2	— 5.4	— 1.6	219.6533	493
	ch	3 54.7			II	1	2	2	— 6.5	— 1.8	208.1531	451
	ai	4 19.4			I	1	2	2	— 6.7	— 1.9	228.9199	785
	bi	4 39.7			II		2	2	— 7.0	— 2.0	303.8620	1082
	be	4 58.4			I		2	2	— 7.2	— 2.1	163.8840	501
	ei	5 19.5			II	1	2	2	— 7.4	— 2.2	266.7016	698
	iA	5 41.5			I	3	2—3	3—2	— 7.6	— 2.4	311.6277	754
	eB	6 1.5			II	1	3	3	— 7.9	— 2.5	238.8172	964
11	16 17	0 22.3	*f*	9.80	II		3	2—3	— 5.4	— 1.2	133.2063	394
	16*c*	0 45.1			II		3	2—3	— 6.0	— 1.4	229.4137	2076
	16*d*	1 4.7			I		3—2	2—3	— 6.5	— 1.7	229.6670	1227
	bB	1 28.1			II	1	3	3—2	— 7.0	— 1.9	238.0265	565
	ab	1 45.4			II	1	3	3—2	— 7.2	— 2.0	200.9424	543
	aA	2 7.4			II	2	2—3	2—3	— 7.5	— 2.1	219.6397	533
	bf	2 29.8			I		2	2	— 7.7	— 2.1	186.8456	645
	af	4 9.9			II	1	2	2	— 8.5	— 2.2	201.7235	609
	5*e*	4 32.6			I		2	2	— 8.6	— 2.2	310.3458	797
	5*g*	4 51.4			I		2	2	— 8.6	— 2.1	285.6670	656
	5*A*	5 11.4			II	3	2	2	— 8.7	— 2.1	213.2158	534
	6*e*	5 41.5			I		3—2	2	— 8.9	— 2.0	327.3179	772
	6*i*	6 1.3			I		3—2	2	— 9.0	— 2.0	317.4323	1242
14	*bB*	2 22.6	*f*	9.80	II	1	2	3—2	— 8.4	— 2.3	238.0468	488
	ab	2 38.0			II	1	2	2	— 8.6	— 2.6	200.9446	484
	aA	2 51.7			II	2	2	2	— 8.9	— 2.8	219.6392	496
	7*A*	3 10.6			II	2	2	2	— 9.0	— 2.6	250.2264	558
	6*A*	4 21.4			II	2	2	2	— 9.2	— 2.4	271.9731	753
	6*g*	4 38.3			I	1	2	2	— 9.5	— 2.5	277.7446	630
	7*i*	5 1.6			I	1	2	2	— 9.8	— 2.5	311.2601	1211
	7*g*	5 25.9			I	1	2	2	— 10.2	— 2.6	260.4075	520
	8*e*	5 46.2			I	1	2	2	— 10.5	— 2.6	224.5127	624
	8*h*	6 7.1			II	1	2	2	— 10.8	— 2.7	276.3506	1274
15	8*B*	1 6.1	*f*	9.80	II	1	3—2	2—3	— 5.3	— 0.7	261.3121	936
	9*A*	1 28.8			II	2	3—2	3—2	— 5.7	— 1.0	195.2851	467
	bB	1 53.1			II	1	2—3	2—3	— 6.2	— 1.3	238.0262	519
	ab	2 17.6			II	1	3	3	— 6.5	— 1.5	200.9345	498
	aA	2 39.5			II	2	3	3	— 6.8	— 1.7	219.6437	499
	if	4 30.7			II		3—2	2	— 8.8	— 2.5	130.0865	
	ef	4 49.9			II		2—3	2	— 9.0	— 2.5	14	
	9*i*	5 10.0			I		2	2—3	— 9.2	— 2.5		
	9*g*	5 38.9			I	1	2	2	— 9.5	— 2.4		
	h 10	6 5.4			II		2	2	— 9.8	— 2		

1902		Θ	Ge	Oks	P	Gi	R	S	K	K − S	Δ_g	Σ_c
Jan. 27	*aA*	$5^h\ 0^m.9$	*v*	9.90	II	2	2	2	−2.2	−1.8	219.6481	337
	ab	5 20.5			II	1	2	2	−2.5	−1.9	200.9542	352
	bB	5 36.8			II	1	2	2	−2.8	−2.0	238.0454	369
	gA	6 2.7			II	3	2	2	−3.1	−2.0	211.2306	577
	ag	6 23.2			I	1	2	2	−3.1	−2.0	297.0048	390
	ad	6 41.9			II	1	2	2	−3.2	−2.0	181.6461	549
	dg	6 59.0			II	1	2	2	−3.3	−2.0	233.1026	551
29	*aA*	2 36.1	*v*	9.90	I	2	3—2	3	+2.2	−1.5	219.6500	263
	ab	2 59.5			I	1	3—2	2—3	+2.1	−1.3	200.9544	256
	bB	3 30.8			I	2	3—2	3	+2.0	−1.1	238.0478	202
30	*aA*	4 45.8	*v*	9.90	I	2	3—2	3—2	−0.9	−1.8	219.6533	319
	ab	5 2.0			I	1	2—3	2—3	−1.2	−2.0	200.9522	326
	bB	5 22.7			I	2	3—2	3—2	−1.7	−2.2	238.0420	336
	bd	5 47.3			II		2—3	2—3	−2.0	−2.3	259.6196	262
	bc	6 11.2			I	1	2—3	2—3	−2.1	−2.3	207.1139	574
	cd	6 28.0			II	1	2—3	2—3	−2.2	−2.2	191.6996	524
	bh	6 49.5			II		2—3	2—3	−2.2	−2.2	300.6505	1429
	hB	7 11.0			II		3	3	−2.4	−2.3	214.0349	870
	if	7 29.4			II		3—2	3—2	−2.7	−2.6	130.0677	663
Feb. 4	*bB*	2 35.3	*v*	9.90	I	2	2—3	3—2	−1.5	−1.5	238.0348	251
	ab	2 58.1			I	1	2—3	3	−1.9	−1.7	200.9503	284
	aA	3 18.4			I	2	3	3	−2.4	−2.0	219.6543	280
	ef	3 45.6			I		2—3	2	−2.7	−2.2	142.6963	178
	ch	4 4.7			I	1	2—3	2—3	−2.9	−2.3	208.1654	260
	ai	5 16.1			II	1	2—3	2—3	−3.5	−2.5	228.9324	534
	ae	5 36.2			I		2—3	2	−3.6	−2.4	299.6408	379
	bi	5 53.4			II		3—2	2—3	−3.7	−2.4	303.8850	983
	be	6 10.1			I		3—2	2—3	−3.8	−2.4	163.9036	233
	ei	6 27.7			II		3—2	2—3	−3.9	−2.4	266.6971	742
	ef	6 47.1			I		3—2	2—3	−4.0	−2.3	142.6710	429
10	*bB*	4 4.8	*v*	9.90	I	2	3—2	2—3	+0.6	−1.0	238.0631	218
	ab	4 25.8			I	1	3	2—3	−0.2	−1.5	200.9734	268
	aA	4 46.8			I	2	3	2—3	−1.0	−1.9	219.6551	286
	if	5 17.1			II		3	3	−1.7	−2.1	130.1062	247
	12*g*	5 35.7			I	1	3	2—3	−2.0	−2.0	140.0246	337
	12*A*	5 58.4			I	2	3	3	−2.3	−2.0	288.5973	938
	12*d*	6 23.6			I	1	3	3	−2.7	−2.0	117.1828	202
23	*aA*	4 8.7	*v*	9.90	II	2	3—2	2—3	+2.7	−1.1	219.6580	243
	ab	4 26.6			II	1	3—2	2—3	+2.0	−1.4	200.9582	251
	bB	4 44.0			II	2	3—2	2—3	+1.4	−1.7	238.0559	225
	12*a*	5 8.4			II		3	3—2	+0.9	−2.0	259.2201	421
	13*A*	5 27.4			II	2	3	3—2	+0.7	−2.0	165.8715	162
	14*A*	5 53.6			II	2	3—2	2—3	+0.3	−2.1	174.6462	215
	13*g*	6 12.8			II	1	3—2	3—2	+0.1	−2.2	143.6505	410
	14*g*	6 35.9			II	1	3—2	3—2	−0.2	−2.2	126.3389	427
	15*A*	6 58.1			I	2	3—2	3—2	−0.4	−2.3	119.2344	160
	15*g*	7 21.7			I		3	3	−0.7	−2.3	136.9889	673
25	*aA*	4 7.6	*v*	9.90	II	2	3	2—3	+0.9	−1.3	219.6546	251
	ab	4 22.3			II	1	3—2	2—3	+0.4	−1.6	200.9637	259
	bB	4 43.1			II	1	2—3	2—3	−0.5	−2.0	238.0627	232
	15*d*	5 12.4			II		2—3	2—3	−1.2	−2.3	319.8301	604
	15*a*	5 39.5			I		3—2	3—2	−1.6	−2.4	303.4656	364
1903 Okt. 29	*gA*	1 19.4	*f*	10.00	II	3	3	3—2	+7.3	−1.6	211.1491	1182
	dA	1 39.5			II	3	3	3—2	+7.0	−1.9	301.5551	627
	aA	2 3.5			II	2	3	3—2	+6.9	−1.9	219.6489	443
	ab	2 22.4			II	1	3	3—2	+6.8	−1.7	200.9474	412
	bB	2 39.6			II	1	3	3—2	+6.8	−1.5	238.0533	372
	hB	3 21.9			II	1	3—2	3—2	+7.3	−1.1	214.0271	724
	cB	3 45.4			II		3—2	2—3	+7.7	−0.9	311.9907	782

1903		Θ	Ge	Oks	P	Gi	R	S	K	K − S	Δ_g	Σ_c
Nov. 5	*aA*	1h 8m.5	*f*	10.00	II	2	3	3	+5°.5	−1°.3	219P.6231	552
	ab	1 38.5			II	1	3	3	+4.9	−1.6	200.9415	442
	bB	1 57.3			II	1	3	3	+4.6	−1.8	238.0484	435
	5*i*	2 22.9			II		3	3	+4.3	−1.9	238.1627	863
	ag	2 44.7			II	1	3	3	+4.4	−1.8	296.9578	1002
16	*aA*	1 5.3	*f*	10.00	I	2	3	2—3	+4.5	−1.2	219.6237	492
	ab	1 28.6			I	1	3	2—3	+4.2	−1.3	200.9402	453
	bB	1 54.9			I	1	3	3—2	+3.8	−1.4	238.0335	397
	ad	2 26.3			II	1	3—2	2	+3.4	−1.6	181.6341	700
Dez. 3	*aA*	1 13.4	*f*	9.85	I	2	3	2	−4.3	−2.1	219.6111	649
	ab	1 31.9			I	1	3	2	−4.6	−2.1	200.9195	608
	bB	1 51.4			I	2	3	2	−4.9	−2.2	238.0241	592
	ad	2 22.2			II	1	3—2	2	−5.3	−2.2	181.6241	884
	dg	2 44.5			II		3—2	2	−5.6	−2.2	233.1072	583
4	*aA*	1 23.5	*f*	9.85	I	2	3—4	3—4	−5.4	−2.0	219.6142	619
	ab	1 38.5			I	1	3	3	−5.7	−2.1	200.9223	590
	bB	2 0.6			I	2	3	3	−6.0	−2.2	238.0312	568
	bd	2 32.3			I		3	3	−6.2	−2.0	259.5434	983
	bc	2 50.0			II	1	3	3	−6.2	−1.9	207.0624	924
	ac	3 8.9			II		2	2	−6.3	−1.8	291.2715	979
	cd	3 23.4			II	1	2	2	−6.4	−1.7	191.7132	467
	bh	3 55.1			II		2	2	−6.5	−1.7	300.6877	1032
	cB	4 12.3			I	1	2	2	−6.7	−1.8	311.9615	937
	*c*16	4 31.1			I	1	3—2	3—2	−6.8	−1.9	229.5602	707
	*d*16	4 50.1			II		2	2	−6.9	−2.0	229.6712	914
10	*bB*	1 10.6	*f*	9.85	I	2	2—3	3	+1.2	−1.1	238.0270	592
	ab	1 28.2			I	1	3	3—2	+0.7	−1.4	200.9365	544
	aA	1 46.9			I	2	3	3—2	+0.2	−1.7	219.6470	492
	ch	2 16.0			II	1	3—2	3—2	−0.2	−1.9	208.1444	448
	ai	2 42.9			II	1	3	3	−0.6	−2.0	228.9388	887
	ae	3 59.2			I		3	2—3	−0.8	−2.0	299.6384	703
	bi	4 22.2			II		3	2—3	−0.9	−1.8	303.8965	979
1904 Jan. 27	*bB*	1 42.1	*f*	9.85	I	2	2	3—2	−1.3	−0.9	238.0311	417
	ab	2 1.8			I	1	3	3	−1.9	−1.2	200.9528	396
	aA	2 19.2			I	2	3	3	−2.5	−1.5	219.6491	347
	bf	2 40.3			II		3	3	−3.0	−1.8	186.8552	529
	be	3 3.7			I		3	3	−3.5	−1.9	163.8616	492
	*c*16	3 54.0			II		3	3	−4.5	−2.2	229.5555	613
Feb. 7	*bB*	2 21.3	*v*	9.90	I	2	2	2	+5.2	−0.3	238.0434	219
	ab	2 40.4			I	1	2—3	3	+4.6	−0.7	200.9615	231
	aA	2 59.6			I	2	2	2	+4.1	−1.1	219.6643	178
	ei	3 27.6			I	1	3	3	+3.4	−1.5	276.7347	208
	if	3 46.3			I		2	2	+3.3	−1.4	130.1138	143
	ef	4 17.6			I		3	3	+3.1	−1.4	142.6836	173
	af	4 39.7			II	1	3	3	+3.0	−1.3	201.7426	316
	16 17	5 4.8			I		3	3	+2.9	−1.2	133.2286	372

1899 Feb. 22. Nach *bB* total trübe.

Feb. 27. Der Normalbogen in der Dämmerung beobachtet, Feldbeleuchtung brennt dabei.

März 13. Starker Rauch sehr störend.

März 17. Mondschein. Bei *aA* die Sonne noch über dem Horizonte.

1899 Okt. 20. Mondschein. Das Uhrwerk versagte zeitweilig. Abgebrochen wegen zu großer Luftfeuchtigkeit.
Nov. 21. Einzelne Wölkchen am Monde traten schon im Anfange auf; nach und nach bewölkte es sich immer mehr; am Schlusse völlig trübe.
Dez. 7. Luft schneeig, nach $3e$ Wolken, nach $4e$ total trübe.
1900 Feb. 15. Immer stark nebelig, zuletzt Sterne kaum noch sichtbar.
Feb. 22. Im Anfang Dämmerung, am Schluß trübe.
März 2. Zwischen bB und ab trübe, nach ab wieder trübe.
Nov. 3. Mondschein, nach dem Normalbogen total trübe.
Dez. 3. Mondschein. Bei $11a$, $11b$, $11d$ Feldbeleuchtung sehr schwach. Wegen Mondschein und Beschlagen des Okulares Sterne recht schwach.
1901 Jan. 9. $5i$ und $11c$ bei dunklem Feld beobachtet.
Jan. 14. Unten dicker Nebel.
1902 Jan. 29. Oft durch Wolken unterbrochen und teilweise durch Wolken beobachtet.
Feb. 4. Der Normalbogen meist durch Wolken beobachtet. Bis zum Schlusse häufig Nebel.
Feb. 25. Zwischen $15d$ und $15a$ Wolken.
1903 Okt. 29. Nach bB tritt plötzlich Nebel ein; von cB nur drei Einstellungen erhalten wegen Nebel.
Nov. 5. Mond sehr nahe bei den Hyaden. Oft durch Wolken unterbrochen. Am Schluß trübe.
Nov. 16. Sehr oft durch Wolken gestört. Bei den zwei letzten Einstellungen von ad die Sterne kaum noch zu sehen, dann total trübe.
Dez. 3. Mond nahe den Hyaden. Abgebrochen, da die Bilder plötzlich zum Messen zu schlecht wurden.
Dez. 4. Mond sehr nahe den Hyaden.
1904 Jan. 27. Mond den Hyaden sehr nahe.
Feb. 7. Bei ei Wolken.

Der Normalbogen.

Erfahrungen bei anderen Beobachtungsreihen, die ich mit dem REPSOLDschen Heliometer der Leipziger Sternwarte ausgeführt habe, lassen vermuten, daß die gemessenen Distanzen, auch wenn

sie ganz streng auf eine bestimmte Temperatur und Okularstellung reduziert werden, doch noch mit kleinen systematischen Fehlern behaftet bleiben, die man für den einzelnen Abend als konstant und der Größe der Distanz proportional ansehen kann. Mit anderen Worten kann man sagen, daß man nicht berechtigt ist, den Skalenwert über einen längeren Zeitraum hinweg als völlig konstant anzunehmen, sondern daß man ihn — allerdings innerhalb sehr enger Grenzen — als von Abend zu Abend variierend ansehen muß. Die Ursachen für diese Variationen liegen nicht klar zu Tage, vermutlich sind sie sowohl im Instrument als auch im Beobachter zu suchen.

Aus diesem Grunde ist man bei den vorliegenden Distanzmessungen gezwungen, nach einem Mittel zu suchen, durch das man die Beobachtungen zusammengehöriger Abende miteinander verbinden kann, d. h. man muß an jedem Abende den Skalenwert direkt durch besondere Beobachtungen bestimmen.

Im vorliegenden Falle sind an *jedem* Abende die drei aneinander stoßenden und sehr nahe auf einem größten Kreise liegenden Distanzen aA, ab, bB gemessen worden. Die Sterne A und B gehören dem Fundamentalkatalog an. Unter der Voraussetzung, daß man die relative Bewegung der Endsterne des Bogens AB mit der nötigen Schärfe kennt, kann man ihn als Normalbogen benutzen und die anderen Distanzen auf einen bestimmten angenommenen Wert dieses Bogens reduzieren. Nach Anbringung aller erforderlichen Reduktionen einschließlich der Reduktion auf eine feste Epoche ergeben die Beobachtungen der drei Distanzen des Normalbogens für jeden Abend einen Wert $aA + ab + bB = S$. Wäre der Skalenwert konstant, so wäre auch der Wert von S innerhalb der zufälligen Beobachtungsfehler an allen Abenden der gleiche. Bezeichnet man mit S_0 den Normalwert von S, welcher der ganzen Beobachtungsreihe zugrunde gelegt werden soll, mit S_n einen beliebigen Abendwert von S, so ist an eine Distanz Δ, wenn dieser der Abendwert S_n zugehört, die Reduktion $\Delta(S_n - S_0) : S_n$ anzubringen, um Δ auf den durch S_0 definierten gemeinsamen Skalenwert zu reduzieren. Da der Bogen zwischen den Sternen A und B auch zur Ermittelung des Skalenwertes bestimmt ist, wählt man am richtigsten für S_0 das Mittel aus sämtlichen Abendwerten S_n. Das Resultat, zu dem man auf diesem Wege gelangt, ist das gleiche, als wenn man tatsächlich

für jeden einzelnen Abend aus S_n den Skalenwert bestimmt und mit diesem Werte alle an diesem Abende gemessenen Distanzen in Bogenmaß umsetzt.

Die relative Bewegung der Endsterne des Normalbogens setzt sich zusammen aus der Wirkung ihrer Eigenbewegungen und ihrer Parallaxe. Die näheren Angaben über die Werte der Eigenbewegung, die der Reduktion zugrunde gelegt worden sind, finden sich weiterhin in dem Abschnitte „Eigenbewegungen". Man kann wohl annehmen, daß die Unsicherheit in den angenommenen Werten den Betrag von 0".01 nicht wesentlich überschreiten wird. Die Parallaxe von A (α Tauri) ist von ELKIN[1]) mit dem Heliometer der Sternwarte in Newhaven bestimmt worden. Er findet $\pi = +\,0''.109 \pm 0''.014$; es ist dies das Resultat des Anschlusses an neun Vergleichsternpaare. Man darf annehmen, daß die wirkliche Unsicherheit des Resultates nicht viel größer sein wird als sein mittlerer Fehler. Für die Befreiung der gemessenen Distanz aA von Parallaxe hat man die Relation

$$\text{beobachtete Distanz} = \text{mittlere Distanz} + 0.99540\,\pi R \cos(\odot - 157^\circ 52'),$$

wo $\pi = 0''.109 = 0^p00502$ angenommen ist. — Von B liegt noch keine Bestimmung der Parallaxe vor. Weiterhin wird aber der Nachweis erbracht werden, daß die Parallaxe von B, wenn sie überhaupt merklich ist, an der Grenze der Meßbarkeit liegt.

Für den Normalbogen als solchen kommen die Eigenbewegung und die Parallaxe der beiden dazwischen liegenden Sterne a und b nicht in Betracht. Da aber a und b zu den durch die Triangulation festzulegenden Sternen gehören, so sind die Distanzen aA, ab, bB auch wegen der Eigenbewegungen von a und b korrigiert worden. Betreffs dieser Eigenbewegungen selbst ist auf den weiterhin folgenden Abschnitt über die Ableitung der Eigenbewegungen zu verweisen. Als Epoche, auf welche sich die Distanzen beziehen sollen, ist 1900.0 gewählt.

In der nachstehenden Zusammenstellung finden sich in den drei ersten Spalten nach der Datumspalte unter (aA), (ab), (bB) die Beträge der drei Distanzen angegeben, wie sie sich nach voll-

1) WILLIAM L. ELKIN, Determination of the parallax of the ten first magnitude stars in the northern hemisphere. — Researches with the heliometer. Transactions of the Astr. Observatory of Yale University. Vol. I, Part VI. Newhaven 1902.

ständiger Befreiung von den Instrumentalfehlern einschließlich der Teilungsfehler, ferner von Refraktion und Aberration ergeben. Die wegen Eigenbewegung und bei (aA) auch wegen Parallaxe reduzierten Werte sind unter aA, ab, bB aufgeführt. Die Bedeutung der weiteren Spalten ist aus ihren Überschriften zu entnehmen.

			(aA)	(ab)	(bB)	aA	ab	bB	S_n	$S_n - S_0$
			219p	201p	238p	219p	201p	238p	658p	
1899	Feb.	21	7062	0027	0944	7080	0028	0941	8049	−0p0282
		22	7003	9958	0922	7022	9959	0919	7900	−0.0133
		27	7100	9946	0754	7119	9947	0751	7817	−0.0050
	März	6	7037	9897	0833	7056	9898	0831	7785	−0.0018
		11	7014	9990	0882	7033	9991	0880	7904	−0.0137
		13	7190	9961	1000	7209	9962	0998	8169	−0.0402
		14	7036	9949	0889	7055	9950	0887	7892	−0.0125
		17	7062	9979	0940	7080	9980	0938	7998	−0.0231
		24	7025	0100	0987	7042	0101	0985	8128	−0.0361
	Okt.	20	7019	9910	0878	6980	9910	0877	7767	0.0000
	Nov.	4	6949	9859	0793	6922	9859	0793	7574	+0.0193
		5	7022	9897	0844	6995	9897	0844	7736	+0.0031
		6	7051	9981	0913	7005	9981	0913	7899	−0.0132
		21	7030	0050	0894	7019	0050	0894	7963	−0.0196
		28	6939	9868	0708	6935	9868	0708	7511	+0.0256
	Dez.	7	6999	9884	0966	7004	9884	0966	7854	−0.0087
1900	Feb.	15	7004	9833	0722	7058	9833	0722	7613	+0.0154
		22	6975	9941	0908	7030	9941	0908	7879	−0.0112
	März	2	7023	9912	0961	7079	9912	0961	7952	−0.0185
	Nov.	3	6947	9939	0926	6956	9938	0929	7823	−0.0056
	Dez.	3	6941	9850	0888	6978	9849	0891	7718	+0.0049
1901	Jan.	9	6931	0085	1059	7000	0084	1062	8146	−0.0379
		10	7026	9877	0825	7096	9876	0828	7800	−0.0033
		11	6930	9967	0830	7002	9966	0833	7801	−0.0034
		14	6888	9930	0956	6962	9929	0959	7850	−0.0083
		15	6936	9843	0781	7010	9842	0784	7636	+0.0131
1902	Jan.	27	6818	9894	0823	6936	9893	0829	7658	+0.0109
		29	6763	9800	0680	6882	9799	0686	7367	+0.0400
		30	6852	9848	0756	6972	9847	0762	7581	+0.0186
	Feb.	4	6823	9787	0599	6945	9786	0605	7336	+0.0431
		10	6837	0002	0849	6961	0001	0855	7817	−0.0050
		23	6823	9833	0784	6951	9832	0790	7573	+0.0194
		25	6797	9896	0859	6926	9895	0865	7686	+0.0081
1903	Okt.	29	6932	9886	0905	7045	9883	0916	7844	−0.0077
	Nov.	5	6783	9857	0919	6902	9854	0931	7687	+0.0080
		16	6729	9855	0732	6857	9852	0744	7453	+0.0314
	Dez.	3	6760	9803	0833	6905	9800	0845	7550	+0.0217
		4	6761	9813	0880	6907	9810	0892	7609	+0.0158
		10	6962	9909	0862	7114	9906	0874	7894	−0.0127
1904	Jan.	27	6838	9924	0728	7029	9921	0740	7690	+0.0077
	Feb.	7	6821	9846	0653	7017	9843	0665	7525	+0.0242

Als Mittelwerte von aA, ab und bB und S_n findet man

$$aA = 219^p.7002, \quad ab = 200^p.9911, \quad bB = 238^p.0854$$

$$S_0 = 658^p.7767.$$

Mit diesem Werte S_0 sind die angesetzten Zahlen $S_n - S_0$ in der letzten Spalte gefunden worden, die zur Reduktion auf den gemeinsamen Skalenwert dienen.

Zunächst ist jedoch noch eine Untersuchung darüber erforderlich, ob die Abweichungen $S_n - S_0$ tatsächlich den Charakter von systematischen Abendfehlern tragen oder ob sie nicht etwa nur als rein zufällige Beobachtungsfehler anzusehen sind. In letzterem Falle würde eine auf ihnen beruhende Reduktion der gemessenen Distanzen auf gleichen Skalenwert illusorisch sein.

Die geforderte Untersuchung ist an den Distanzen aA, ab, bB selbst auszuführen und zwar in der Weise, daß man für jede von ihnen den mittleren Fehler eines Abendes einerseits aus den unmittelbar erhaltenen Werten bestimmt und andererseits aus diesen Werten, nachdem man sie mit Hilfe von $S_n - S_0$ auf den gemeinsamen Skalenwert reduziert hat. Die Vergleichung der Größe dieser mittleren Fehler bietet das Kriterium dafür, ob die Werte $S_n - S_0$ nur durch rein zufällige Beobachtungsfehler erzeugt sind oder ob bei ihrem Zustandekommen wesentlich auch systematische Fehlerquellen mitgewirkt haben.

Bezeichnet man die mit der Reduktion $\Delta(S_n - S_0) : S_n$ versehenen Werte mit $[aA]$, $[ab]$, $[bB]$, so erhält man für den mittleren Fehler eines Abendes

bei $aA : \pm 0^p.0072$, $ab : \pm 0^p.0076$, $bB : \pm 0^p.0098$,

bei $[aA] : \pm 0.0055$, $[ab] : \pm 0.0039$, $[bB] : \pm 0.0053$.

Der Durchschnittswert der oberen Reihe ist $\pm 0^p.0082$, der der unteren $\pm 0^p.0049$. Es erscheint hiernach als sicher, daß die Abweichungen der Einzelwerte S_n von ihrem Mittelwerte S_0 zu einem sehr wesentlichen Teile nicht als zufällige Beobachtungsfehler, sondern als konstante Abendfehler anzusehen sind, und daß demnach die Berücksichtigung der Größen $S_n - S_0$ bei der Reduktion der an verschiedenen Abenden gemessenen Distanzen angezeigt ist.

Die Parallaxen der Sterne *a*, *b* und *B*.

Die Messungen der Distanzen aA, ab, bB bieten ein ganz vortreffliches Material, um einerseits die relative Parallaxe von a gegen A und b, andererseits die von b gegen a und B zu bestimmen. Die gleichen Messungen lassen sich auch benutzen zu einer Feststellung, ob B eine stärkere Parallaxe besitzt, wenn sie auch zu ihrer wirklichen Bestimmung nicht brauchbar sind. Zunächst soll die ein selbständiges Interesse bietende Untersuchung über die relativen Parallaxen von a und b ausgeführt werden.

Den Ausgangspunkt für die Rechnung bilden die am Schluß des vorigen Abschnittes gegebenen Werte aA, ab, bB. Es kann mit diesen, auf die Epoche 1900.0 reduzierten Distanzen die Rechnung in der gleichen Weise durchgeführt werden, wie es bei meinen früheren Bestimmungen von Fixsternparallaxen geschehen ist. Dementsprechend wird die Parallaxe hergeleitet aus $aA - ab$ oder $bB - ab$, wobei die Summen $aA + ab$ oder $ab + bB$ zur Reduktion auf gleichen Skalenwert dienen. Um diese Summen als konstant ansehen zu können, hat man sie zunächst von dem Einfluß der Parallaxen der Sterne a und b zu befreien. Man findet für diesen Einfluß

$$\text{bei } aA + ab: \quad 0.0048\,\pi_1 R \cos(\odot - 209^\circ 41'),$$
$$\text{bei } ab + bB: \quad 0.0004\,\pi_2 R \cos(\odot - 36^\circ 34').$$

Selbst wenn π_1 und π_2 den Betrag von 1″ erreichten, kann man sonach von einer Reduktion der Summen völlig absehen. Benutzt worden sind zur Herleitung der Parallaxe sämtliche 41 Beobachtungsabende und zwar alle mit gleichem Gewichte. Für die auf gleichen Skalenwert reduzierten Differenzen der Distanzen ergibt sich schließlich die nachfolgende Reihe von Werten, worin die Größen C und C' die Reduktion auf gleichen Skalenwert für $aA - ab$ und $bB - ab$ bedeuten. Im Maximum betragen diese Reduktionen $0^{p}.0010$ (für C) und $0^{p}.0032$ (für C').

	$aA-ab+C$	$bB-ab+C'$		$aA-ab+C$	$bB-ab+C'$
1899 Feb. 21	18P7043	37P0896	1901 Jan. 9	18P6908	37P0946
22	7060	0950	10	7217	0957
27	7165	0810	11	7034	0864
März 6	7156	0936	14	7034	1020
11	7037	0880	15	7171	0954
13	7236	1020	1902 Jan. 27	7047	0940
14	7101	0931	29	7093	0911
17	7093	0945	30	7129	0928
24	6931	0857	Feb. 4	7167	0851
Okt. 20	7071	0965	10	6958	0846
Nov. 4	7069	0944	23	7125	0970
5	7099	0949	25	7035	0970
6	7021	0921	1903 Okt. 29	7161	1030
21	6962	0829	Nov 5	7055	1075
28	7072	0856	16	7014	0906
Dez. 7	7121	1075	Dez. 3	7114	1055
1900 Feb. 15	[illegible]	09 [illegible]	4	7106	1087
			10	7203	0967
			1904 Jan. 27	7106	0828
			Feb. 7	7176	0844

Man sieht schon aus dem Verlaufe dieser Zahlen, daß weder für a noch für b eine erhebliche Parallaxe vorhanden sein kann.

Bezeichnen wir die gesuchte Parallaxe von a mit π_1, die von b mit π_2, die mit Parallaxe behaftete Differenz mit D', die von Parallaxe befreite mit D, so haben wir bei

$$aA - ab: \quad D' = D + 1.9941\,\pi_1 R\cos(\odot - 336^\circ 39'),$$
$$bB - ab: \quad D' = D + 1.9971\,\pi_2 R\cos(\odot - 155^\circ 32').$$

Die größten parallaktischen Verschiebungen gegen die Vergleichsterne finden daher Ende Februar und Ende August statt.

Gehen wir von den Mittelwerten $D(1)$ und $D(2)$ der korrigierten Differenzen $aA - ab + C$ und $bB - ab + C'$ aus und nennen ihre durch die Ausgleichung zu ermittelnden Korrektionen x_1 und x_2, so haben wir $D(1) = 18^p.7091$ und $D(2) = 37^p.0943$.

Wenn wir $0^p.01$ als Einheit für das unbenannte Glied wählen, ferner mit e_1 und e_2 die Verbesserungen der den Reduktionen zugrunde liegenden Eigenbewegungen bezeichnen, so erhalten wir schließlich die nachstehenden beiden Systeme von Beobachtungsgleichungen, denen jeweilig rechts noch die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Widersprüche im Sinne „Beob. — Rech." beigefügt sind.

Stern *a*.

$x_1 - 1.86e_1$	$+ 1.97\pi_1$	$= - 0.48$	$- 0^p.0047$	$x_1 + 0.02e_1$	$+ 1.32\pi_1$	$= - 1.83$	$- 0^p.0187$
$x_1 - 1.86$	$+ 1.97$	$= - 0.31$	$- 30$	$x_1 + 0.02$	$+ 1.34$	$= + 1.26$	$+ 122$
$x_1 - 1.84$	$+ 1.97$	$= + 0.74$	$+ 74$	$x_1 + 0.03$	$+ 1.37$	$= - 0.57$	$- 61$
$x_1 - 1.82$	$+ 1.95$	$= + 0.65$	$+ 66$	$x_1 + 0.04$	$+ 1.44$	$= - 0.57$	$- 61$
$x_1 - 1.81$	$+ 1.92$	$= - 0.54$	$- 53$	$x_1 + 0.04$	$+ 1.46$	$= + 0.80$	$+ 74$
$x_1 - 1.80$	$+ 1.90$	$= + 1.45$	$+ 146$	$x_1 + 1.07$	$+ 1.71$	$= - 0.44$	$- 60$
$x_1 - 1.80$	$+ 1.89$	$= + 0.10$	$+ 11$	$x_1 + 1.08$	$+ 1.74$	$= + 0.02$	$- 15$
$x_1 - 1.79$	$+ 1.86$	$= + 0.02$	$+ 4$	$x_1 + 1.08$	$+ 1.76$	$= + 0.38$	$+ 21$
$x_1 - 1.77$	$+ 1.77$	$= - 1.60$	$- 157$	$x_1 + 1.09$	$+ 1.83$	$= + 0.76$	$+ 58$
$x_1 - 1.20$	$- 1.26$	$= - 0.20$	$+ 19$	$x_1 + 1.11$	$+ 1.90$	$= - 1.33$	$- 152$
$x_1 - 1.16$	$- 0.81$	$= - 0.22$	$+ 11$	$x_1 + 1.15$	$+ 1.97$	$= + 0.34$	$+ 14$
$x_1 - 1.15$	$- 0.77$	$= + 0.08$	$+ 41$	$x_1 + 1.15$	$+ 1.97$	$= - 0.56$	$- 76$
$x_1 - 1.15$	$- 0.75$	$= - 0.70$	$+ 26$	$x_1 + 2.82$	$- 1.03$	$= + 0.70$	$+ 79$
$x_1 - 1.11$	$- 0.25$	$= - 1.29$	$- 103$	$x_1 + 2.84$	$- 0.81$	$= - 0.36$	$- 30$
$x_1 - 1.09$	$- 0.01$	$= - 0.19$	$+ 3$	$x_1 + 2.87$	$- 0.45$	$= - 0.77$	$- 76$
$x_1 - 1.07$	$+ 0.30$	$= + 0.30$	$+ 48$	$x_1 + 2.92$	$+ 0.13$	$= + 0.25$	$+ 16$
$x_1 - 0.88$	$+ 1.94$	$= + 1.35$	$+ 48$	$x_1 + 2.92$	$+ 0.17$	$= + 0.15$	$+ 7$
$x_1 - 0.86$	$+ 1.97$	$= - 0.05$	$+ 30$	$x_1 + 2.94$	$+ 0.37$	$= + 1.12$	$+ 101$
$x_1 - 0.84$	$+ 1.97$	$= + 0.73$	$+ 108$	$x_1 + 3.07$	$+ 1.70$	$= + 0.15$	$- 15$
$x_1 - 0.16$	$- 0.86$	$= - 0.72$	$- 45$	$x_1 + 3.10$	$+ 1.86$	$= + 0.85$	$+ 53$
$x_1 - 0.08$	$+ 0.16$	$= + 0.42$	$+ 55$				

Stern *b*.

$x_2 - 1.86e_2$	$- 1.97\pi_2$	$= - 0.47$	$- 0^p.0016$	$x_2 - 1.81e_2$	$- 1.91\pi_2$	$= - 0.63$	$- 0^p.0034$
$x_2 - 1.86$	$- 1.98$	$= + 0.07$	$+ 38$	$x_2 - 1.80$	$- 1.90$	$= + 0.77$	$+ 106$
$x_2 - 1.84$	$- 1.98$	$= - 1.33$	$- 104$	$x_2 - 1.80$	$- 1.86$	$= - 0.12$	$+ 6$
$x_2 - 1.82$	$- 1.95$	$= - 0.07$	$+ 23$	$x_2 - 1.79$	$- 1.85$	$= + 0.02$	$+ 30$

$x_1 - 1.77e_1 - 1.75\pi_1 = -0.86$	-0^p0060	$x_2 + 0.04e_2 - 1.49\pi_2 = +0.11$	$+0^p0021$
$x_1 - 1.20 + 1.23 = +0.22$	-16	$x_2 + 1.07 - 1.73 = -0.03$	$+7$
$x_1 - 1.16 + 0.78 = +0.01$	-28	$x_2 + 1.08 - 1.76 = -0.32$	-22
$x_1 - 1.15 + 0.75 = +0.06$	-22	$x_2 + 1.08 - 1.78 = -0.15$	-4
$x_1 - 1.15 + 0.72 = -0.22$	-50	$x_2 + 1.09 - 1.84 = -0.92$	-80
$x_1 - 1.11 + 0.21 = -1.14$	-132	$x_2 + 1.11 - 1.91 = -0.97$	-84
$x_1 - 1.09 - 0.03 = -0.87$	-100	$x_2 + 1.15 - 1.98 = +0.27$	$+41$
$x_1 - 1.07 - 0.34 = +1.32$	$+125$	$x_2 + 1.15 - 1.98 = +0.27$	$+41$
$x_1 - 0.88 - 1.95 = -0.36$	-11	$x_2 + 2.82 + 1.00 = +0.87$	$+32$
$x_1 - 0.86 - 1.97 = +0.17$	$+42$	$x_2 + 2.84 + 0.78 = +1.32$	$+81$
$x_1 - 0.84 - 1.97 = +0.97$	$+122$	$x_2 + 2.87 + 0.42 = -0.37$	-80
$x_1 - 0.16 + 0.82 = +0.39$	$+4$	$x_2 + 2.92 - 0.17 = +1.12$	$+80$
$x_1 - 0.08 - 0.19 = +1.01$	$+86$	$x_2 + 2.92 - 0.20 = +1.44$	$+113$
$x_1 + 0.02 - 1.35 = +0.03$	$+11$	$x_2 + 2.94 - 0.41 = +0.24$	-3
$x_1 + 0.02 - 1.37 = +0.14$	$+22$	$x_2 + 3.07 - 1.72 = -1.15$	-116
$x_1 + 0.03 - 1.40 = -0.79$	-70	$x_2 + 3.10 - 1.87 = -0.99$	-97
$x_1 + 0.04 - 1.47 = +0.77$	$+87$		

Aus diesen Beobachtungsgleichungen ergeben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate die beiden nachstehenden Systeme von Normalgleichungen.

Stern *a*.

$$\begin{aligned} 41.0000x_1 + 4.2600e_1 + 40.5800\pi_1 &= -0.1300 \\ 4.2600x_1 + 118.4916e_1 - 11.1191\pi_1 &= +6.0386 \\ 40.5800x_1 - 11.1191e_1 + 90.5904\pi_1 &= +5.6780 \end{aligned}$$

Stern *b*.

$$\begin{aligned} 41.0000x_2 + 4.2600e_2 - 41.3400\pi_2 &= -0.1700 \\ 4.2600x_2 + 118.4916e_2 + 10.5590\pi_2 &= +9.4359 \\ -41.3400x_2 + 10.5590e_2 + 91.0882\pi_2 &= +11.0111 \end{aligned}$$

Es finden sich aus den Normalgleichungen schließlich die folgenden Endwerte. Die angegebenen Fehler sind wie immer mittlere.

Stern *a*

$$\begin{aligned} x_1 &= -0^p0014 \pm 0^p00166 = -0''.031 \pm 0''.036 \\ e_1 &= +0.0007 \pm 0.00073 = +0.015 \pm 0.016 \\ \pi_1 &= +0.0014 \pm 0.00112 = +0.030 \pm 0.024 \\ \varepsilon &= \pm 0.00780 = \pm 0.169 \end{aligned}$$

Stern *b*.

$$\begin{aligned} x_2 &= +0^p0019 \pm 0^p00152 = +0''.042 \pm 0''.033 \\ e_2 &= +0.0005 \pm 0.00066 = +0.012 \pm 0.014 \\ \pi_2 &= +0.0020 \pm 0.00102 = +0.044 \pm 0.022 \\ \varepsilon &= \pm 0.00705 = \pm 0.153 \end{aligned}$$

BEOBACHTUNGEN

AM

SECHSZÖLLIGEN REPSOLDSCHEN HELIOMETER

DER

LEIPZIGER STERNWARTE

VON

BRUNO PETER.

IV. ABHANDLUNG.

TRIANGULATION VON 28 STERNEN IN DEN HYADEN.

DES XXIX. BANDES
DER ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

N° VII.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1906.

Die hieraus folgenden Normalgleichungen sind

$$41.0000x + 4.2600e + 21.0800\pi = - 0.1300$$
$$4.2600x + 118.4916e - 5.0730\pi = - 72.8297$$
$$21.0800x - 5.0730e + 22.6932\pi = + 5.5127$$

Daraus folgt

$$x = + 0^{p}.0001 \pm 0^{p}.0038 = + 0''.002 \pm 0''.083$$
$$e = - 0.0061 \pm 0.0016 = - 0.133 \pm 0.035$$
$$\pi = + 0.0010 \pm 0.0051 = + 0.021 \pm 0.112$$
$$\varepsilon_1 = \pm 0.0174 = \pm 0.378$$

Der Verlauf der Werte S_n deutet sonach in keiner Weise darauf hin, daß B eine Parallaxe von erheblicherem Betrage besitzt; hingegen ist das Vorhandensein einer der Zeit proportionalen Änderung ganz augenscheinlich. Das Auffallendste ist hierbei die Größe dieser Änderung. Gerade diese läßt es als ausgeschlossen erscheinen, daß man den wesentlichsten Anteil an der Änderung einer fehlerhaften Annahme in den der Reduktion zugrunde gelegten Eigenbewegungen der Endsterne zuschreiben könnte.

Um der Sache näher zu treten, sind nunmehr noch die einzelnen Messungsreihen von aA, ab, bB in sich ausgeglichen worden, und zwar unter der Annahme einer konstanten Verbesserung x ihres Mittelwertes und einer der Zeit proportionalen Änderung e. Die vorher gefundenen relativen Parallaxen von a und b sind dabei vernachlässigt worden. Man kann sich leicht überzeugen, daß bei der Kleinheit dieser Parallaxen ihre Vernachlässigung unbedenklich statthaft ist.

Es ist unnötig, die Einzelheiten dieser Ausgleichungen anzuführen, vielmehr genügt die Mitteilung der erlangten Resultate. Es findet sich

aA:
$$x = + 0^{p}.0002 \pm 0^{p}.0010 = + 0''.004 \pm 0''.022$$
$$e = - 0.0020 \pm 0.0006 = - 0.043 \pm 0.013$$
$$\varepsilon_1 = \pm 0.0065 = \pm 0.140$$

ab:
$$x = + 0.0003 \pm 0.0010 = + 0.006 \pm 0.022$$
$$e = - 0.0023 \pm 0.0006 = - 0.050 \pm 0.013$$
$$\varepsilon_1 = \pm 0.0066 = \pm 0.143$$

$$bB: \quad x = +\,0^{p}.0002 \pm 0^{p}.0015 = +\,0''.003 \pm 0''.032$$

$$e = -\,0.0019 \pm 0.0009 = -\,0.040 \pm 0.019$$

$$\varepsilon_1 = \pm\,0.0094 = \pm\,0.205$$

Die mittleren Fehler einer einzelnen Distanz ergeben sich nach der Ausgleichung nur unerheblich kleiner als ohne Einführung der Größen x und e. Die systematischen Abendfehler, die in den Distanzen tatsächlich vorhanden sind, können sonach ihre Entstehung nur zum kleinen Teil dem Auftreten einer der Zeit proportionalen Änderung der Distanzen verdanken.

Von besonderem Interesse ist das Resultat, daß bei allen drei Distanzen e gleiches Zeichen und sehr annähernd auch gleiche Größe hat. Da auch die drei Distanzen untereinander annähernd gleich sind, ist die nachgewiesene Änderung also sowohl der Zeit als auch der Größe der Distanz proportional. Die Größe von e spricht deutlich dagegen, daß die Änderungen von aA, ab, bB in Bewegungen der Sterne zu suchen sind; es ist ganz unwahrscheinlich, daß die angenommenen Eigenbewegungen noch so erheblicher Korrektionen bedürfen. Der Umstand, daß alle Distanzen gleichartig und augenscheinlich auch ihrer Größe entsprechend affiziert werden, deutet vielmehr sehr bestimmt darauf hin, daß die Ursache der Distanzänderung im Instrument oder im Beobachter, vielleicht auch in beiden zugleich zu suchen ist.

Es liegt am nächsten, falls man die Ursache der Distanzänderungen im Instrument selbst sucht, zu ihrer Erklärung eine Änderung der Normalokularstellung heranzuziehen. Legt man dieser allein den ganzen Betrag der Änderung zur Last, so müßte sie sich von 1899 bis 1904 im ganzen fast genau um 0.1 mm geändert haben. Natürlich ist nicht anzunehmen, daß eine solche Änderung wirklich der Zeit proportional vor sich gegangen sei; wenn sie tatsächlich stattgefunden hat, würde sie sprungweise, aber immer im gleichen Sinne eingetreten sein. Die vorhandenen Fokusermittelungen lassen eine derartige Änderung der Normalokularstellung indessen als ausgeschlossen erscheinen. 23 Fokusierungen, welche sich bis Februar 1900 erstrecken, ergeben $N_0 = 9.892$, 6 Fokusierungen im März 1904 ergeben $N_0 = 9.863$ und 7 Fokusierungen zwischen September 1904 und April 1905 ergeben $N_0 = 9.874$. Es liegt sonach nicht der mindeste Grund dafür vor, daß sich im Laufe der Zeit die Stellung des Index der

Okularskala gegen das Objektiv geändert habe, wenigstens nicht um einen erheblicheren Betrag. Vermutlich haben eine ganze Reihe von Ursachen, teils instrumenteller, teils persönlicher Art zusammengewirkt, und zwar in der Weise, daß durch das Übereinanderlagern ihrer Wirkungen die allmähliche Abnahme der Distanzwerte zustande gekommen ist. Es hat keinen Zweck auf diese Ursachen hier näher einzugehen, da sie sich doch nicht mit Sicherheit klarlegen lassen; ich will daher nur noch auf einen Punkt hinweisen, aus dem hervorzugehen scheint, daß wohl auch ein guter Teil Zufall bei dem Auftreten der der Zeit proportionalen Änderungen eine Rolle spielt.

Vergleicht man die Reihe der S_n mit den zugehörigen Werten für Ruhe und Schärfe der Luft, so gewinnt man den Eindruck, als ob die Größe von S_n sich verringert, wenn die Bilder unscharf werden, namentlich aber wenn die Luft unruhig wird, also wenn die unter R und S angegebenen Zahlen wachsen. Ein flüchtiger Überblick zeigt nun schon, daß die Witterungsbedingungen zu Anfang der Beobachtungsreihe wesentlich besser waren als gegen das Ende hin; es sind somit alle Bedingungen für das Auftreten eines der Zeit proportionalen Gliedes in den Werten von S_n gegeben, ohne daß dabei diesem Gliede doch irgend welche reelle Bedeutung beigemessen werden kann. Es wäre dabei sehr wohl denkbar, daß der Zustand der Atmosphäre, durch welchen unruhige und verwaschene Bilder hervorgerufen werden, auch anormale Refraktionsverhältnisse zur Folge hat, durch die im vorliegenden Falle die Distanzen mehr verkleinert werden, als es rechnungsmäßig der Fall sein sollte.

Die Ableitung des Skalenwertes.

Zur Bestimmung des Skalenwertes dient der Bogen zwischen den Sternen A und B. Die Örter dieser beiden Sterne nach dem Fundamentalkatalog von AUWERS und mit Berücksichtigung der in Astron. Nachrichten 3508—9 gegebenen Korrektionen finden sich auf Seite 497. Für 1900.0 findet sich als Distanz zwischen A und B $14\,31\,1''.910$. Es sind nun noch die Projektionen der gemessenen Distanzen aA, ab, bB auf den durch A und B gelegten größten Kreis zu ermitteln. Mit Benutzung der Seite 497 aufgeführten Positionen von a und b findet sich

	aA	*ab*	*bB*
Distanz:	4775″.944	4367″.118	5171″.110
projizierte Distanz:	4774.460	4366.640	5170.810.

Es ergeben sich dann als Projektionsfaktoren:

aA: (9.9998651), ab: (9.9999525), bB: (9.9999746).

Die Seite 509 mitgeteilten Mittelwerte der mit dem Heliometer gemessenen drei Distanzen des Normalbogens führen sonach zu den Projektionen

$$aA: 219^p.6320, \quad ab: 200^p.9692, \quad bB: 238^p.0715.$$

Schließlich hat man $658^p.6727 = 14\,311''.910$ oder

$$1^p = 21''.728412 \pm 0''.000103.$$

Zu demselben Resultate kommt man, wenn man direkt die Summen der drei gemessenen und der berechneten Distanzen einander gleich setzt, ohne sie erst auf den durch A und B gelegten größten Kreis zu projizieren. Aus den Beobachtungen des Polbogens (XXVII. Band d. Abhandl. d. math.-phys. Kl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. W., Seite 643) hatte sich für den Skalenwert ergeben:

$$1887—1894: 21''.7279, \quad 1898—1900: 21''.7277.$$

Die Übereinstimmung mit diesen Bestimmungen ist also eine gute. Die Sterne A und B finden sich beide auch in den Fundamentalkatalogen von NEWCOMB (Catalogue of fundamental stars for the epochs 1875 and 1900 reduced to an absolute system, Astron. Papers Vol. VIII) und L. Boss (Positions and motions of 627 standard stars, Astron. Journal Nr. 531—2). Für 1900.0 hat man

A:	$4^h\,30^m\,10^s.890$	$+\,16^0\,18'\,30''.03$	NEWCOMB
	10.893	29.77	Boss
B:	4 14 6.093	+ 15 23 10.48	NEWCOMB
	6.084	10.26	Boss.

Vereinigt man die Zahlen beider Kataloge zu Mittelwerten und berechnet mit diesen AB, so erhält man nur einen um 0″.039 größeren Wert als mit den Positionen nach AUWERS.

Die Ableitung der Eigenbewegungen.

Da die Beobachtungen der Hyaden sich über mehrere Jahre erstrecken und nicht gleichmäßig über diesen Zeitraum verteilt sind, so waren sie wegen Eigenbewegung auf eine einheitliche Epoche zu reduzieren. Zu der Zeit, als ich diese Reduktion für die Distanzen des Hauptnetzes ausführte, waren mir Nr. 13 und 14 der Publikationen des astronomischen Laboratoriums zu Groningen, welche speziell die Ableitung der Eigenbewegungen der Hyadensterne zum Gegenstande haben, noch nicht bekannt. Wenn auch für eine Anzahl der Hauptsterne schon von verschiedenen anderen Seiten Angaben über ihre Eigenbewegung vorlagen, so habe ich doch eine selbständige Herleitung dieser Bewegungen vorgenommen, da einerseits hierfür neuere noch unverwertete Positionsbestimmungen vorhanden waren und andererseits es mir auch daran lag, ein einheitlich behandeltes Material zur Verfügung zu haben. Die Eigenbewegungen für die an die Hauptsterne angeschlossenen Sterne habe ich nach den Groninger Untersuchungen angenommen.

Sehr verbunden bin ich bei dieser Untersuchung Herrn RISTENPART, welcher mir die älteren Katalogpositionen und Epochen der betreffenden Sterne bis 1875 mitteilte und mich auch durch freundliche Auskunft über verschiedene Punkte unterstützte.

Für die beiden Sterne A und B habe ich die Eigenbewegung direkt dem Fundamentalkatalog von AUWERS entnommen, und zwar mit den in A. N. 3508—9 angegebenen Verbesserungen. Man hat hiernach

für A: $+0^{s}.0036$ $-0''.181$ für B: $+0^{s}.0069$ $-0''.020$.

Diese Eigenbewegungen gelten eigentlich für 1875, sie sind aber ohne weiteres als für 1900 geltend angenommen worden, da ihre Unsicherheit jedenfalls noch größer ist als die in Frage kommende minimale Korrektion.

Ich gebe an dieser Stelle auch die Untersuchung über die Eigenbewegung der Sterne 16 und 17, von denen von anderer Seite noch keine Bestimmung vorliegt.

Die Reduktion vom Äquinox des Kataloges auf das Äquinox 1900 ist mit Hilfe der den FOLIEschen Tafeln (Douze tables pour le calcul des réductions stellaires par F. FOLIE, Bruxelles 1883) entnommenen variatio annua und variatio secularis ausgeführt

worden. Zugrunde gelegt sind dabei die Struveschen Konstanten. Die Folieschen Tafeln geben beide Variationen für 1875 und für die variatio annua auch die nötigen Reduktionsgrößen für den Übergang auf eine andere Epoche. Für die variatio secularis kann man, wie ich mich durch Nachrechnen überzeugt habe, die für 1875 gültigen Tabellenwerte ohne weitere Anbringung einer Reduktion auch für 1900 benutzen.

Das dritte Glied der Präzession ist nach den Tafeln von Kloock (Publikation V der Kgl. Sternwarte in Kiel) berechnet.

Die Abkürzungen für die Bezeichnung der Kataloge in der nachfolgenden Zusammenstellung der Sternpositionen sind dem Artikel über Sternkataloge von Ristenpart in Valentiners Handwörterbuch der Astronomie (III, 2 S. 478) entnommen. Ferner bedeutet

Chr. M.: Von Dr. Ristenpart aus Chr. Meyers Beobachtungen von Fixsterntrabanten abgeleiteter Katalog; noch nicht veröffentlicht.

Clausen: } ausgezogen aus Bd. 16 der Beobachtungen der Kais.
Schwarz: } Univ. Sternwarte Dorpat.

Küstner: Örter von 18 Hyadensternen bestimmt am Repsoldschen Meridiankreise der Bonner Sternwarte, A. N. 3791.

Wirtz: Triangulation der Hyadengruppe, A.N. 3818—19.

Battermann: Beobachtung am Berliner Meridiankreise.

Oertel: Beobachtung am Münchener Meridiankreise.

Die Beobachtungen am Berliner und Münchener Meridiankreise haben die Herren Battermann und Oertel auf mein Ersuchen freundlichst ausgeführt. Die Berliner Örter beruhen auf je 4 Abenden, die Münchener auf je 10 Abenden.

Wo bei Piazzi die Epoche sich nicht ermitteln ließ, ist dafür 1800 angenommen worden; die Unsicherheit des Katalogortes ist hier wesentlich größer als die Unsicherheit einer Bewegung von der wahren Epoche bis 1800. Nach Auwers (A.G.C. Berlin A, Einleitung S. 86) habe ich für die erste Hälfte des älteren Rümkerschen Kataloges 1840 als Epoche angenommen. Die Epoche für Pond (Beobachtungen zwischen 1816 und 1833) ist auf 1825, die für Wrottsley (Beobachtungen zwischen 1831 und 1836) auf 1833 festgesetzt worden. — Bei den Örtern des A.G.C. Berlin A ist die auf S. 131 der Einleitung angegebene Korrektion berücksichtigt.

Um die verschiedenen Kataloge auf ein einheitliches System zu bringen, sind die von AUWERS (Astron. Nachr. 3195 seq.) mitgeteilten Reduktionen benutzt worden.

Bei der Verteilung der Gewichte nach den einzelnen Katalogen und nach der Zahl der Beobachtungen habe ich zu große Unterschiede zu vermeiden gesucht; das größte vorkommende Gewicht ist 5.

In der nachfolgenden Zusammenstellung sind unter $\alpha(1900)$ und $\delta(1900)$ die auf 1900 gebrachten Katalogpositionen aufgeführt. In den Fällen, wo (wie z. B. bei den Greenwicher Katalogen) im Katalog eine in die Reduktion auf das Äquinoktium eingeschlossene Eigenbewegung angebracht war, ist diese von der Katalogposition wieder in Abzug gebracht worden, sodaß alle Örter für die wahren Epochen gelten. Die Reduktion auf das System des F.K. ist noch nicht angebracht, sondern unter S. R. getrennt aufgeführt. In AR. sowohl wie in Dekl. sind bei den Positionen nur die Sekunden aufgeführt. Unter Z ist die Zahl der Beobachtungsabende aufgeführt, auf denen die Katalogposition beruht, unter G das bei der Ausgleichung benutzte Gewicht. Schließlich findet sich noch unter B — R der nach der Ausgleichung übrig bleibende Widerspruch zwischen Beobachtung und Rechnung.

Katalogpositionen, welche in beiden Koordinaten das Gewicht Null erhalten haben, sind gar nicht mit in die Zusammenstellung aufgenommen worden; eine Ausnahme hiervon findet sich nur bei den Sternen 16 und 17 in bezug auf den Katalog WEISSE.

Nr.	Kat.		$\alpha(1900)$	S.R.	Ep.	Z	G	B — R	$\delta(1900)$	S.R.	Ep.	Z	G	B — R
								Stern *a*.						
1	Br.	619	$49^s.107$	$0^s.000$	1756.0	1	2	$-0^s.070$	39″.08	0″.00	1754.0	1	2	+0″.42
2	T. M.	166	49.287		1756.5	5	3	+0.107	38.68		1756.7	5	3	+0.04
3	M. H.	20—22	49.022		1767.1	3	2	−0.227						
4	Lal.	8466	49.205	+0.221	1795.7	1	1	−0.010	34.82	−2.81	1795.7	1	0	
5	Pi.	99	49.515	+0.221	1800	5	3	+0.272	41.12	−2.81	1800	6	3	+0.80
6	$W._2$	483	49.541	+0.030	1826.0	2	1	−0.063	36.99	+1.00	1826.0	2		+1.13
7	$Ca._1$	100	49.578	+0.020	1831	5	3	−0.068						
8	Pea.	90	49.518	−0.108	1832.0	4	3	−0.263	36.73	−1.11	1832.2	7	3	−1.08
9	Rob.	958	49.629	+0.076	1832.0	3	2	+0.032	35.98	−1.08	1854.1			−1.25
10	Kbg.Zod.	144	49.629	+0.088	1835.3	11	3	+0.023	36.39	−0.32	1835.3		3	−0.55
11	Tay.	1561	49.759	−0.001	1835.7	10	3	+0.061	36.98	−1.17	1834.0	9	3	−0.85
12	Rü.	1220	49.767	+0.021	1840	2	1	+0.063	34.30	−0.21	1840	2	1	−2.42
13	$12y_I$	380							36.68	−0.50	1838	5	3	−0.38
14	$12y_{II}$	380	49.586	+0.010	1846	2	2	−0.168						
15	$Par._1$	5175	49.816	+0.047	1847.2	1	2	+0.091						
16	6y	289	49.840	−0.010	1849.8	4	3	+0.041	38.21	−0.17	1850.1	4	3	+1.79
17	Pu. M.	673	49.811	+0.053	1855.9	5	4	+0.035	36.36	−0.06	1855.9	5	4	+0.19
18	$R. C._2$	509	50.040	+0.014	1856.0	1	1	+0.225	36.13	−0.96	1856.5	5	2	−0.92
19	$Par._2$	5175	49.630	+0.030	1858.0	1	2	−0.183	37.23	−0.41	1858.0	1	2	+0.76

Nr.	Kat.		α(1900)	S.R.	Ep.	Z	G	B — R	δ(1900)	S.R.	Ep.	Z	G	B — R
20	Quet.	1738	49ˢ.806	+ 0ˢ.022	1865.8	4	2	— 0ˢ.065	35″.89	— 0″.04	1866.6	3	2	+ 0″.01
21	9y	422	49.931	+ 0.020	1869.6	5	3	+ 0.033	36.71	— 0.68	1869.6	5	3	+ 0.26
22	A.G. Berl. A	1200	49.929	0.000	1870.7	3	3	+ 0.004	35.76	— 0.42	1870.7	3	3	— 0.40
23	Gl.	1086	49.989	+ 0.002	1873.9	6	3	+ 0.045	34.99	— 0.07	1868.9	4	2	— 0.86
24	Par.$_3$	5175	49.999	+ 0.012	1879.0	1	2	+ 0.031	35.46	— 0.26	1879.0	1	2	— 0.33
25	Ea.	926	49.909		1872.9	3	3	— 0.031	36.26		1872.9	4	3	+ 0.58
26	Stb.$_2$	181	50.022		1887.0	4	3	— 0.010	35.25		1887.0	4	3	— 0.08
27	Gl.$_2$	390	50.124	+ 0.011	1889.3	3	2	+ 0.088	35.54	+ 0.43	1889.3	3	2	+ 0.70
28	N.10y	1384	50.046	+ 0.027	1892.5	10	4	+ 0.005	35.38	+ 0.23	1891.7	10	4	+ 0.40
29	Küstner	13	50.094		1899.0	12	5	— 0.016	35.04		1899.0	12	5	+ 0.01

Stern *b*.

1	Br.	603	53.864	0.000	1754.6	6	4	+ 0.067	46.98	0.00	1755.1	2	3	— 0.44
2	M. H.	18	53.755		1768.1	3	2	— 0.128						
3	Lal.	8301	53.569	+ 0.221	1795.8	1	1	— 0.268	54.97	— 2.81	1795.8	1	0	
4	Pi.	74	53.889	+ 0.221	1800	6	3	+ 0.025	50.27	— 2.81	1800	6	3	+ 0.85
5	W.$_2$	372	54.098	+ 0.040	1826.0	1	1	— 0.111	46.85	+ 0.85	1826.0	1	1	+ 1.56
6	Wr.	254	54.241	+ 0.070	1833.0	6	3	+ 0.017						
7	Rob.	938	54.049	+ 0.076	1832.0	1	1	— 0.162						
8	Tay.	1526	54.481	— 0.001	1833.8	5	3	+ 0.181	46.48	— 1.17	1833.0	5	3	— 0.70
9	Lam.	182	54.231	+ 0.064	1835.0	2	2	— 0.011	44.47	— 0.04	1835.0	2	2	— 1.55
10	Rü.	1185	54.207	+ 0.021	1840	3	2	— 0.110	47.31	— 0.21	1840	2	1	+ 1.21
11	Rü.$_2$	2276	54.245	+ 0.041	1848	2	1	— 0.103	47.11	— 0.51	1848	2	1	+ 0.86
12	Wr.$_2$	182	54.365	+ 0.067	1850.1	5	3	+ 0.030						
13	Par.$_1$	5110	54.393	+ 0.047	1852.0	1	2	+ 0.026	46.03	— 0.38	1848.8	1	2	— 0.08
14	Kam.$_1$	773	54.484		1853.9	3	2	+ 0.058	45.16		1853.9	3	2	— 0.47
15	Rc.	1227	54.473	+ 0.009	1856.0	1	1	+ 0.043	46.73	— 1.14	1852.0	1	1	— 0.08
16	Pu. M.	657	54.464	+ 0.052	1860.8	4	4	+ 0.046	46.06	— 0.06	1860.8	4	4	+ 0.49
17	R. C.$_2$	498							46.58	— 0.95	1859.1	1	1	+ 0.09
18	Ya.	1946	54.471	+ 0.015	1866.0	3	2	— 0.017	45.48	— 0.61	1858.3	4	2	— 0.69
19	n7y	554	54.424	+ 0.022	1866.4	3	3	— 0.059	46.22	— 0.07	1866.4	3	3	+ 0.74
20	A.G. Berl. A	1171	54.542	+ 0.010	1870.1	2	2	+ 0.023	45.66	— 0.61	1870.1	2	2	— 0.29
21	Quet.	1699	54.504	+ 0.022	1872.5	2	2	— 0.018	46.08	— 0.04	1868.1	1	1	+ 0.66
22	Stb.$_2$	174	54.650		1887.0	4	3	+ 0.014	45.13		1887.0	4	3	+ 0.09
23	N.10y	1365	54.683	+ 0.027	1896.3	3	3	+ 0.016	44.27	+ 0.23	1896.3	3	3	— 0.37
24	Wirtz	26	54.679		1899.0		5	— 0.033	44.68		1899.0		5	— 0.14

Stern *c*.

1	Br.	608	57.432	0.000	1754.0	10	4	— 0.064	19.71	0.00	1755.0	4	3	+ 0.01
2	T. M.	159	57.392		1756.5	2	2	— 0.101	19.51		1756.6	3	3	— 0.14
3	Lal.	8330	57.391	+ 0.218	1796.0	1	1	+ 0.163	22.76	— 2.85	1796.0	1	1	+ 1.41
4	Pi.	79	57.381	+ 0.218	1800	11	3	+ 0.158	20.76	— 2.85	1800	13	3	— 0.47
5	W.	375	58.108	— 0.450	1823.0	1	1	+ 0.245	17.67	+ 2.00	1823.0	1	1	+ 1.96
6	Po.	171	57.384	— 0.004	1825	10	4	— 0.031	18.75	— 2.10	1825	8	4	— 1.00
7	Ca.$_1$	94	57.274	+ 0.020	1831	2	2	— 0.109						
8	Tay.	1532	57.428	— 0.002	1832.1	13	3	+ 0.024	18.06	— 1.21	1831.8	10	3	— 0.60
9	Pea.	78	57.418	— 0.106	1832.5	6	3	— 0.090	20.32	— 0.86	1832.7	6	3	+ 2.04
10	Rü.	1193	57.435	+ 0.021	1840	1	1	+ 0.064	17.13	— 0.22	1840	1	1	— 0.30
11	Rob.	942	57.510	+ 0.076	1840.6	2	2	+ 0.194	18.13	— 1.15	1853.4	2	2	+ 0.16
12	Par.$_1$	5130	57.299	+ 0.047	1844.4	4	3	— 0.041						
13	Rü.$_2$	2288	57.409	+ 0.037	1848	3	2	— 0.063	17.56	— 0.49	1848	3	2	+ 0.10
14	Pu. M.	660	57.408	+ 0.051	1848.3	4	3	+ 0.077	16.80	— 0.05	1848.3	4	3	— 0.22
15	Gi. Sj. Z.	111	57.225	+ 0.032	1850.0	3	3	— 0.123	14.67	+ 0.82	1850.0	3	3	— 1.43
16	Par.$_2$	5130	57.440	+ 0.029	1856.9	1	2	+ 0.097	17.83	— 0.43	1856.0	1	2	+ 0.66
17	Quet.	1705	57.178	+ 0.022	1864.1	1	1	— 0.163	16.78	— 0.04	1869.7	3	2	+ 0.40
18	n7y	556	57.341	+ 0.024	1866.8	3	3	+ 0.005	17.09	— 0.09	1866.8	4	3	+ 0.58
19	Pgs.	907	57.336	+ 0.016	1879.6	5	2	+ 0.007	16.68	— 0.23	1879.6	5	2	+ 0.40
20	Par.$_3$	5130	57.376	+ 0.010	1880.5	2	2	+ 0.042	15.88	— 0.26	1880 5	2	2	— 0.40
21	Ea.	906	57.366		1875.6	3	3	+ 0.017	15.88		1875.6	3	3	— 0.29
22	A.G. Leipz. I	1295	57.276	+ 0.009	1869.6	2	2	— 0.072	16.38	+ 0.11	1869.6	2	2	+ 0.15
23	N.10y	1370	57.277	+ 0.026	1894.0	6	4	— 0.024	15.47	+ 0.24	1894.0	8	4	+ 0.08
24	Küstner	10	57.291		1899.0	10	5	— 0.030	15.25		1899.0	10	5	— 0.23

Nr.	Kat.		α(1900)	S.R.	Ep.	Z	G	B — R	δ(1900)	S.R.	Ep.	Z	G	B — R
								Stern *d*.						
1	Br.	622	26ˢ.317	0ˢ.000	1754.7	12	4	— 0ˢ.027	28″.77	0″.00	1754.3	4	3	+ 0″.19
2	Pi.	105	26.208	+ 0.218	1800	25	3	+ 0.010	28.82	— 2.85	1800	24	3	— 0.47
3	W.	474	26.979	— 0.455	1823.0	1	1	+ 0.072	26.87	+ 1.86	1823.0			+ 3.37
4	Wr.	261	26.326	+ 0.070	1833	9	3	— 0.072						
5	Rob.	962	26.452	+ 0.075	1831.6	2	2	+ 0.061	24.66	— 1.14	1854.1			— 0.38
6	Tay.	1565	26.460	— 0.001	1835.9	17	3	— 0.014	25.60	— 1.19	1835.8	8	3	— 0.35
7	Par.$_1$	5186	26.460	+ 0.046	1845.5	2	2	+ 0.018						
8	Rü.$_2$	2325	26.497	+ 0.038	1848	2	1	+ 0.043	24.34	— 0.50	1848	2		— 0.34
9	Pu. M.	678	26.559	+ 0.052	1848.3	4	3	+ 0.119	24.64	— 0.06	1848.3	4	3	+ 0.41
10	Ge.	524	26.545		1852.1	1	1	+ 0.047	21.74		1852.1		1	— 2.25
11	Quet.	1734	26.428	+ 0.020	1865.7	3	2	— 0.072	23.51	— 0.04	1870.1	1	1	+ 0.32
12	n7y	567	26.493	+ 0.023	1866.1	3	3	— 0.004	24.20	— 0.08	1866.1	3	3	+ 0.79
13	Ya.	1976	26.560	+ 0.013	1869.1	3	2	+ 0.048	22.57	— 0.62	1860.5	3	2	— 1.65
14	A.G. Leipz. I	1315	26.466	— 0.022	1869.6	2	2	— 0.082	22.64	+ 0.13	1869.6	2	2	— 0.40
15	Gl.$_2$	392	26.508	+ 0.010	1891.9	3	2	— 0.043	22.60	+ 0.43	1891.9	3	2	+ 0.91
16	Kü. B.$_1$		26.549		1896.1	2	5	— 0.019	21.66		1896.1	2	5	— 0.27
17	Wirtz	51	26.587		1899.0		5	+ 0.015	22.06		1899.0		5	+ 0.27
								Stern *e*.						
1	Br.	596	39.882	0.000	1754.8	6	4	— 0.023	41.51	0.00	1754.7	3	3	+ 0.03
2	Ch. M.		39.326		1777.1	1	0		40.77		1777.1	1	2	— 0.12
3	Lal.	8209	39.941	+ 0.223	1795.7	1	1	+ 0.035	42.94	— 2.78	1795.7	1	1	— 0.25
4	Pi.	62	39.931	+ 0.223	1800	5	3	+ 0.001	44.94	— 2.78	1800	6	3	+ 1.86
5	Wr.	249	40.284	+ 0.070	1833	7	3	+ 0.020						
6	Pea	75	40.484	— 0.106	1831.9	7	3	+ 0.051	39.32	— 1.24	1832.4	7	3	— 1.37
7	Tay.	1509	40.267	0.000	1832.8	5	3	— 0.065	39.89	— 1.15	1833.3	7	3	— 0.69
8	Kbg. Zod.	134	40.237	+ 0.088	1833.4	7	3	— 0.011	39.35	— 0.32	1833.4	7	3	— 0.40
9	Rü.	1174	40.319	+ 0.020	1840	4	2	— 0.033	38.90	— 0.21	1840	2	1	— 0.56
10	Rob.	926	40.357	+ 0.082	1840.3	4	2	+ 0.065	38.97	— 1.04	1850.5	2	1	— 1.05
11	Gi. W.	196	40.392	+ 0.033	1842	1	2	+ 0.042						
12	Rü.$_2$	2248	40.368	+ 0.045	1846	1	1	+ 0.008	41.58	— 0.52	1846	1	1	+ 2.07
13	Par.$_1$	5060	40.473	+ 0.047	1848.4	2	2	+ 0.102						
14	Pu. M.	646	40.330	+ 0.054	1853.2	4	3	— 0.060	39.51	— 0.06	1853.2	4	3	+ 0.54
15	Par.$_2$	5060	40.419	+ 0.032	1856.1	1	2	— 0.009	38.55	— 0.41	1864.5	5	3	— 0.47
16	Rc.$_2$	492	40.479	+ 0.013	1859.0	2	2	+ 0.016	37.35	— 0.99	1856.7	3	2	— 2.46
17	Ya.	1926	40.469	+ 0.022	1862.4	8	3	— 0.003	40.05	— 0.46	1858.7	8	3	+ 0.83
18	Gl.	1052	40.535	0.000	1866.4	3	2	+ 0.019	37.28	— 0.06	1871.3	3	2	— 1.22
19	n7y	545	40.452	+ 0.021	1867.0	3	3	— 0.047	38.06	— 0.06	1867.0	3	3	— 0.55
20	9y	404	40.495	+ 0.020	1868.8	5	3	— 0.015	39.88	— 0.66	1868.8	5	3	+ 0.72
21	A.G. Berl. A	1155	40.506	+ 0.018	1870.1	2	2	— 0.013	39.87	— 0.59	1870.1	2	2	+ 0.81
22	Par.$_3$	5060	40.646	+ 0.013	1879.1	1	2	+ 0.073	39.77	— 0.26	1879.1	1	2	+ 1.28
23	Ea.	890	40.576		1872.6	3	3	+ 0.026	38.27		1872.6	3	3	— 0.13
24	G.		40.630		1887.1	4	3	0.000	38.08		1886.7	5	3	+ 0.05
25	N.10y	1351	40.616	+ 0.027	1893.9	9	4	— 0.024	37.96	+ 0.23	1893.9	9	4	+ 0.35
26	Küstner	7	40.682		1899.0	13	5	— 0.013	37.82		1899.0	13	5	+ 0.11
								Stern *f*.						
1	W.$_2$	398	6.223	+ 0.040	1826.0	1	1	+ 0.070	17.37	+ 0.85	1826.0			+ 0.80
2	Rü.	2289	5.971	+ 0.046	1847	2	1	— 0.260	15.80	— 0.53	1847	2		— 0.86
3	A.G. Berl. A	1179	6.480	+ 0.010	1870.1	2	2	+ 0.120	15.00	— 0.48	1870.1	2	2	— 0.19
4	Wirtz	33	6.445		1899.0		5	— 0.041	12.75		1899.0		5	— 0.18
5	Battermann		6.494		1900.1	4	5	+ 0.004	12.93		1900.1	4	5	+ 0.16
6	Oertel		6.501		1901.1	10	5	+ 0.007	13.01		1901.1	10	5	+ 0.21
								Stern *g*.						
1	Lal.	8677	13.207	+ 0.219	1795.7	1	1	— 0.132	36.70	— 2.84	1795.7	1	1	+ 0.57
2	W.	613	14.235	— 0.463	1823.0	1	1	+ 0.180	29.46	+ 1.87	1823.0	1	1	— 0.77
3	A.G. Berl. A	1240	13.622	— 0.013	1871.1	3	3	— 0.042	30.40	— 0.59	1871.1	3	3	— 0.21
4	Gl	1111	13.747	+ 0.003	1879.9	3	2	+ 0.088	30.28	— 0.08	1874.3	3	2	+ 0.32
5	A.G. Leipz. I	1339	13.672	— 0.030	1869.6	2	2	— 0.007	30.00	+ 0.13	1869.6	2	2	+ 0.04
6	Gl.$_2$	401	13.700	+ 0.010	1890.8	2	2	+ 0.035	28.76	+ 0.44	1890.1	4	5	0.00
7	Wirtz	65	13.655		1899.0		5	— 0.030	28.84		1899.0		5	+ 0.03

Nr.	Kat.		α(1900)	S.R.	Ep.	Z	G	B — R	δ(1900)	S.R.	Ep.	Z	G	B — R
								Stern *h*.						
1	Lal.	8135	55^s.151	+ 0^s.217	1796.0	1	1	+ 0^s.107	24″.34	— 2″.86	1796.0	1	1	— 0″.46
2	Par.$_1$	5025	55.439	+ 0.047	1841.1	2	2	— 0.065						
3	Par.$_2$	5025	55.625	+ 0.029	1860.7	3	3	— 0.023	21.97	— 0.44	1857.0	1	2	+ 1.09
4	Arm.$_2$	535	55.778	— 0.020	1874.0	2	2	— 0.005	19.28	+ 0.23	1874.0	2	2	— 0.51
5	A.G. Leipz. I	1271	55.748	— 0.026	1869.6	2	2	— 0.012	19.68	+ 0.13	1869.6	2	2	— 0.32
6	Wirtz	13	55.949		1899.0		5	+ 0.025	19.39		1899.0		5	— 0.01
								Stern *i*.						
1	W.$_2$	452	33.449	+ 0.031	1826.0	1	1	— 0.106	31.29	+ 0.86	1826.0	1	1	+ 0.78
2	Rü.	1212	33.660	+ 0.022	1840	2	1	+ 0.046	32.13	— 0.21	1840	2	1	+ 0.90
3	Rü.$_2$	2309	33.655	+ 0.048	1847	4	2	+ 0.041	30.93	— 0.53	1847	4	2	— 0.44
4	A.G. Berl. A	1193	33.758	+ 0.001	1870.1	2	2	+ 0.014	29.71	— 0.57	1870.1	2	2	— 1.12
5	Wirtz	44	33.840		1899.0		5	— 0.010	29.82		1899.0		5	+ 0.28
								Stern 16.						
1	Br.	621	58.613	0.000	1754.3	4	3	— 0.002	27.12	0.00	1755.5	2	2	+ 0.03
2	Pi.	103	58.657	+ 0.213	1800	6	3	— 0.028	30.20	— 2.90	1800	7	3	+ 0.75
3	W.	463	59.294		1823.0	1	0		24.94		1823.0	1	0	
4	Wr.	260	58.957	+ 0.070	1833	11	3	+ 0.075						
5	Rob.	960	59.097	+ 0.076	1832.0	1	1	+ 0.077	25.05	— 1.20	1854.9	1	1	— 1.67
6	Tay.	1563	59.248	— 0.004	1832.7	6	3	+ 0.143	27.77	— 1.23	1833.1	5	3	+ 0.61
7	Rü.$_2$	2323	59.065	+ 0.036	1852	3	2	— 0.119	25.83	— 0.48	1852	3	2	— 0.23
8	Rc.$_2$	512	59.215	+ 0.017	1858.3	4	2	— 0.027	26.58	— 0.82	1859.4	4	2	+ 0.32
9	Pu. M.	676	59.256	+ 0.050	1859.1	4	3	+ 0.042	24.92	— 0.05	1861.0	3	3	— 0.54
10	Quet.	1732	59.261	+ 0.020	1863.7	3	2	— 0.011	24.20	— 0.05	1865.0	3	2	— 1.18
11	n7y	566	59.284	+ 0.024	1866.3	3	3	0.000	25.26	— 0.11	1866.3	3	3	— 0.17
12	Gl.	1087	59.394	+ 0.009	1871.6	2	2	+ 0.062	23.83	— 0.08	1874.0	3	2	— 1.42
13	A.G. Leipz. I	1313	59.254	+ 0.004	1869.6	2	2	— 0.071	24.53	+ 0.12	1869.6	2	2	— 0.60
14	Küstner	14	59.488		1899.0	10	5	— 0.023	24.66		1899.0	10	5	— 0.04
15	Battermann		59.534		1900.1	4	5	+ 0.016	25.15		1900.1	4	5	+ 0.47
16	Oertel		59.533		1901.1	9	5	+ 0.009	25.42		1901.1	10	5	+ 0.76
								Stern 17.						
1	Br.	614	12.959	0.000	1754.7	5	3	— 0.012	34.83	0.00	1754.5	4	3	+ 0.59
2	Pi.	93	13.082	+ 0.213	1800	11	3	+ 0.004	36.09	— 2.90	1800	8	3	— 0.83
3	W.	430	13.494		1823.0	1	0		33.69		1823	1	0	
4	W.$_2$	258	13.450	+ 0.070	1833	9	3	— 0.003						
5	Tay.	1549	13.611	— 0.005	1833.1	4	2	+ 0.082	33.86	— 1.26	1832.0	5	3	— 1.27
6	Rü.	1211	13.481	+ 0.022	1840	2	1	— 0.070	35.86	— 0.23	1840	2	1	+ 1.76
7	Rob.	954	13.721	+ 0.076	1842.0	2	2	+ 0.210	34.84	— 1.23	1853.9	2	1	— 0.15
8	Ge.	518	13.562		1843.2	8	3	— 0.033	32.87		1843.2	8	3	— 0.94
9	Clausen	77	13.582		1847	4	3	— 0.040	34.17		1847	4	3	+ 0.38
10	Schwarz	44	13.522		1847	5	3	— 0.100						
11	Rü.$_2$	2308	13.492	+ 0.035	1848	5	2	— 0.102	34.99	— 0.47	1848	5	2	+ 0.73
12	Par.$_1$	5161	13.647	+ 0.047	1850.0	4	3	+ 0.051						
13	Pu. M.	670	13.645	+ 0.049	1850.5	4	3	+ 0.047	33.92	— 0.04	1850.5	4	3	+ 0.10
14	Rc.$_2$	506	13.654	+ 0.018	1858.7	3	2	— 0.032	36.47	— 0.78	1856.0	4	2	+ 1.94
15	Quet.	1719	13.691	+ 0.021	1861.6	2	2	— 0.012	34.02	— 0.05	1860.9	2	2	+ 0.25
16	n7y	563	13.748	+ 0.026	1867.2	4	3	+ 0.010	33.89	— 0.12	1867.3	3	3	+ 0.08
17	A.G. Leipz. I	1306	13.847	+ 0.009	1879.8	4	3	+ 0.003	32.93	+ 0.11	1879.8	4	3	— 0.59

Die Ausgleichung der vorstehenden Positionen zur Ermittelung der Eigenbewegungen ist streng nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgt unter Einführung eines konstanten und eines der Zeit proportionalen Gliedes. Die Ausgangswerte waren die Mittelwerte der sämtlichen stimmfähigen Örter.

Für uns kommen hier nur die aus der Ausgleichung sich ergebenden jährlichen Eigenbewegungen nebst ihren mittleren Fehlern in Betracht. Es sind dies die folgenden:

	μ_α		μ_δ		ε	
a	$+0^s.00653$	$\pm 0^s.00055$	$-0''.0250$	$\pm 0''.0043$	$\pm 0^s.181$	$\pm 1''.27$
b	$+0.00633$	± 0.00043	-0.0181	± 0.0042	± 0.127	± 1.05
c	-0.00121	± 0.00048	-0.0293	± 0.0035	± 0.147	± 1.09
d	$+0.00158$	± 0.00032	-0.0469	± 0.0059	± 0.087	± 1.48
e	$+0.00548$	± 0.00023	-0.0261	± 0.0054	± 0.065	± 1.54
f	$+0.00401$	± 0.00181	-0.0615	± 0.0075	± 0.163	± 0.68
g	$+0.00123$	± 0.00112	-0.0433	± 0.0045	± 0.125	± 0.50
h	$+0.00644$	± 0.00073	-0.0246	± 0.0106	± 0.079	± 1.05
i	$+0.00362$	± 0.00085	-0.0251	± 0.0139	± 0.076	± 1.25
16	$+0.00619$	± 0.00039	-0.0187	± 0.0051	± 0.106	± 1.24
17	$+0.00705$	± 0.00058	-0.0049	± 0.0078	± 0.109	± 1.48

Unter ε sind die durch die Ausgleichung gefundenen mittleren Fehler eines Ortes vom Gewicht 1 beigefügt.

Völlig einwandfrei sind die für *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, 16, 17 gefundenen Eigenbewegungen, gegen deren unmittelbare Verwendung bei der Reduktion kein Bedenken vorliegt. Hingegen bedürfen die für *f*, *g*, *h*, *i* abgeleiteten Werte noch einer besonderen Untersuchung, weil wegen des geringen Materials die Eigenbewegung hauptsächlich auf LALANDE oder WEISSE beruht.

Bei *f*, *g*, *h*, *i* ist der Ort durch die heliometrische Vermessung von WIRTZ festgelegt. Es ist dieser Ort als der einer Verbesserung nicht mehr bedürftige Ausgangswert angenommen und die Ausgleichung nur nach μ ausgeführt worden und zwar in doppelter Weise: a) mit der nämlichen Gewichtsfestsetzung wie vorher und b) mit durchweg gleichen Gewichten. Da von *f* auch sehr gute Meridianbestimmungen von BATTERMANN und OERTEL vorliegen, ist hier als Ausgangswert das Mittel der Örter nach WIRTZ, BATTERMANN und OERTEL benutzt worden. Das Resultat ist das folgende:

	ohne Gewichte				mit Gewichten			
	μ_α		μ_δ		μ_α		μ_δ	
f	$+0^s.00438$	$\pm 0^s.00214$	$-0''.0617$	$\pm 0''.0088$	$+0^s.00397$	$\pm 0^s.00225$	$-0''.0610$	$\pm 0''.0086$
g	$+0.00076$	± 0.00087	-0.0431	± 0.0034	$+0.00070$	± 0.00090	-0.0429	± 0.0034
h	$+0.00647$	± 0.00054	-0.0231	± 0.0064	$+0.00689$	± 0.00055	-0.0249	± 0.0060
i	$+0.00365$	± 0.00065	-0.0247	± 0.0092	$+0.00343$	± 0.00062	-0.0199	± 0.0104

Wird bei *i* in AR. der Ort von WEISSE ausgeschlossen, so erhält man

i	$+0^s.00268$	$\pm 0^s.00003$	$+0^s.00267$	$\pm 0^s.00004$

Schließlich sind noch Werte für die Eigenbewegungen abgeleitet worden, indem die einzelnen Positionen gruppenweise zu Mittelwerten vereinigt wurden.

Stern *f*. Das Mittel von 1—3 mit dem Mittel von 4—6 verglichen liefert

ohne Gewichte		mit Gewichten	
$\mu_\alpha = +0^s.00226$,	$\mu_\delta = -0''.0591$,	$\mu_\alpha = +0^s.00352$,	$\mu_\delta = -0''.0583$.

Stern *g*. Bildet man zu den Gruppen 1—2, 3—5, 6—7 die Mittel mit Gewichten und verbindet die erste und zweite Gruppe einzeln mit der dritten, so erhält man

$\mu_\alpha = +0^s.00082$ und $0^s.00051$, $\mu_\delta = -0''.0424$ und $0''.0417$.

Stern *h*. Verfährt man in derselben Weise wie bei dem Sterne *g*, so erhält man aus den Gruppen 1—2, 3—5 und 6

$\mu_\alpha = +0^s.00688$ und $0^s.00769$, $\mu_\delta = -0''.0203$ und $0''.0278$.

Stern *i*. Die Mittel aus 1—2 und 3—4 ergeben in AR. gegenüber 5 als Eigenbewegung

$$+0^s.00392 \quad \text{und} \quad +0^s.00269.$$

Die Position von WEISSE beeinflußt augenscheinlich das Resultat ganz einseitig und ist auszuschließen.

In Deklination ist augenscheinlich eine merkliche Eigenbewegung vorhanden, das Zusammenziehen in mehrere Gruppen vermag aber hier keinen weiteren Aufschluß zu geben, da die Beobachtungen zeitlich sehr ungünstig verteilt und außerdem nicht sehr zuverlässig sind. Vergleicht man das Mittel aus 1—4 mit 5, so erhält man

	mit Gewichten	ohne Gewichte
μ_δ	$-0''.0142$	$-0''.0203$

Für die Sterne *f*, *g*, *h*, *i* ist schließlich auf Grund der vorstehenden Untersuchung angenommen worden

	f	*g*	*h*	*i*
μ_α	$+0^s.0040$	$+0^s.0007$	$+0^s.0065$	$+0^s.0027$
μ_δ	$-0''.061$	$-0''.043$	$-0''.024$	$-0''.020$.

Die so erhaltenen Eigenbewegungen habe ich ohne weiteres als für die Epoche 1900 gültig angenommen. Wenn ihre wirklichen Epochen auch eine Reihe von Jahren von 1900 entfernt

liegen, so ist die Unsicherheit der Eigenbewegung selbst doch mindestens ebenso groß wie deren Reduktion von ihrer jeweiligen Epoche auf 1900. Die begangene Vernachlässigung ist durchaus belanglos.

Nachdem die vorstehenden Eigenbewegungen der Hauptsterne abgeleitet und auch bereits für die Reduktion der Distanzmessungen verwendet worden waren, erschienen die Arbeiten von WEERSMA, KAPTEYN und DE SITTER. Mit Ausnahme der Sterne *i*, 16 und 17 sind alle von mir vermessenen Sterne in diesen Arbeiten ihrer Eigenbewegung nach bestimmt, und ich habe die daselbst angegebenen Eigenbewegungen der Sterne 1—15 einfach herüber genommen. Meine für die übrigen Sterne abgeleiteten Werte weichen von den Groninger Resultaten fast durchweg nur unwesentlich ab, sodaß sie schon aus diesem Grunde unverändert hätten beibehalten werden können. Eine starke Abweichung liegt nur für μ_α bei dem Stern *f* vor, wo ich + 0".0040 erhalte, während das Groninger Resultat + 0".0008 ist; nach meinem Dafürhalten hat der Wert 0".0040 eine größere innere Wahrscheinlichkeit für sich als 0".0008.

Die Arbeit von KAPTEYN und DE SITTER[1]) leitet die Eigenbewegungen in einer wesentlich anderen als der sonst üblichen Weise ab. Das angewandte Verfahren ist ein Analogon der KAPTEYNschen Methode der Parallaxenbestimmung auf photographischem Wege. Ein bestimmtes Gebiet des Himmels wird bei gleichem Stundenwinkel zweimal auf derselben Platte aufgenommen. Die Zeit zwischen den beiden Aufnahmen beträgt 4 bis 5 Jahre. Der Messung unterliegt nur der Abstand der beiden Bilder desselben Sternes. Dieser Abstand, vermindert um einen allen Sternen der gleichen Platte gemeinsamen Betrag, entspricht der innerhalb der Zeit zwischen den beiden Aufnahmen stattgehabten Ortsveränderung des Sternes am Himmel. Notwendige Voraussetzung bei diesem Verfahren ist die möglichst scharfe Kenntnis der Eigenbewegung von einer genügenden Anzahl in dem aufgenommenen Gebiete enthaltener Sterne, da diese zur Herleitung der erforderlichen Reduktionselemente dienen müssen. Die Untersuchung über die Eigenbewegungen dieser Anhaltsterne

1) Publications of the astronomical Laboratory at Groningen Nr. 14. The proper motions of the Hyades, derived from plates prepared by Prof. ANDERS DONNER, measured and discussed by Prof. J. C. KAPTEYN and W. DE SITTER, Sc. D.

für die KAPTEYN-DE SITTERsche Arbeit über die Eigenbewegung der Hyadensterne ist von Herrn H. A. WEERSMA durchgeführt und in Nr. 14 der Publikationen des Groninger Laboratoriums[1]) veröffentlicht worden. Für die Eigenbewegungen dieser Anhaltsterne sind dann auch aus den photographischen Aufnahmen Werte abgeleitet worden. Die definitiven Werte derselben werden schließlich durch Mittelbildung aus diesen beiden Bestimmungen unter Berücksichtigung der entsprechenden Gewichte gefunden. Für sämtliche Sterne der Triangulation habe ich nachstehend zur Vergleichung und zur Beurteilung der erlangten Sicherheit des Resultates die vier verschiedenen Bestimmungen zusammengestellt.

	PETER		WEERSMA		KAPT., DE SITTER		KP., D. SIT. definitiv	
A	+ 0ˢ.0036	— 0″.181	+ 0ˢ.0036	— 0″.181	+ 0ˢ.0022	— 0″.171	+ 0ˢ.0036	— 0″.181
B	+ 0.0069	— 0.020	+ 0.0069	— 0.020	+ 0.0059	— 0.016	+ 0.0068	— 0.021
a	+ 0.0065	— 0.025	+ 0.0063	— 0.021	+ 0.0067	— 0.013	+ 0.0064	— 0.019
b	+ 0.0063	— 0.018	+ 0.0057	— 0.024	+ 0.0080	— 0.028	+ 0.0062	— 0.025
c	— 0.0012	— 0.029	— 0.0014	— 0.033	— 0.0018	— 0.042	— 0.0014	— 0.034
d	+ 0.0016	— 0.047	+ 0.0020	— 0.048	+ 0.0025	— 0.061	+ 0.0021	— 0.050
e	+ 0.0055	— 0.026	+ 0.0061	— 0.023	+ 0.0062	— 0.028	+ 0.0061	— 0.024
f	+ 0.0040	— 0.061	+ 0.0011	— 0.061	+ 0.0007	— 0.067	+ 0.0008	— 0.066
g	+ 0.0007	— 0.043	— 0.0004	— 0.038	+ 0.0023	— 0.054	+ 0.0010	— 0.046
h	+ 0.0065	— 0.024	+ 0.0072	— 0.020	+ 0.0049	— 0.021	+ 0.0057	— 0.021
i	+ 0.0027	— 0.020						
1			+ 0.0070	— 0.020	+ 0.0060	— 0.025	+ 0.0068	— 0.021
2			+ 0.0052	— 0.028	+ 0.0062	— 0.005	+ 0.0054	— 0.023
3			+ 0.0071	— 0.030	+ 0.0090	— 0.027	+ 0.0085	— 0.028
4			— 0.0009	+ 0.032	— 0.0006	— 0.004	— 0.0008	+ 0.026
5			+ 0.0060	— 0.031	+ 0.0073	— 0.025	+ 0.0064	— 0.029
6			+ 0.0046	— 0.009	+ 0.0066	— 0.020	+ 0.0052	— 0.012
7			+ 0.0061	— 0.009	+ 0.0069	— 0.014	+ 0.0062	— 0.010
8			+ 0.0067	— 0.024	+ 0.0048	— 0.017	+ 0.0063	— 0.022
9			+ 0.0070	— 0.050	+ 0.0069	— 0.018	+ 0.0071	— 0.042
10			+ 0.0052	— 0.031	+ 0.0054	— 0.042	+ 0.0052	— 0.034
11			+ 0.0079	— 0.021	+ 0.0067	— 0.020	+ 0.0071	— 0.021
12			+ 0.0058	— 0.024	+ 0.0049	— 0.013	+ 0.0057	— 0.023
13			+ 0.0045	— 0.015	+ 0.0047	— 0.014	+ 0.0045	— 0.015
14			+ 0.0013	— 0.056	+ 0.0012	— 0.048	+ 0.0013	— 0.055
15			+ 0.0052	— 0.023	+ 0.0033	— 0.012	+ 0.0049	— 0.021
16	+ 0.0062	— 0.019						
17	+ 0.0070	— 0.005						

Das Vorhandensein einer gemeinsamen Eigenbewegung und damit wahrscheinlich auch eines physischen Zusammenhanges zwischen einer erheblichen Zahl der Hyadensterne, das schon in den vorstehenden Zahlen zum Ausdruck kommt, tritt noch viel deutlicher in der Groninger Arbeit hervor, welche 395 Sterne bis zur Größe 9.5 herab umfaßt.

1) The proper motions of 66 stars of the Hyades derived from the observations of 34 catalogues between 1755 and 1900 by H. A. WEERSMA, Phil. cand.

Wie bereits erwähnt, sind für die Sterne 1—15 zur Reduktion der Distanzen die in den letzten zwei Spalten aufgeführten Werte benutzt worden, für alle übrigen die von mir abgeleiteten in den zwei ersten Spalten. Nachdem aus diesen Werten die Eigenbewegungen im Bogen größten Kreises und deren Projektionen auf die einzelnen Distanzen ermittelt waren, ergaben sich schließlich die folgenden für ein einjähriges Zeitintervall geltenden Korrektionen, welche an die gemessenen Distanzen anzubringen sind, um sie von der Wirkung der Eigenbewegung der zugehörigen Sterne zu befreien.

aA:	+0″.0792	*hB*:	+0″.0021	4*A*:	−0″.0439	7*a*:	+0″.0152	10*h*:	+0″.0203
ab:	−0.0014	*iA*:	−0.0985	4*a*:	−0.1161	7*b*:	+0.0033	11*a*:	+0.0090
ac:	−0.0633	*if*:	−0.0134	4*b*:	+0.0638	7*c*:	−0.0888	11*b*:	−0.0058
ad:	−0.0121	1*A*:	+0.0990	4*c*:	−0.0550	7*d*:	−0.0225	11*c*:	+0.0115
ae:	−0.0142	1*a*:	+0.0055	4*d*:	−0.0805	7*g*:	+0.0678	11*d*:	+0.0674
af:	−0.0024	1*b*:	−0.0071	4*e*:	+0.1023	7*i*:	+0.0010	12*A*:	+0.1601
ag:	+0.0629	1*c*:	−0.0521	4*i*:	+0.0370	8*B*:	+0.0075	12*a*:	+0.0078
ai:	−0.0170	1*d*:	+0.0265	5*A*:	+0.0822	8*a*:	−0.0015	12*d*:	−0.0472
bB:	+0.0065	1*e*:	−0.0127	5*a*:	−0.0011	8*b*:	−0.0032	12*g*:	+0.0727
bc:	+0.0111	1*i*:	+0.0042	5*b*:	+0.0008	8*c*:	+0.0017	13*A*:	+0.0868
bd:	+0.0432	2*A*:	+0.0724	5*c*:	−0.0625	8*d*:	+0.0526	13*g*:	−0.0569
be:	0.0000	2*a*:	−0.0137	5*d*:	−0.0116	8*e*:	−0.0028	14*A*:	+0.1086
bf:	+0.0500	2*b*:	+0.0135	5*e*:	−0.0137	8*h*:	+0.0004	14*g*:	+0.0024
bh:	−0.0037	2*c*:	−0.0871	5*g*:	+0.0637	9*A*:	+0.1202	15*A*:	+0.0915
bi:	+0.0265	2*d*:	+0.0133	5*i*:	−0.0219	9*a*:	−0.0181	15*a*:	+0.0235
cB:	+0.0978	2*e*:	+0.0025	6*A*:	+0.1103	9*b*:	−0.0125	15*d*:	−0.0548
cd:	−0.0320	2*i*:	+0.0011	6*a*:	+0.0096	9*c*:	−0.0803	15*g*:	−0.0419
ch:	+0.1096	3*A*:	+0.1013	6*b*:	+0.0173	9*d*:	−0.0225	16*c*:	−0.0686
dA:	+0.0858	3*a*:	+0.0279	6*c*:	−0.0751	9*g*:	+0.0831	16*d*:	+0.0334
dg:	+0.0119	3*b*:	−0.0276	6*d*:	−0.0099	9*i*:	−0.0425	16 17:	+0.0184
eB:	+0.0165	3*c*:	−0.0518	6*e*:	+0.0112	10*a*:	−0.0149	17*c*:	−0.0149
ef:	+0.0306	3*d*:	+0.0277	6*g*:	+0.0567	10*b*:	−0.0058		
ei:	+0.0318	3*e*:	−0.0406	6*i*:	+0.0040	10*c*:	−0.0926		
gA:	+0.1435	3*i*:	−0.0038	7*A*:	+0.1251	10*d*:	+0.0523		

Die endgültigen Werte der Distanzen vor der Ausgleichung.

Die Werte der Distanzen, welche man durch Addition der Zahlen der beiden letzten Spalten auf Seite 500 seq. erhält, bedürfen noch der Reduktion auf einen gemeinsamen Skalenwert und der Verbesserung wegen Eigenbewegung. Das für beide Verbesserungen erforderliche Reduktionsmaterial findet sich auf Seite 509 und 530. Nach Anbringung dieser Verbesserungen sind die Distanzen durchweg auf das gleiche System und auf die Epoche 1900.0 bezogen und können dann mit dem gefundenen Skalenwerte ($1^p = 21''.728412$) in Bogenmaß umgesetzt werden. Die Einzelheiten dieser Rechnungen können hier übergangen

werden, und es genügt, da wo mehrfache Bestimmungen der nämlichen Distanz vorliegen, sogleich die endgültigen Mittelwerte mitzuteilen, die der weiteren Ausgleichung zugrunde gelegt werden. Der Vollständigkeit wegen sind auch die drei Distanzen des Normalbogens nochmals mit aufgeführt worden. Die beiden Distanzen eB und iA zwischen Sternen des Hauptnetzes finden keine Verwendung bei der Ausgleichung; sie sind nur gemessen worden, um das Resultat der Ausgleichung kontrollieren zu können. Die Distanzen in Skalenteilen habe ich als die Summe zweier Werte angesetzt, von denen der zweite den Betrag der Reduktion auf gleichen Skalenwert darstellt.

Distanzen des Hauptnetzes.

aA	= 219P.7002	+ 0P.0000	= 4773″.737	41	Beob.
ab	= 200.9911	+ 0.0000	= 4367.218	41	„
ac	= 291.3559	− 0.0013	= 6330.674	4	„
ad	= 181.7085	+ 0.0030	= 3948.303	5	„
ae	= 299.6928	+ 0.0026	= 6511.906	4	„
af	= 201.7835	+ 0.0015	= 4384.467	4	„
ag	= 297.0640	− 0.0022	= 6454.681	4	„
ai	= 229.0002	+ 0.0027	= 4975.870	4	„
bB	= 238.0854	+ 0.0000	= 5173.218	41	„
bc	= 207.1673	+ 0.0020	= 4501.460	4	„
bd	= 259.6542	− 0.0010	= 5641.852	5	„
be	= 163.9267	+ 0.0021	= 3561.912	4	„
bf	= 186.9203	+ 0.0002	= 4061.486	4	„
bh	= 300.7943	+ 0.0018	= 6535.821	4	„
bi	= 303.9844	+ 0.0035	= 6605.174	4	„
cB	= 312.0825	+ 0.0013	= 6781.086	4	„
cd	= 191.7474	+ 0.0019	= 4166.408	4	„
ch	= 208.2046	+ 0.0036	= 4524.033	4	„
dA	= 301.6412	− 0.0003	= 6554.177	4	„
dg	= 233.1607	+ 0.0019	= 5066.254	4	„
eB	= 238.9047	− 0.0001	= 5191.018	2	„
ef	= 142.7180	+ 0.0066	= 3101.179	4	„
ei	= 266.7656	+ 0.0068	= 5796.541	4	„
gA	= 211.3025	− 0.0005	= 4591.257	4	„
hB	= 214.1019	+ 0.0009	= 4652.115	4	„
iA	= 311.6965	− 0.0001	= 6772.669	2	„
if	= 130.1269	+ 0.0025	= 2827.505	4	„

Distanzen der ins Hauptnetz eingeschalteten Sterne.

1 *A*	= 307.9172	− 0.0062	= 6690.417	1	Beob.
1 *a*	= 92.6155	− 0.0007	= 2012.373	1	„
1 *b*	= 121.6608	− 0.0009	= 2643.476	1	„
1 *c*	= 208.3376	− 0.0016	= 4526.810	1	„
1 *d*	= 160.4737	− 0.0012	= 3486.813	1	„
1 *e*	= 256.9436	− 0.0076	= 5582.810	1	„
1 *i*	= 278.6843	− 0.0083	= 6055.187	1	„
2 *A*	= 306.2680	− 0.0091	= 6654.520	1	„
2 *a*	= 87.8646	− 0.0002	= 1909.154	1	„
2 *b*	= 117.6524	− 0.0003	= 2556.393	1	„
2 *c*	= 221.0714	− 0.0006	= 4803.518	1	„
2 *d*	= 174.6761	− 0.0005	= 3795.423	1	„
2 *e*	= 245.4476	− 0.0073	= 5333.027	1	„
2 *i*	= 264.0160	− 0.0035	= 5736.572	1	„
3 *A*	= 281.6193	+ 0.0066	= 6119.285	1	„
3 *a*	= 62.4979	− 0.0002	= 1357.977	1	„
3 *b*	= 139.0984	− 0.0004	= 3022.379	1	„
3 *c*	= 257.5688	− 0.0157	= 5596.221	1	„
3 *d*	= 194.0917	− 0.0040	= 4217.217	1	„
3 *e*	= 244.1145	− 0.0032	= 5304.151	1	„
3 *i*	= 230.0364	− 0.0030	= 4998.261	1	„
4 *A*	= 298.0412	− 0.0051	= 6475.852	1	„
4 *a*	= 88.1757	− 0.0018	= 1915.879	1	„
4 *b*	= 132.1060	− 0.0028	= 2870.393	1	„
4 *c*	= 282.0937	− 0.0172	= 6129.075	1	„
4 *d*	= 233.3436	− 0.0048	= 5070.082	1	„
4 *e*	= 211.5391	− 0.0028	= 4596.348	1	„
4 *i*	= 199.7615	− 0.0115	= 4340.251	1	„
5 *A*	= 213.2731	− 0.0011	= 4634.063	1	„
5 *a*	= 11.4910	− 0.0007	= 249.666	1	„
5 *b*	= 208.1871	− 0.0127	= 4523.299	1	„
5 *c*	= 289.9993	− 0.0177	= 6300.839	1	„
5 *d*	= 173.3556	− 0.0106	= 3766.511	1	„
5 *e*	= 310.4249	− 0.0016	= 6745.005	1	„
5 *g*	= 285.7356	− 0.0015	= 6208.547	1	„
5 *i*	= 238.2451	+ 0.0028	= 5176.749	1	„
6 *A*	= 272.0537	− 0.0034	= 5911.221	1	„
6 *a*	= 93.6137	− 0.0018	= 2034.038	1	„
6 *b*	= 187.0893	− 0.0036	= 4065.076	1	„
6 *c*	= 208.0582	− 0.0040	= 4520.688	1	„

6*d*	= 96ᵖ.5427	− 0ᵖ.0018	= 2097″.681	1	Beob.
6*e*	= 327.3956	− 0.0017	= 7113.750	1	„
6*g*	= 277.8103	− 0.0035	= 6036.301	1	„
6*i*	= 317.5567	− 0.0016	= 6899.968	1	„
7*A*	= 250.2882	− 0.0032	= 5438.295	1	„
7*a*	= 83.2757	− 0.0016	= 1809.414	1	„
7*b*	= 204.5113	− 0.0039	= 4443.621	1	„
7*c*	= 228.1494	− 0.0043	= 4963.750	1	„
7*d*	= 98.9628	− 0.0019	= 2150.263	1	„
7*g*	= 260.4627	− 0.0033	= 5659.369	1	„
7*i*	= 311.3812	− 0.0039	= 6765.734	1	„
8*B*	= 261.4061	+ 0.0052	= 5680.053	1	„
8*a*	= 193.1241	− 0.0068	= 4196.133	1	„
8*b*	= 60.7593	− 0.0021	= 1320.157	1	„
8*c*	= 150.2322	− 0.0053	= 3264.192	1	„
8*d*	= 209.0171	− 0.0073	= 4541.452	1	„
8*e*	= 224.5750	− 0.0028	= 4879.598	1	„
8*h*	= 276.4780	− 0.0035	= 6007.352	1	„
9*A*	= 195.3375	+ 0.0039	= 4244.459	1	„
9*a*	= 76.8392	− 0.0027	= 1669.535	1	„
9*b*	= 249.0842	− 0.0087	= 5412.015	1	„
9*c*	= 281.8621	− 0.0099	= 6124.200	1	„
9*d*	= 127.0256	− 0.0045	= 2759.967	1	„
9*g*	= 224.3964	+ 0.0045	= 4875.875	1	„
9*i*	= 297.8278	+ 0.0059	= 6471.453	1	„
10*a*	= 255.8853	− 0.0140	= 5559.677	1	„
10*b*	= 227.5206	− 0.0125	= 4943.390	1	„
10*c*	= 71.0755	− 0.0039	= 1544.273	1	„
10*d*	= 125.1299	− 0.0069	= 2718.724	1	„
10*h*	= 278.4522	+ 0.0055	= 6050.443	1	„
11*a*	= 209.5974	+ 0.0016	= 4554.254	1	„
11*b*	= 71.5850	+ 0.0005	= 1555.439	1	„
11*c*	= 135.8813	− 0.0078	= 2952.316	1	„
11*d*	= 212.5443	+ 0.0016	= 4618.285	1	„
12*A*	= 288.7066	− 0.0022	= 6273.088	1	„
12*a*	= 259.2630	+ 0.0076	= 5633.539	1	„
12*d*	= 117.1984	− 0.0009	= 2546.515	1	„
12*g*	= 141.0653	− 0.0011	= 3065.101	1	„
13*A*	= 165.8963	+ 0.0049	= 3604.769	1	„
13*g*	= 143.6859	+ 0.0042	= 3122.158	1	„

14*A*	= 174ᵖ6784	+ 0ᵖ0051	= 3795″596	1	Beob.
14*g*	= 126.3818	+ 0.0037	= 2746.157	1	„
15*A*	= 119.2594	+ 0.0035	= 2591.393	1	„
15*a*	= 303.5043	+ 0.0037	= 6594.747	1	„
15*d*	= 319.8851	+ 0.0039	= 6950.681	1	„
15*g*	= 137.0521	+ 0.0040	= 2978.011	1	„
16*c*	= 229.6142	+ 0.0007	= 4989.168	5	„
16*d*	= 229.7848	+ 0.0002	= 4992.868	4	„
16 17	= 133.2589	+ 0.0005	= 2895.515	3	„
17*c*	= 290.1500	− 0.0053	= 6304.383	2	„

Die Ausgleichung der Distanzen des Hauptnetzes.

Die am Schlusse dieser Abhandlung beigefügte Figur läßt die Gruppierung der beobachteten Sterne erkennen. Die ausgezogenen Linien geben, abgesehen von den beiden Verbindungen des Punktes 16 mit den Punkten *c* und *d*, die Distanzen an, die zur Bestimmung des Hauptnetzes benutzt worden sind. Hiernach enthält das Hauptnetz die elf Punkte

$$g,\ d,\ c,\ h,\ A,\ a,\ b,\ B,\ i,\ f,\ e$$

nebst 25 auszugleichenden Distanzen. Die Form des Netzes ist bekannt, sobald man die neun Dreiecke

$$Aag,\ adg,\ abd,\ bcd,\ bch,\ bhB,\ abf,\ bef,\ afi$$

kennt, zu deren Konstruktion 19 von den 25 Distanzen notwendig und hinreichend sind. Da hiernach sechs Distanzen überschüssig sind, so gehören zu dem Netz sechs Bedingungsgleichungen, denen die ausgeglichenen Werte der 25 Distanzen streng zu genügen haben. Nach Ausweis der Figur erhält man diese Bedingungen in der einfachsten Gestalt, wenn man für die sechs Vierecke

$$Aadg,\ abcd,\ bBhc,\ abei,\ abfi,\ abef$$

die Gleichung ansetzt, welche jedesmal zwischen den Seiten und Diagonalen eines sphärischen Vierecks besteht.

Bezeichnet man die Punkte des Hauptnetzes für den Augenblick mit den laufenden Nummern 1, 2, ..., ferner mit s_{qr} und s_{rq} die Distanz der beiden Punkte mit den Nummern q und r, so gilt für die sechs Distanzen, die in dem Viereck 1 2 3 4 auftreten, bekanntlich die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos s_{12} & \cos s_{13} & \cos s_{14} \\ \cos s_{21} & 1 & \cos s_{23} & \cos s_{24} \\ \cos s_{31} & \cos s_{32} & 1 & \cos s_{34} \\ \cos s_{41} & \cos s_{42} & \cos s_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man die linke Seite und differentiiert darauf nach den einzelnen s, so erhält man zunächst einen etwas weitläufigen Ausdruck, der sich allerdings stark zusammenziehen läßt. Übersichtlicher ist der folgende Weg, den ich einer handschriftlichen Notiz von Herrn BRUNS entnehme.

Man bezeichne die Deklinationen und Rektaszensionen der beiden Punkte q und r mit δ_q, α_q und δ_r, α_r, ferner mit p_{qr} den Positionswinkel, welcher der Richtung von q nach r in dem Punkte q zukommt. Dann erzeugen, wie die geometrische Betrachtung unmittelbar erkennen läßt, die Koordinatenänderungen $d\delta_q$ und $d\alpha_q$ in s_{qr} die Änderungen

$$-\cos p_{qr}\, d\delta_q \quad \text{und} \quad -\sin p_{qr} \cos \delta_q\, d\alpha_q .$$

Demnach erzeugt in der Distanz s_{qr} eine gleichzeitige Verschiebung der beiden Endpunkte die Änderung

$$ds_{qr} = -\cos p_{qr}\, d\delta_q - \sin p_{qr} \cos \delta_q\, d\alpha_q - \cos p_{rq}\, d\delta_r - \sin p_{rq} \cos \delta_r\, d\alpha_r .$$

Weiter denke man sich das Viereck 1 2 3 4 mit den sechs Distanzen s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{23}, s_{24}, s_{34} gegeben und mit den sechs vorläufig unbestimmten Faktoren $A(12)$, $A(13)$ usw. den Ausdruck

$$S = A(12)ds_{12} + A(13)ds_{13} + A(14)ds_{14} + A(23)ds_{23} + A(24)ds_{24} + A(34)ds_{34}$$

gebildet, der nach Einsetzung der soeben für die ds gefundenen Ausdrücke als eine lineare Verbindung der $d\delta$ und $d\alpha$ erscheint, die wir in der Gestalt

$$S = \sum_q S(\delta_q)\, d\delta_q + \sum_q S(\alpha_q) \cos \delta_q\, d\alpha_q , \qquad (q = 1, 2, 3, 4)$$

schreiben wollen. Hierin lassen sich die Koeffizienten in der Gestalt

$$S(\delta_q) = -\sum_r A(qr) \cos p_{qr}, \qquad S(\alpha_q) = -\sum_r A(qr) \sin p_{qr}, \qquad (r = 1, 2, 3, 4)$$

ansetzen, wenn man vorschreibt, daß $A(qr) = A(rq)$ sein soll, und wenn man ferner dem Zeichen $A(qq)$ den Wert Null beilegt.

Bei der Festsetzung der $A(qr)$ gehen wir von der Bemerkung

aus, daß in dem Dreieck 2 3 4 die Winkel in den Ecken 2, 3, 4 oder aber deren Ergänzungen zu 360° gleich den drei Differenzen

$$p_{24} - p_{23}, \quad p_{32} - p_{34}, \quad p_{43} - p_{42}$$

sind, daß also nach dem Sinussatze die drei Quotienten

$$\sin(p_{24} - p_{23}) : \sin s_{34}, \quad \sin(p_{32} - p_{34}) : \sin s_{42}, \quad \sin(p_{43} - p_{42}) : \sin s_{23}$$

den gleichen Wert besitzen, der mit k bezeichnet werden möge. Setzt man nun

$$A(12) = [\sin(p_{13} - p_{14}) \sin(p_{23} - p_{24})] : \sin s_{34}$$

und leitet hieraus durch Nummernvertauschung die übrigen $A(qr)$ ab, so wird wegen des Sinussatzes

$$A(12) = -k \sin(p_{13} - p_{14}), \quad A(13) = -k \sin(p_{14} - p_{12}),$$
$$A(14) = -k \sin(p_{12} - p_{13}).$$

Hiermit geht der zum Viereck 1 2 3 4 gehörige Ausdruck

$$S(\delta_1) = -A(12) \cos p_{12} - A(13) \cos p_{13} - A(14) \cos p_{14}$$

über in

$$S(\delta_1) = k[\cos p_{12} \sin(p_{13} - p_{14}) + \cos p_{13} \sin(p_{14} - p_{12}) + \cos p_{14} \sin(p_{12} - p_{13})],$$

woraus, da die rechte Seite identisch verschwindet, $S(\delta_1) = 0$ folgt. Da in derselben Weise auch die übrigen $S(\delta)$ und die $S(\alpha)$ verschwinden, so verschwindet auch S, d. h. zwischen den ds des Vierecks 1 2 3 4 besteht die Beziehung

$$0 = \sum ds_{12} \frac{\sin(p_{13} - p_{14}) \sin(p_{23} - p_{24})}{\sin s_{34}},$$

in der die Summation über die sechs Distanzen zwischen den vier Ecken 1, 2, 3, 4 auszudehnen ist.

Bei der Berechnung der Koeffizienten in den sechs Bedingungsgleichungen sind die Sternörter für 1900 auf Seite 497 zugrunde gelegt worden. Um eine möglichst scharfe Darstellung der einzelnen Gleichungen zu erzielen, wurden die Rechnungen sechsstellig ausgeführt. Die Positionswinkel an den einzelnen Sternen sollen hier nicht aufgeführt werden; die benutzten Distanzen sind weiterhin angegeben.

Um einen leichteren Überblick über die Gleichungen zu erlangen sind hier die einzelnen Distanzen des Hauptnetzes nicht nach ihren Endsternen benannt worden, sondern haben eine

laufende Nummer erhalten. Die angenommene Bezeichnung ist aus dem nachstehenden Täfelchen ersichtlich:

$Aa = 1$	$ad = 6$	$bc = 11$	$cB = 16$	$ef = 21$
$ab = 2$	$ae = 7$	$bd = 12$	$cd = 17$	$ei = 22$
$bB = 3$	$ag = 8$	$be = 13$	$ch = 18$	$gA = 23$
$af = 4$	$ai = 9$	$bh = 14$	$dA = 19$	$hB = 24$
$ac = 5$	$bf = 10$	$bi = 15$	$dg = 20$	$if = 25$

Die Koeffizienten der sechs Bedingungsgleichungen sind aus der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen. Die erste Spalte gibt die Distanznummer an. Ferner steht neben jeder Distanznummer q der Koeffizient, den die Änderung ds_q in der Bedingungsgleichung besitzt, welche dem in der Überschrift genannten Viereck zukommt.

	Aadg	*abcd*	*bBhc*	*abei*	*abfi*	*abef*
1	+ 24.6204	—	—	—	—	—
2	—	+ 23.2086	—	+ 26.6599	+ 9.7399	+ 20.2355
3	—	—	+ 20.9553	—	—	—
4	—	—	—	—	− 17.2411	+ 25.1808
5	—	− 36.0014	—	—	—	—
6	+ 22.2757	+ 25.6904	—	—	—	—
7	—	—	—	− 31.1692	—	− 40.2871
8	− 31.1375	—	—	—	—	—
9	—	—	—	+ 16.0255	+ 14.1823	—
10	—	—	—	—	+ 31.0833	− 25.8019
11	—	+ 22.1939	+ 21.4103	—	—	—
12	—	− 31.8152	—	—	—	—
13	—	—	—	+ 22.9372	—	+ 24.3651
14	—	—	− 30.2905	—	—	—
15	—	—	—	− 28.6078	− 36.6084	—
16	—	—	− 31.3045	—	—	—
17	—	+ 25.1375	—	—	—	—
18	—	—	+ 23.8981	—	—	—
19	− 31.9096	—	—	—	—	—
20	+ 23.0817	—	—	—	—	—
21	—	—	—	—	—	+ 26.3126
22	—	—	—	+ 19.6822	—	—
23	+ 19.1071	—	—	—	—	—
24	—	—	+ 20.9252	—	—	—
25	—	—	—	—	+ 27.6109	—

Die Werte der Distanzen $s_1, \ldots$, von denen bei der Ausgleichung ausgegangen wird, sind streng aus den Positionen auf Seite 497 berechnet worden. Man erhält

$s_1 = 4775''.944$	$s_6 = 3948''.704$	$s_{11} = 4501''.840$	$s_{16} = 6780''.564$	$s_{21} = 3103''.706$
$s_2 = 4367.118$	$s_7 = 6512.548$	$s_{12} = 5642.908$	$s_{17} = 4165.010$	$s_{22} = 5795.468$
$s_3 = 5171.110$	$s_8 = 6456.672$	$s_{13} = 3563.032$	$s_{18} = 4527.238$	$s_{23} = 4590.424$
$s_4 = 4383.502$	$s_9 = 4975.790$	$s_{14} = 6537.030$	$s_{19} = 6554.876$	$s_{24} = 4651.104$
$s_5 = 6329.304$	$s_{10} = 4063.660$	$s_{15} = 6604.962$	$s_{20} = 5067.676$	$s_{25} = 2823.960$

Die in den Bedingungsgleichungen vorkommenden Größen $ds_1, \ldots$ bedeuten die Verbesserungen der vorstehenden Werte s_α und sind durch die Ausgleichung der durch die Beobachtungen gefundenen Distanzen auf Seite 531, die mit b_α bezeichnet werden sollen, zu ermitteln. Entsprechend der Anzahl der Beobachtungsabende, auf denen sie beruhen, ist das Gewicht der Distanzen b_1, b_2, b_3 zu 10, das aller anderen Distanzen zu 1 festgesetzt worden. Nennen wir allgemein p_α das Gewicht von b_α und setzen $b_\alpha - s_\alpha =$ Beobachtung minus vorläufige Rechnung $= m_\alpha$, so haben wir für die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Widersprüche Δ_α die Ausdrücke

$$\Delta_\alpha = b_\alpha - (s_\alpha + ds_\alpha) = m_\alpha - ds_\alpha,$$

und weiter die Bedingung

$$\sum_\alpha p_\alpha \Delta_\alpha^2 = \sum_\alpha p_\alpha (m_\alpha - ds_\alpha)^2 = \text{Minimum}.$$

Das Minimum ist unter Berücksichtigung der sechs streng zu erfüllenden Nebenbedingungen aufzusuchen, die wir in der Gestalt

$$a_{1\lambda} ds_1 + a_{2\lambda} ds_2 + \cdots + a_{n\lambda} ds_n = \sum_\alpha a_{\alpha\lambda} ds_\alpha = 0$$

schreiben. Bezeichnet man mit g_λ das der λ-ten Nebenbedingung zukommende Korrelat, so sind von dem Ausdruck

$$\sum_\alpha p_\alpha (m_\alpha - ds_\alpha)^2 + 2 \sum_\lambda g_\lambda \sum_\alpha a_{\alpha\lambda} ds_\alpha$$

die partiellen Ableitungen nach den ds_α zu bilden und einzeln gleich Null zu setzen. Dies liefert die Gleichungen

$$0 = p_\alpha (ds_\alpha - m_\alpha) + \sum_\lambda a_{\alpha\lambda} g_\lambda,$$

woraus

I. $$ds_\alpha = m_\alpha - \sum_\lambda \frac{a_{\alpha\lambda}}{p_\alpha} g_\lambda$$

folgt. Setzt man die vorstehenden Ausdrücke der ds_α in die Nebenbedingungen ein, so erhält man zur Bestimmung der Korrelaten die Gleichungen

II. $$\sum_\alpha a_{\alpha\mu} m_\alpha = \sum_\lambda g_\lambda \sum_\alpha \frac{a_{\alpha\lambda} a_{\alpha\mu}}{p_\alpha}.$$

Ist S die Quadratsumme der übrig bleibenden Δ_α und ε_1 der mittlere Fehler eines m_α vom Gewichte Eins, so ergibt sich, da sechs überschüssige Messungen vorliegen, ε_1 aus der Gleichung $\varepsilon_1^2 = S : 6$.

Die nachstehende Tabelle enthält die Koeffizienten der in I gegebenen Ausdrücke der ds_α durch die Korrelate und bedarf keiner weiteren Erläuterung.

α	m_α	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
1	−2″.207	−2″.4620	—	—	—	—	—
2	+0.100	—	−2″.0235	−2″.3209	—	−0″.9738	−2″.6660
3	+2.108	—	—	—	−2″.0955	—	—
4	+0.965	—	−25.1808	—	—	+17.2410	—
5	+1.370	—	—	+36.0014	—	—	—
6	−0.401	−22.2757	—	−25.6904	—	—	—
7	−0.642	—	+40.2871	—	—	—	+31.1692
8	−1.991	+31.1375	—	—	—	—	—
9	+0.080	—	—	—	—	−14.1823	−16.0255
10	−2.174	—	+25.8019	—	—	−31.0833	—
11	−0.380	—	—	−22.1939	−21.4103	—	—
12	−1.056	—	—	+31.8152	—	—	—
13	−1.120	—	−24.3651	—	—	—	−22.9372
14	−1.209	—	—	—	+30.2905	—	—
15	+0.212	—	—	—	—	+36.6084	+28.6078
16	+0.522	—	—	—	+31.3045	—	—
17	+1.398	—	—	−25.1375	—	—	—
18	−3.205	—	—	—	−23.8981	—	—
19	−0.699	+31.9096	—	—	—	—	—
20	−1.422	−23.0817	—	—	—	—	—
21	−2.527	—	−26.3126	—	—	—	—
22	+1.073	—	—	—	—	—	−19.6822
23	+0.833	−19.1071	—	—	—	—	—
24	+1.011	—	—	—	−20.9252	—	—
25	+3.545	—	—	—	—	—	−27.6109

Hiermit nehmen die Gleichungen II, die zur Ermittelung der Korrelate dienen, folgende Gestalt an:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
+3442.434g_1 & - & +572.272g_3 & - & - & - & = & +4.124 \\
- & +4249.810g_2 & +46.964g_3 & - & -1216.443g_5 & +1868.530g_6 & = & +14.500 \\
+572.272g_1 & +46.964g_2 & +4146.637g_3 & +475.179g_4 & +22.600g_5 & +61.874g_6 & = & +3.002 \\
- & - & +475.179g_3 & +3408.786g_4 & - & - & = & +0.881 \\
- & -1216.443g_2 & +22.600g_3 & - & +3576.578g_5 & +1300.525g_6 & = & +8.015 \\
- & +1868.530g_2 & +61.874g_3 & - & +1300.525g_5 & +3031.318g_6 & = & +13.323
\end{array}
$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystemes ergibt für die Korrelaten:

$$g_1 = +0.001119, \quad g_2 = +0.004472, \quad g_3 = +0.000476,$$
$$g_4 = +0.000192, \quad g_5 = +0.003752, \quad g_6 = +0.000020.$$

Daraus folgt für die Verbesserungen ds:

$ds_1 = -2''.210$	$ds_6 = -0''.438$	$ds_{11} = -0''.395$	$ds_{16} = +0''.528$	$ds_{21} = -2''.645$
$ds_2 = +0.086$	$ds_7 = -0.461$	$ds_{12} = -1.041$	$ds_{17} = +1.386$	$ds_{22} = +1.073$
$ds_3 = +2.108$	$ds_8 = -1.956$	$ds_{13} = -1.229$	$ds_{18} = -3.210$	$ds_{23} = +0.812$
$ds_4 = +0.917$	$ds_9 = +0.027$	$ds_{14} = -1.203$	$ds_{19} = -0.663$	$ds_{24} = +1.007$
$ds_5 = +1.387$	$ds_{10} = -2.175$	$ds_{15} = +0.350$	$ds_{20} = -1.448$	$ds_{25} = +3.441$

Für den mittleren Fehler einer gemessenen Distanz vom Gewichte Eins, d. h. des Mittels aus durchschnittlich 4 Abenden, erhält man $\varepsilon_1 = \pm 0''.130$.

Setzt man die Werte der ds in die Bedingungsgleichungen ein, so lassen diese die nachfolgenden Widersprüche übrig

Viereck *Aady*:	$-0''.014$,	Viereck *abei*:	$+0''.011$,
Viereck *abcd*:	$+0.003$,	Viereck *abfi*:	0.000,
Viereck *bBhc*:	-0.013,	Viereck *abef*:	-0.020.

Die Erfüllung der Bedingungsgleichungen ist eine sehr vollkommene und eine gute Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung.

Aus den obigen Verbesserungen ds_a und den zugrunde gelegten Distanzen s_a auf Seite 538 ergeben sich dann schließlich die folgenden definitiven Werte für die ausgeglichenen Distanzen des Hauptnetzes:

$aA = 4773''.734$	$af = 4384''.419$	$bd = 5641''.867$	$cB = 6781''.092$	$ef = 3101''.061$
$ab = 4367.204$	$ag = 6454.716$	$be = 3561.803$	$cd = 4166.396$	$ei = 5796.543$
$ac = 6330.691$	$ai = 4975.817$	$bf = 4061.485$	$ch = 4524.028$	$gA = 4591.230$
$ad = 3948.266$	$bB = 5173.218$	$bh = 6535.827$	$dA = 6554.213$	$hB = 4652.111$
$ae = 6512.087$	$bc = 4501.445$	$bi = 6605.312$	$dg = 5066.228$	$if = 2827.401$

Mit den direkt beobachteten Werten der Distanzen verglichen bleiben im Sinne „Rech. — Beob." die folgenden Widersprüche übrig:

$aA - 0''.003$	$af - 0''.048$	$bd + 0''.015$	$cB + 0''.006$	$ef - 0''.118$
$ab - 0.014$	$ag + 0.035$	$be - 0.109$	$cd - 0.012$	$ei \quad 0.000$
$ac + 0.017$	$ai - 0.053$	$bf - 0.001$	$ch - 0.005$	$gA - 0.021$
$ad - 0.037$	$bB \quad 0.000$	$bh + 0.006$	$dA + 0.036$	$hB - 0.004$
$ae + 0.181$	$bc - 0.015$	$bi + 0.138$	$dg - 0.026$	$if - 0.104$

Berechnung der Koordinaten der Hauptsterne aus den ausgeglichenen Distanzen.

Aus den im vorhergehenden ermittelten Distanzen des Hauptnetzes sind nunmehr wieder die Koordinaten der Hauptsterne herzuleiten. Zu diesem Zwecke sind zunächst die Winkel in den einzelnen Dreiecken zu berechnen. Wirklich gebraucht werden

nur gewisse dieser Winkel in der weiteren Rechnung. Um aber eine scharfe Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung zu haben, sind sämtliche Winkel berechnet worden, die man erhält, indem jedes der sechs Vierecke des Hauptnetzes auf doppelte Weise in zwei Dreiecke zerlegt wird. Die Winkel an den Viereckseckeu werden dann sowohl direkt als auch als Summen zweier Winkel gefunden. In der folgenden Zusammenstellung geben die eingeklammerten Zahlen die Kontrollwerte an.

Viereck *Aadg*.

gAa	87°	7′	19″.44	(19″.38)	*Agd*	85°	20′	2″.84	(2″.82)
Aga	47	37	13.26		*gAd*	50	23	43.84	
Aag	45	16	20.38		*Adg*	44	17	9.42	
gda	90	35	19.20	(19.12)	*Aad*	96	59	0.10	(0.04)
gad	51	42	39.66		*aAd*	36	43	35.54	
agd	37	42	49.56		*Ada*	46	18	9.70	

Viereck *abcd*.

abc	91	5	9.64	(9.42)	*dab*	85	17	44.54	(44.24)
bac	45	18	52.54		*adb*	50	29	20.10	
bca	43	36	45.46		*dba*	44	13	37.02	
adc	102	31	11.48	(11.26)	*dcb*	81	7	21.36	(21.10)
dac	39	58	51.70		*dbc*	46	51	32.40	
dca	37	30	35.64		*bdc*	52	1	51.16	

Viereck *bBhc*.

bBh	83	13	10.28	(10.40)	*cbB*	88	43	23.70	(23.92)
Bbh	44	58	49.82		*bcB*	49	42	28.12	
Bhb	51	48	57.76		*bBc*	41	35	4.50	
bch	92	48	4.14	(4.30)	*chB*	95	17	8.74	(8.80)
cbh	43	44	34.10		*cBh*	41	38	5.90	
chb	43	28	11.04		*Bch*	43	5	36.18	

Viereck *abei*.

abe	110	1	8.48	(8.32)	*bai*	89	44	23.22	(23.08)
bae	30	55	41.86		*abi*	48	52	54.02	
bea	39	3	45.00		*bia*	41	23	35.36	
aie	73	57	11.88	(11.80)	*ieb*	86	18	59.24	(59.04)
iae	58	48	41.22		*eib*	32	33	36.44	
iea	47	15	14.04		*ebi*	61	8	14.30	

Viereck *abfi.*

abf	62°	34′	4″.52	(4″.22)	*ifb*	146°	26′	58″.50 (57″.98)
afb	62	8	15.68		*ibf*	13	41	10.20
fab	55	18	17.90		*bif*	19	52	6.72
aif	61	15	42.42	(42.08)	*bai*	89	44	23.24 (23.02)
afi	84	18	42.30		*abi*	48	52	54.02
fai	34	26	5.12		*bia*	41	23	35.36

Viereck *abef.*

fab	55	18	17.90	(18.06)	*afe*	119	55	57.62 (57.76)
afb	62	8	15.68		*fae*	24	22	36.20
fba	62	34	4.52		*fea*	35	41	54.72
feb	74	45	39.54	(39.72)	*abe*	110	1	8.48 (8.68)
bfe	57	47	42.08		*bae*	30	55	41.86
fbe	47	27	4.16		*bea*	39	3	45.00

Die vorhandenen Kontrollen können als befriedigend erfüllt angesehen werden. Sie verbürgen nicht nur die Richtigkeit der berechneten Winkel, sondern auch der ganzen Ausgleichung. Die größte vorkommende Abweichung findet bei *ifb* statt und beträgt 0″.52, sie würde fast ganz verschwinden, wenn die Distanz *ib* um — 0″.003 geändert wird.

Ich schließe hier sogleich die Berechnung der Winkel in dem Dreieck *cd*16 an. Der Stern 16 ist zwar nicht in die allgemeine Ausgleichung mit einbezogen worden, muß aber doch insofern mit zu den Hauptsternen gezählt werden, als er zur Orientierung des Netzes gebraucht wird. Es wird

*cd*16 65° 17′ 17″.28, *dc*16 65° 22′ 50″.18, *d*16*c* 49° 20′ 38″.30.

Unser Hauptnetz enthält 2 Sterne des F.K., *A* und *B*. Die Herleitung der sphärischen Koordinaten der einzelnen Sterne aus den Distanzen und Winkeln des Hauptnetzes erfolgt daher am einfachsten in der Weise, daß man für *A* direkt die Position des F.K. zugrunde legt und für den Positionswinkel von *A* nach *B* den aus den Örtern des F.K. berechneten Wert. Da die Distanz *AB* nicht selbst gemessen ist, muß aus dem langen und schmalen Viereck *AabB* der Winkel *aAB* berechnet werden, um den Positionswinkel von *A* nach *a* zu erhalten, der dann die Orientierung des Systems gestattet.

Nach den Örtern des F.K. für *A* und *B* (siehe Seite 497) findet man für den Positionswinkel von *A* nach *B* 257° 8′ 34″.97

und da der Winkel aAB sich gleich $1^0\,27'\,2''.65$ ergibt, so ist der Positionswinkel von a gegen A gleich $255^0\,41'\,32''.32$. Hierbei sind die direkt berechneten Winkel an den Viereckseckеn benutzt worden. Die aus den Summen zweier Winkel gefundenen würden $1^0\,27'\,2''.41$ und $255^0\,41'\,32''.55$ ergeben.

Im weiteren Verlaufe der Rechnung wird auch der Positionswinkel von b in bezug auf B gebraucht. Winkel bBA beträgt $0^0\,38'\,19''.34$, der Positionswinkel von A gegen B $76^0\,2'\,41''.41$ und sonach der von b gegen B $76^0\,41'\,0''.75$.

Die Berechnung der Distanz AB aus den zugrunde gelegten Örtern des F.K. liefert $AB = 14\,311''.910$, die ausgeglichenen Distanzen des Hauptnetzes ergeben dafür $14\,311''.853$. Von der Differenz $0''.057$ beider Werte kommen nur $0''.017$ auf Verbesserungen von Aa, ab, bB gegen die für sie angenommenen Ausgangswerte; der Rest von $0''.040$ fällt der durch die Ausgleichung bedingten Änderung der Winkel Aab und abB zur Last, infolge deren die Sterne A und B einander genähert worden sind.

Von dem Orte des F.K. für A ($= \alpha$ Tauri) ausgehend, wurden unter Benutzung des oben angegebenen Positionswinkels von B gegen A und der Winkel auf Seite 541 zunächst die Örter von a, b, B berechnet. Zur Kontrolle wurde b sowohl von a wie von B aus berechnet, beide Werte stimmen bis auf $0''.003$ überein. Um die Koordinaten bis auf $0''.01$ sicher zu erhalten, machte sich hier und bei den anderen Sternen des Hauptnetzes die Rechnung mit achtstelligen Logarithmen notwendig. Verwendet wurden die vom französischen Kriegsministerium (Paris 1891) herausgegebenen Tafeln. Bei den vier Sternen des Normalbogens erhält man für 1900.0

	AR.	Dekl.
A	$67^0\,32'\,43''.020$	$+\,16^0\,18'\,29''.940$
a	$66\;12\;31.503$	$+\,15\;58\;35.164$
b	$64\;58\;40.603$	$+\,15\;42\;44.808$
B	$63\;31\;31.048$	$+\,15\;23\;10.316$

Die übrigen Hauptsterne sind dann unter Benutzung der ausgeglichenen Distanzen und der aus ihnen abgeleiteten Winkel an die Sterne des Normalbogens angeschlossen worden. Der Kontrolle halber wurden für jeden Stern alle mit den vorhandenen Distanzen möglichen Anschlüsse berechnet, deren Anzahl 2 bis 3 betrug. Einschließlich des Sternes 16 ergeben sich dann schließlich die nachfolgenden Positionen:

	AR.	Dekl.
c	65° 14′ 19″.397	+ 14° 29′ 15″.552
d	66 21 38.577	+ 14 53 22.271
e	64 25 10.324	+ 16 32 37.656
f	65 16 36.837	+ 16 48 12.687
g	67 48 25.124	+ 15 3 29.188
h	63 58 59.613	+ 14 10 19.809
i	65 53 29.220	+ 17 19 29.142
16	66 14 52.469	+ 13 30 24.944

Die Distanzen eB und iA sind, nur zur Kontrolle, an je zwei Abenden gemessen worden und bei der Ausgleichung unberücksichtigt geblieben. Benutzt man die eben erhaltenen Positionen der Sterne A, B, e, i, so findet man $eB = 5190''.954$ und $iA = 6772''.696$. Die Beobachtung hatte ergeben $eB = 5191''.018$ und $iA = 6772''.669$. Die Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Werte ist sonach vorzüglich. Das Vorhandensein dieser Kontrolle ist von besonderem Werte insofern, als gerade der Stern i nach der Triangulation von WIRTZ eine von meiner Bestimmung sehr wesentlich abweichende Position hat, die sich mit meiner Kontrollmessung iA in keiner Weise in Einklang bringen läßt. Nach WIRTZ ist für i

AR. $= 65^{\circ}\,53'\,27''.60$, Dekl. $= +\,17^{\circ}\,19'\,29''.82$ (Epoche 1899.0).

Die Orientierung des Systems.

Die vorstehend erhaltenen Resultate bedürfen noch einer Verbesserung wegen der für den Nullpunkt A angenommenen Koordinaten und wegen der Orientierung des Parallels. A soll noch bedürfen der Korrektionen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, ferner soll das ganze System noch bedürfen einer Drehung Δp um A. Zur Ermittlung von $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, Δp stehen gute Bestimmungen von A, B, a, b, c, d, e, f, 16 zur Verfügung, die auf neueren Meridiankreis-Beobachtungen beruhen oder den Fundamentalkatalogen von AUWERS, NEWCOMB und Boss entnommen sind. Reduziert man die Meridiankreis-Positionen mit den früher abgeleiteten Eigenbewegungen, so hat man im ganzen das folgende Material zur Verfügung (Epoche und m. Aeq. 1900.0):

A	F.K. AUWERS	67° 32′ 43″.020	+ 16° 18′ 29″.940
	F.K. NEWCOMB	43.350	30.030
	F.K. BOSS	43.390	29.770
	M.K. KÜSTNER	43.177	29.914

B	F.K.	AUWERS	63°	31′	30.″990	+15°	23′	10.″300
	F.K.	NEWCOMB			31.390			10.480
	F.K.	BOSS			31.260			10.260
	M.K.	KÜSTNER			31.300			10.221
a	M.K.	„	66	12	31.505	+15	58	35.016
b	M.K.	„	64	58	40.277	+15	42	44.662
c	M.K.	„	65	14	19.347	+14	29	15.222
d	M.K.	„	66	21	38.327	+14	53	21.477
e	M.K.	„	64	25	10.310	+16	32	37.795
f	M.K.	BATTERMANN	65	16	37.403	+16	48	12.937
	M.K.	OERTEL			37.451			13.075
16	M.K.	KÜSTNER	66	14	52.410	+13	30	24.642
	M.K.	BATTERMANN			52.999			25.152
	M.K.	OERTEL			52.895			25.440

Die Meridiankreis-Positionen haben sämtlich auch bei der Ableitung der Eigenbewegungen Verwendung gefunden. Um bei mehrfach bestimmten Sternen die Erteilung von Gewichten zu vermeiden, habe ich keine Mittelwerte gebildet, sondern jede einzelne Bestimmung zur Bildung einer Beobachtungsgleichung verwendet. Die Meridianbeobachtungen, die fast durchweg auf einer größeren Anzahl von Abenden beruhen, sind den Positionen der Fundamentalkataloge als gleichwertig angesehen worden. Ein sicheres Abwägen der Gewichte zwischen M.K. und F.K. ist im vorliegenden Falle nicht angängig. Die Örter der F.K. haben für sich, daß sie auf einer sehr großen Zahl von Beobachtungen und Beobachtern beruhen, ihre Epoche liegt aber doch immerhin von 1900 ziemlich weit ab. Die neueren Meridiankreis-Positionen haben dagegen in der Mehrzahl den geringen Epochenunterschied für sich, namentlich aber kommt bei ihnen ganz wesentlich mit in Betracht, daß fast durchgängig auf den Einfluß der Helligkeitsgleichung Rücksicht genommen worden ist. Dieser Umstand fällt hier um so mehr ins Gewicht, als der Größenunterschied zwischen *A* und den andern in Frage kommenden Sternen recht erheblich ist.

Für zwei Sterne 1 und 2 mit den Koordinaten α_1, δ_1 und α_2, δ_2, der Distanz s und dem zu s gehörigen Positionswinkel p ist die den Verschiebungen $d\alpha_1$, ... entsprechende Änderung von p durch den Ausdruck gegeben

$$\Delta p = 206\,265\,\frac{\cos p}{s}\cos\tfrac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\,d(\alpha_2-\alpha_1) - 206\,265\,\frac{\sin p}{s}\,d(\delta_2-\delta_1).$$

Als Stern 1 soll der als Nullpunkt der Triangulation benutzte Stern *A*, als Stern 2 ein beliebiger anderer Stern der Triangulation gelten. Bezeichnen α_1, δ_1, α_2, δ_2 die aus der Triangulation fol-

genden Werte, α_1', δ_1', α_2', δ_2' die Meridian- oder F.K.-Positionen, so haben wir

$$d(\alpha_2 - \alpha_1) = (\alpha_2' - \alpha_1') - (\alpha_2 - \alpha_1), \quad d(\delta_2 - \delta_1) = (\delta_2' - \delta_1') - (\delta_2 - \delta_1)$$

und es ist dann Δp die gesuchte Verbesserung für die Orientierung des Parallels.

Dieses Verfahren läßt sich jedoch nur in den Fällen anwenden, wo man die gleiche systematische Korrektion für $\alpha_1'\delta_1'$ und $\alpha_2'\delta_2'$ voraussetzen darf. Beide Sterne müssen also entweder in demselben F.K. vorkommen oder von demselben Beobachter bestimmt sein. Es trifft dies zu bei *B*, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, die sich gleichzeitig mit *A* bei AUWERS, NEWCOMB, BOSS und KÜSTNER finden. Ferner sind *f* und 16 beide von BATTERMANN und OERTEL bestimmt; hier tritt *f* an Stelle des Sterns 1. Die Resultate aus den verschiedenen Sternpaaren können jedoch nicht gleiches Gewicht erhalten, da die Sicherheit der Bestimmung von Δp jedesmal von der Entfernung zwischen beiden benutzten Sternen abhängt. Setzt man das Gewicht einfach gleich der Größe der Distanz an, so ergeben die einzelnen Sternpaare die folgenden Resultate

		Δp	Gew.
AB	AUWERS	− 0″.05	14.3
	NEWCOMB	+ 1.00	14.3
	BOSS	+ 1.11	14.3
	KÜSTNER	− 1.26	14.3
Aa	„	− 3.52	4.8
Ab	„	− 0.24	9.1
Ac	„	− 1.81	10.3
Ad	„	− 5.61	6.6
Ae	„	+ 3.40	10.8
f 16	BATTERMANN	+ 0.75	12.3
	OERTEL	+ 3.41	12.3

Als Mittelwert mit Berücksichtigung der Gewichte findet man $\Delta p = + 0''.20 \pm 0''.71$. Ganz abgesehen von dem zugehörigen mittleren Fehler kommt dieser Betrag einer Drehung des ganzen Systems seiner Kleinheit wegen nicht in Betracht. Würde man Δp lediglich nur aus den Positionen der F.K. bestimmen, so erhielte man $\Delta p = + 0''.69 \pm 0''.37$, während die Meridianbestimmungen für sich allein $\Delta p = - 0''.06 \pm 1''.03$ ergeben. Nach den F.K.-Positionen scheint tatsächlich die Realität eines kleinen positiven Betrages von Δp angedeutet zu sein. Dreht man das ganze System um *A* um den Betrag von 0″.7, so würden die Sterne *B*

und 16 in AR. die Korrektion $-0''.011$ und $-0''.035$ erfordern, in Dekl. die Korrektion $+0''.047$ und $+0''.015$. Es wären dies die größten überhaupt notwendigen Korrektionen. Bei dieser Sachlage kann man von einer Drehung des Systems absehen und das System unbedenklich als im Parallel genügend orientiert ansehen. Die Größen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, d. h. die an sämtliche Bestimmungen der Triangulation anzubringenden konstanten Korrektionen findet man nunmehr direkt aus der Vergleichung der F.K.- und M.K.-Positionen auf Seite 544 mit den Resultaten der Triangulation. Man erhält

		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
A	AUWERS	$0''.00$	$0''.00$
	NEWCOMB	$+0.33$	$+0.09$
	BOSS	$+0.37$	-0.17
	KÜSTNER	$+0.16$	-0.03
B	AUWERS	-0.06	-0.02
	NEWCOMB	$+0.34$	$+0.16$
	BOSS	$+0.21$	-0.06
	KÜSTNER	$+0.25$	-0.09
a	„	0.00	-0.15
b	„	-0.33	-0.15
c	„	-0.05	-0.33
d	„	-0.25	-0.79
e	„	-0.01	$+0.14$
f	BATTERMANN	$+0.57$	$+0.25$
	OERTEL	$+0.61$	$+0.39$
16	KÜSTNER	-0.06	-0.30
	BATTERMANN	$+0.53$	$+0.21$
	OERTEL	$+0.43$	$+0.50$

Die Mittelwerte sind

$$\Delta\alpha = +0''.169 \pm 0''.075, \quad \Delta\delta = -0''.019 \pm 0''.069.$$

Es würde sonach nur eine Änderung der sämtlichen Rektaszensionen der Triangulation um rund $+0''.15$ in Frage kommen.

Faßt man die Abweichungen der aus der Triangulation folgenden Positionen von den F.K.- resp. M.K.-Positionen als Fehler auf, so findet man für die Summe der Fehlerquadrate aus dem Ausdrucke

$$\Sigma vv = \Sigma(\Delta\alpha^2 \cos^2\delta + \Delta\delta^2),$$

wenn man die Positionen der Triangulation direkt verwendet, den Wert 3.1884 und, wenn man vorher die Rektaszensionen der Triangulation um $+0''.15$ korrigiert, den Wert 2.7115.

Die Ermittlung von $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ ist für uns ohne großen Belang, da es sich nur um eine für die ganze Gruppe konstante

Korrektion handelt, die mit der heliometrischen Triangulation an sich gar nichts zu tun hat und jederzeit nachträglich noch angebracht werden kann. In den obigen Zahlen spricht sich aber doch ziemlich deutlich die Tatsache aus, daß an dieser Stelle des Himmels die Rektaszensionen des F.K. von AUWERS einer kleinen Korrektion bedürfen, während eine solche für die Deklinationen nicht notwendig erscheint. Dementsprechend ist angenommen worden

$$\Delta\alpha = +\,0''.15, \quad \Delta\delta = 0''.00.$$

Bringt man diese Korrektionen an, so ergeben sich nunmehr als definitive Örter der Sterne des Hauptnetzes für die Epoche und das mittlere Aequinox 1900.0 die folgenden:

A	67° 32′ 43″.17	+ 16° 18′ 29″.94
B	63 31 31.20	+ 15 23 10.32
a	66 12 31.65	+ 15 58 35.16
b	64 58 40.75	+ 15 42 44.81
c	65 14 19.55	+ 14 29 15.55
d	66 21 38.73	+ 14 53 22.27
e	64 25 10.47	+ 16 32 37.66
f	65 16 36.99	+ 16 48 12.69
g	67 48 25.27	+ 15 3 29.19
h	63 58 59.76	+ 14 10 19.81
i	65 53 29.37	+ 17 19 29.14
16	66 14 52.62	+ 13 30 24.94

Die Punkte zweiter Ordnung.

Die bisher beiseite gebliebenen 16 Sterne zweiter Ordnung sind ihrer Lage nach durch Anschluß an das Hauptnetz bestimmt worden und zwar sind im allgemeinen alle Abstände von Hauptsternen beobachtet worden, die sich überhaupt messen ließen, jeder einzelne allerdings immer nur an je einem Abende.

Bezeichnet man mit A, D die Position eines Hauptsternes, mit α, δ die des zu bestimmenden Sternes, so gilt für die Distanz s der beiden Sterne voneinander der hinreichend genaue Ausdruck

$$s = (A - \alpha)\cos\frac{D+\delta}{2}\sin p + (D - \delta)\cos p.$$

Hierin ist der Positionswinkel p von dem zu bestimmenden Stern α, δ aus gerechnet. Sind $d\alpha$ und $d\delta$ die an α und δ anzubringenden Verbesserungen und ds die Verbesserungen, welche an die mit A, D und α, δ berechneten Distanzen anzubringen sind, um sie

mit den beobachteten in Einklang zu bringen (also ds = Beobachtung — Rechnung), so liefert jede gemessene Distanz eine Beobachtungsgleichung von der Form

$$ds = -d\alpha \cos\frac{D+\delta}{2} \sin p - \Delta\delta \cos p.$$

Als Ausgangswerte α, δ der Punkte zweiter Ordnung sind wieder die Positionen auf Seite 497 benutzt worden, für die Örter A, D der Hauptsterne müssen jetzt die Seite 548 gefundenen Werte zugrunde gelegt werden. Mit diesen Zahlen ergibt dann die Rechnung

	s	p		s	p		s	p
1*A*	6693″.124	68° 59′.1	5*b*	4520″.906	260° 6′.7	9*b*	5408″.942	273° 5′.2
1*a*	2014.652	54 8.2	5*c*	6300.440	214 31.6	9*c*	6121.636	227 38.6
1*b*	2640.768	275 3.5	5*d*	3767.786	174 49.8	9*d*	2759.508	192 48.3
1*c*	4525.718	202 34.1	5*e*	6742.140	289 19.6	9*g*	4878.232	115 7.4
1*d*	3488.420	141 31.9	5*g*	6211.224	120 13.1	9*i*	6470.910	339 57.8
1*e*	5580.296	305 26.1	5*i*	5175.636	345 42.6			
1*i*	6055.952	5 1.7				10*a*	5560.194	19 13.6
			6*A*	5913.670	57 3.5	10*b*	4941.404	330 30.8
2*A*	6656.188	71 51.4	6*a*	2033.782	9 46.6	10*c*	1541.162	265 53.8
2*a*	1910.748	63 30.6	6*b*	4061.396	285 11.4	10*d*	2721.154	60 32.1
2*b*	2554.736	267 51.3	6*c*	4518.856	222 9.9	10*h*	6047.108	258 18.3
2*c*	4803.100	200 12.3	6*d*	2099.650	155 20.6			
2*d*	3796.332	143 41.5	6*e*	7110.532	304 55.1	11*a*	4555.846	57 23.2
2*e*	5331.482	303 2.3	6*g*	6039.866	102 13.4	11*b*	1553.868	344 12.6
2*i*	5736.786	6 4.9	6*i*	6899.162	353 46.7	11*c*	2953.864	170 34.5
						11*d*	4621.310	108 20.9
3*A*	6120.692	77 11.6	7*A*	5440.688	56 21.1			
3*a*	1359.852	84 9.7	7*a*	1808.064	357 10.5	12*A*	6273.986	16 5.4
3*b*	3020.682	254 29.7	7*b*	4440.280	281 16.6	12*a*	5631.720	329 11.4
3*c*	5596.646	201 8.7	7*c*	4961.934	224 23.0	12*d*	2543.740	291 15.3
3*d*	4219.714	153 24.6	7*d*	2152.180	168 13.6	12*g*	3067.724	60 5.0
3*e*	5301.826	294 28.1	7*g*	5663.416	105 9.1			
3*i*	4997.490	2 54.0	7*i*	6764.384	349 57.7	13*A*	3603.552	306 7.7
						13*g*	3120.300	220 18.8
4*A*	6475.908	84 14.2	8*B*	5676.722	270 1.7			
4*a*	1915.598	107 21.3	8*a*	4198.380	59 45.4	14*A*	3794.958	312 5.8
4*b*	2870.094	238 1.3	8*b*	1317.906	331 15.7	14*g*	2745.854	224 27.9
4*c*	6128.378	194 33.2	8*c*	3265.222	175 13.7			
4*d*	5069.309	152 10.0	8*d*	4544.556	113 16.5	15*A*	2589.848	311 27.1
4*e*	4596.924	288 48.6	8*e*	4877.408	328 21.9	15*a*	6592.672	274 45.5
4*i*	4341.610	9 36.9	8*h*	6005.820	223 11.4	15*d*	6948.540	240 58.7
						15*g*	2976.984	200 30.9
5*A*	4636.718	72 49.8	9*A*	4246.108	55 10.3	17*c*	6305.002	341 39.9
5*a*	247.262	310 26.4	9*a*	1667.802	317 8.7	17 16	2897.232	32 8.1

Legt man diese Werte zugrunde, so ergibt ihre Verbindung mit den beobachteten Distanzen auf Seite 532 die nachfolgenden

Resultate. Für jeden an die Sterne des Hauptnetzes angeschlossenen Stern sind aufgeführt die Beobachtungsgleichungen, die sich aus ihnen nach der Methode der kleinsten Quadrate ergebenden Normalgleichungen, die Größen $d\alpha$ und $d\delta$, der mittlere Fehler ε einer Beobachtungsgleichung und die definitive Position des Sternes für 1900.0, wie sie sich nach Anbringung von $d\alpha$ und $d\delta$ an die Ausgangswerte ergibt. Außerdem sind noch bei den Beobachtungsgleichungen die nach Einsetzen der gefundenen Lösung übrig bleibenden Widersprüche aufgeführt.

Stern 1.

A	$-0.8974\,d\alpha$	$-0.3586\,d\delta$	$=-2''.707$	$0''.00$
a	-0.7798	-0.5858	$=-2.279$	$+0.12$
b	$+0.9590$	-0.0882	$=+2.708$	-0.11
c	$+0.3706$	$+0.9234$	$=+1.092$	-0.15
d	-0.6001	$+0.7830$	$=-1.607$	$+0.03$
e	$+0.7828$	-0.5798	$=+2.514$	$+0.30$
i	-0.0841	-0.9961	$=-0.765$	-0.35

$+3.4504\,d\alpha \quad +0.1962\,d\delta \quad = +10''.205$

$+0.1962\,d\alpha \quad +3.2737\,d\delta \quad = +1.122$

$d\alpha = +2''.948 \quad d\delta = +0''.166 \quad \varepsilon = \pm 0''.230$

* 1 $65^\circ\,44'\,16''.30 \quad +15^\circ\,38'\,56''.87$

Stern 2.

A	$-0.9134\,d\alpha$	$-0.3114\,d\delta$	$=-1.668$	-0.05
a	-0.8610	-0.4460	$=-1.594$	-0.07
b	$+0.9619$	$+0.0374$	$=+1.657$	-0.05
c	$+0.3334$	$+0.9385$	$=+0.418$	-0.15
d	-0.5711	$+0.8058$	$=-0.909$	$+0.12$
e	$+0.8053$	-0.5452	$=+1.545$	$+0.10$
i	-0.1016	-0.9944	$=-0.214$	-0.05

$+3.5968\,d\alpha \quad +0.2191\,d\delta \quad = +6.414$

$+0.2191\,d\alpha \quad +3.1135\,d\delta \quad = +0.323$

$d\alpha = +1''.782 \quad d\delta = -0''.022 \quad \varepsilon = \pm 0''.112$

* 2 $65^\circ\,42'\,54''.58 \quad +15^\circ\,44'\,24''.88$

Stern 3.

A	$-0.9368\,d\alpha$	$-0.2217\,d\delta$	$=-1.407$	$+0.28$
a	-0.9565	-0.1017	$=-1.875$	$+0.01$
b	$+0.9271$	$+0.2673$	$=+1.697$	$+0.09$
c	$+0.3481$	$+0.9327$	$=-0.425$	$+0.03$
d	-0.4315	$+0.8942$	$=-2.497$	-0.45
e	$+0.8739$	-0.4142	$=+2.325$	-0.04
i	-0.0485	-0.9987	$=+0.771$	-0.40

$+3.7252\,d\alpha \quad +0.1780\,d\delta \quad = +7.609$

$+0.1780\,d\alpha \quad +2.9693\,d\delta \quad = -3.406$

$d\alpha = +2''.103 \quad d\delta = -1''.273 \quad \varepsilon = \pm 0''.300$

* 3 $65^\circ\,49'\,6''.60 \quad +15^\circ\,56'\,16''.83$

Stern 4.

A	$-0.9553\,d\alpha$	$-0.1004\,d\delta$	$=-0.056$	-0.07
a	-0.9173	$+0.2983$	$=+0.281$	-0.12
b	$+0.8157$	$+0.5296$	$=+0.299$	-0.13
c	$+0.2423$	$+0.9679$	$=+0.697$	-0.23
d	-0.4499	$+0.8843$	$=+0.776$	-0.15
e	$+0.9084$	-0.3224	$=-0.576$	-0.15
i	-0.1600	-0.9859	$=-1.359$	-0.40

$+3.5312\,d\alpha \quad -0.0441\,d\delta \quad = -0.446$

$-0.0441\,d\alpha \quad +3.1745\,d\delta \quad = +3.134$

$d\alpha = -0''.114 \quad d\delta = +0''.986 \quad \varepsilon = \pm 0''.244$

* 4 $65^\circ\,40'\,49''.69 \quad +16^\circ\,8'\,9''.89$

Stern 5.

A	$-0.9179\,d\alpha$	$-0.2952\,d\delta$	$=-2''.655$	$-0''.40$				
a	$+0.7318$	-0.6486	$=+2.404$	-0.15				
b	$+0.9478$	$+0.1717$	$=+2.393$	-0.05	$+4.1531\,d\alpha$	$-0.6249\,d\delta$	$=+11''.881$	
c	$+0.5469$	$+0.8239$	$=+0.399$	-0.40	$-0.6249\,d\alpha$	$+3.5100\,d\delta$	$=-4.680$	
d	-0.0869	$+0.9959$	$=-1.275$	-0.19				
e	$+0.9060$	-0.3309	$=+2.865$	$+0.11$	$d\alpha=+2''.734$	$d\delta=-0''.847$	$\varepsilon=\pm 0''.293$	
g	-0.8327	$+0.5033$	$=-2.677$	$+0.03$				
i	$+0.2365$	-0.9691	$=+1.113$	-0.35				

* 5 66° 15′ 50″.13 + 15° 55′ 53″.95

Stern 6.

A	$-0.8073\,d\alpha$	$-0.5438\,d\delta$	$=-2.449$	$+0.10$				
a	-0.1635	-0.9855	$=+0.256$	$+0.19$				
b	$+0.9296$	-0.2620	$=+3.680$	$+0.16$	$+3.6468\,d\alpha$	$-0.2829\,d\delta$	$=+13.319$	
c	$+0.6485$	$+0.7412$	$=+1.832$	-0.01	$-0.2829\,d\alpha$	$+4.0717\,d\delta$	$=-3.714$	
d	-0.4027	$+0.9088$	$=-1.969$	$+0.08$				
e	$+0.7883$	-0.5724	$=+3.218$	0.00	$d\alpha=+3''.601$	$d\delta=-0''.662$	$\varepsilon=\pm 0''.147$	
g	-0.9429	$+0.2117$	$=-3.565$	$+0.03$				
i	$+0.1040$	-0.9941	$=+0.806$	-0.23				

* 6 66° 6′ 36″.00 + 15° 25′ 10″.34

Stern 7.

A	$-0.8006\,d\alpha$	$-0.5541\,d\delta$	$=-2.393$	0.00				
a	$+0.0474$	-0.9988	$=+1.350$	$+0.14$				
b	$+0.9446$	-0.1956	$=+3.341$	-0.36	$+2.9256\,d\alpha$	$+0.0935\,d\delta$	$=+10.735$	
c	$+0.6757$	$+0.7146$	$=+1.816$	$+0.05$	$+0.0935\,d\alpha$	$+3.8500\,d\delta$	$=-3.642$	
d	-0.1969	$+0.9790$	$=-1.917$	-0.17				
g	-0.9312	$+0.2614$	$=-4.047$	-0.33	$d\alpha=+3''.702$	$d\delta=-1''.036$	$\varepsilon=\pm 0''.273$	
i	$+0.1672$	-0.9847	$=+1.350$	-0.29				

* 7 66° 14′ 8″.05 + 15° 28′ 28″.26

Stern 8.

B	$+0.9641\,d\alpha$	$-0.0005\,d\delta$	$=+3.331$	$+0.20$				
a	-0.8317	-0.5037	$=-2.247$	$+0.07$				
b	$+0.4632$	-0.8768	$=+2.251$	$+0.07$	$+3.3209\,d\alpha$	$-0.3650\,d\delta$	$=+11.076$	
c	-0.0804	$+0.9965$	$=-1.030$	0.00	$-0.3650\,d\alpha$	$+3.4282\,d\delta$	$=-3.844$	
d	-0.8867	$+0.3951$	$=-3.104$	$+0.08$				
e	$+0.5043$	-0.8514	$=+2.190$	-0.11	$d\alpha=+3''.250$	$d\delta=-0''.775$	$\varepsilon=\pm 0''.118$	
h	$+0.6618$	$+0.7291$	$=+1.532$	-0.05				

* 8 65° 9′ 42″.25 + 15° 23′ 28″.72

Stern 9.

A	$-0.7892\,d\alpha$	$-0.5711\,d\delta$	$=-1.649$	$+0.63$				
a	$+0.6544$	-0.7331	$=+1.733$	-0.02				
b	$+0.9614$	-0.0538	$=+3.073$	$+0.38$	$+3.4005\,d\alpha$	$-0.0710\,d\delta$	$=+9.554$	
c	$+0.7136$	$+0.6737$	$=+2.564$	$+0.48$	$-0.0710\,d\alpha$	$+3.3342\,d\delta$	$=+0.170$	
d	$+0.2138$	$+0.9751$	$=+0.459$	-0.25				
g	-0.8731	$+0.4246$	$=-2.357$	$+0.05$	$d\alpha=+2''.808$	$d\delta=+0''.111$	$\varepsilon=\pm 0''.430$	
i	$+0.3286$	-0.9395	$=+0.543$	-0.36				

* 9 66° 32′ 14″.36 + 15° 38′ 13″.51

Die Distanz 9*A* ist augenscheinlich verfehlt; auffällig sind bei Stern 9 auch die fast durchweg großen Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung. Läßt man 9*A* weg, so erhält man

$+2.7777\,d\alpha - 0.5217\,d\delta = +8''.2526$
$-0.5217\,d\alpha + 3.0080\,d\delta = -0.7716$
$d\alpha = +3''.021 \quad d\delta = +0''.268 \quad \varepsilon = \pm 0''.297$

* 9 66° 32′ 14″.57 + 15° 38′ 13″.67

Die übrig bleibenden Fehler sind jetzt $-0''.05$, $+0''.18$, $+0''.23$, $-0''.45$, $+0''.17$, $-0''.20$. Es bleiben also auch jetzt noch ziemlich große Widersprüche bestehen.

Stern 10.

a	$-0.3177\,d\alpha$	$-0.9442\,d\delta$	$=-0''.517$	$+0''.05$			
b	$+0.4752$	-0.8705	$=+1.986$	-0.07	$+2.8684\,d\alpha$	$+0.5620\,d\delta$	$=+9''.322$
c	$+0.9657$	$+0.0715$	$=+3.111$	-0.09	$+0.5620\,d\alpha$	$+1.9375\,d\delta$	$=+0.853$
d	-0.8421	-0.4919	$=-2.430$	$+0.13$			
h	$+0.9487$	$+0.2027$	$=+3.335$	$+0.26$	$d\alpha = +3''.354$	$d\delta = -0''.533$	$\varepsilon = \pm 0''.183$

* 10 65° 40′ 50″.60 + 14° 31′ 6″.77

Stern 11.

a	$-0.8111\,d\alpha$	$-0.5389\,d\delta$	$=-1.592$	$+0.11$	$+1.5916\,d\alpha$	$-0.2597\,d\delta$	$=+4.720$
b	$+0.2622$	-0.9622	$=+1.571$	-0.17	$-0.2597\,d\alpha$	$+2.2887\,d\delta$	$=-3.133$
c	-0.1582	$+0.9865$	$=-1.548$	-0.07			
d	-0.9164	$+0.3148$	$=-3.025$	-0.13	$d\alpha = +2''.794$	$d\delta = -1''.052$	$\varepsilon = \pm 0''.179$

* 11 65° 6′ 2″.79 + 15° 17′ 48″.65

Stern 12.

A	$-0.2671\,d\alpha$	$-0.9608\,d\delta$	$=-0.898$	-0.12	$+1.8295\,d\alpha$	$-0.0766\,d\delta$	$=+5.837$
a	$+0.4940$	-0.8589	$=+1.819$	$+0.18$	$-0.0766\,d\alpha$	$+2.0410\,d\delta$	$=-0.397$
d	$+0.9012$	-0.3625	$=+2.775$	-0.12			
g	-0.8378	-0.4987	$=-2.623$	$+0.01$	$d\alpha = -3''.187$	$d\delta = -0''.075$	$\varepsilon = \pm 0''.177$

* 12 67° 2′ 34″.99 + 14° 38′ 3″.62

Stern 13.

A	$+0.7763\,d\alpha$	$-0.5896\,d\delta$	$=+1.217$	$d\alpha = +2''.109$	$d\delta = +0''.712$
g	$+0.6238\,d\alpha$	$+0.7625\,d\delta$	$=+1.858$		

* 13 68° 23′ 17″.86 + 15° 43′ 11″.91

Stern 14.

A	$+0.7134\,d\alpha$	$-0.6704\,d\delta$	$=+0.638$	$d\alpha = +0''.684$	$d\delta = -0''.223$
g	$+0.6755\,d\alpha$	$+0.7137\,d\delta$	$=+0.303$		

* 14 68° 21′ 37″.73 + 15° 36′ 11″.08

Stern 15.

A	$+0.7202\,d\alpha$	$-0.6620\,d\delta$	$=+1.545$	$+0.06$	$+2.2624\,d\alpha$	$+0.1692\,d\delta$	$=+5.254$
a	$+0.9584$	-0.0829	$=+2.075$	-0.11	$+0.1692\,d\alpha$	$+1.5577\,d\delta$	$=+0.806$
d	$+0.8432$	$+0.4852$	$=+2.141$	$+0.07$			
g	$+0.3378$	$+0.9366$	$=+1.027$	0.00	$d\alpha = +2''.302$	$d\delta = +0''.267$	$\varepsilon = \pm 0''.102$

* 15 68° 6′ 27″.95 + 15° 49′ 58″.37

Stern 17.

c	$+0.3057\,d\alpha$	$-0.9492\,d\delta$	$=-0.619$	$d\alpha = +1''.473$	$d\delta = -1''.127$
16	$-0.5179\,d\alpha$	$-0.8468\,d\delta$	$=-1.717$		

* 17 65° 48′ 29″.22 + 12° 49′ 31″.77

Für die Punkte zweiter Ordnung ergeben sich sonach die nachfolgenden Positionen, welche die mittleren Örter für das Aequinox und die Epoche 1900.0 darstellen.

1	65°	44′	16″.30	+15°	38′	56″.87	9	66°	32′	14″.57	+15°	38′	13″.67
2	65	42	54.58	+15	44	24.88	10	65	40	50.60	+14	31	6.77
3	65	49	6.60	+15	56	16.83	11	65	6	2.79	+15	17	48.65
4	65	40	49.69	+16	8	9.89	12	67	2	34.99	+14	38	3.62
5	66	15	50.13	+15	55	53.95	13	68	23	17.86	+15	43	11.91
6	66	6	36.00	+15	25	10.34	14	68	21	37.73	+15	36	11.08
7	66	14	8.05	+15	28	28.26	15	68	6	27.95	+15	49	58.37
8	65	9	42.25	+15	23	28.72	17	65	48	29.22	+12	49	31.77

Ableitung der mittleren Fehler.

Für den m. F. des Abendwertes einer gemessenen Distanz ergibt sich aus der inneren Übereinstimmung des ganzen zum Hauptnetze gehörigen Materials $\pm$ 0″.180. Aus der Ausgleichung der Distanzen des Hauptnetzes folgt für den m. F. einer Distanz von der Gewichtseinheit $\pm$ 0″.130, mithin für den Abendwert $\pm$ 0″.260, da die Gewichtseinheit auf 4 Abenden beruht. Es scheint sonach, als wenn die gemessenen Distanzen noch durch systematische Fehler entstellt wären. Die Hälfte des Materials, aus welchem der Wert $\pm$ 0″.180 abgeleitet ist, besteht nun aber aus den Distanzen des Normalbogens, die durchschnittlich unter wesentlich günstigeren Bedingungen als die übrigen Distanzen gemessen sind und daher auch eine erheblich größere Genauigkeit besitzen. Schließt man die Distanzen *aA*, *ab*, *bB* bei der Berechnung des m. F. aus, so ergibt sich für den m. F. des Abendwertes einer gemessenen Distanz $\pm$ 0″.250. Dieser Wert befindet sich in guter Übereinstimmung mit dem aus der Ausgleichung der Distanzen des Hauptnetzes folgenden. — Ein einzelner Anschluß eines Sternes 2. Ordnung an einen Hauptstern, der außer bei Stern 16 immer nur auf einem Abende beruht, besitzt einen m. F. von $\pm$ 0″.223.

Eine genaue Bestimmung der m. F. für die Lage der einzelnen Sterne würde einen erheblichen Rechnungsaufwand erfordern. Es ist aber hier völlig ausreichend, schätzungsweise die Werte dieser m. F. zu ermitteln. Die drei Distanzen des Normalbogens haben das Gewicht 10, der m. F. der Gewichtseinheit beträgt $\pm$ 0″.130, es gehören ihren Werten also m. F. im Betrage von $\pm$ 0″.036 zu.

Die Bögen Aa, ab, bB liegen fast genau auf demselben größten Kreise, die m. F. der Distanzen Ab, aB, AB sind daher gleich denen der Summen $Aa+ab$, $ab+bB$, $Aa+ab+bB$. Man findet $\varepsilon_{Ab} = \varepsilon_{aB} = \pm 0''.051$ und $\varepsilon_{AB} = \pm 0''.062$. Es ist sonach eine völlig ausreichende Schätzung, den m. F. der Lage eines der Sterne des Normalbogens zu $\pm 0''.06$ anzunehmen. Die Sterne *e*, *f*, *g*, *h*, *i* sind durch je zwei, die Sterne *c* und *d* durch je drei Distanzen mit dem m. F. $\pm 0''.13$ an Sterne des Normalbogens angeschlossen. Für den mittleren Lagenfehler der ersteren wird man daher $\pm 0''.109$, für den der letzteren $\pm 0''.096$ annehmen können oder durchweg für den m. F. der Lage eines Hauptsternes rund $\pm 0''.100$. Die Sterne 2. Ordnung sind an 2 bis 8 Hauptsterne angeschlossen, im Durchschnitte an 5. Der m. F. $\pm 0''.223$ eines solchen Anschlusses schließt auch die Unsicherheit der Lage der benutzten Hauptsterne mit ein, da bei der Ausgleichung die Hauptsterne als fehlerfrei angenommen werden. Man erhält daher für den m. F. der Lage eines Sternes 2. Ordnung ebenfalls rund $\pm 0''.100$.

In diesen Beträgen der m. F. der Lage ist die Unsicherheit der Orientierung und des Ausgangspunktes noch nicht berücksichtigt. Beide Unsicherheiten werden wohl ausreichend berücksichtigt, wenn man ihren Anteil an dem m. F. zu $\pm 0''.15$ annimmt. Es wird sich dann schließlich für den Gesamtbetrag des m. F. der Lage eines Sternes der Triangulation $\pm 0''.18$ oder rund $\pm 0''.20$ ergeben.

Vergleichung mit der Triangulation von Wirtz.

Die Hyadengruppe läßt sich wegen ihrer großen Ausdehnung erfolgreich nur mit dem Heliometer oder auf photographischem Wege vermessen. Nach meiner Kenntnis liegt bisher außer der hier mitgeteilten Reihe nur noch die Triangulation von Herrn WIRTZ (Astr. Nachr. 3818—19) vor, die mit der meinigen nahezu gleichzeitig ist. Es ist nun von Interesse die Resultate beider Vermessungen miteinander zu vergleichen, zumal da beide nach ganz verschiedenen Grundsätzen durchgeführt worden sind. Zur Orientierung für diejenigen Leser, denen die Arbeit von WIRTZ nicht zugänglich ist, diene das Folgende.

Von Herrn KÜSTNER sind am REPSOLDschen Meridiankreise der Bonner Sternwarte die Positionen von 18 über die ganze

Gruppe der Hyaden möglichst gleichmäßig verteilten Sternen an 10 bis 22 Abenden bestimmt worden, und zwar gleichzeitig mit der heliometrischen Vermessung der Gruppe. Der m. F. eines Ortes beträgt bei 10 Abenden $\pm$ 0^s.0108 und $\pm$ 0″.156, bei 22 Abenden $\pm$ 0^s.0093 und $\pm$ 0″.133. Diese 18 Sterne wurden der Triangulation als Hauptsterne zugrunde gelegt, wobei die von KÜSTNER erhaltenen Positionen durch die heliometrische Vermessung keine weitere Veränderung erfuhren. Sie dienten einerseits als Fixpunkte für die übrigen 51 Sterne, die durch Distanzmessungen (an je 2 Abenden) mit 3 bis 4 Hauptsternen verbunden wurden, andererseits boten sie die Unterlage zur Herleitung des Ausdruckes für den Wert einer Schraubenrevolution. Zu letzterem Zwecke sind alle mit dem Bonner Heliometer erreichbaren Verbindungen zwischen den Hauptsternen, 30 an Zahl, an je 2 Abenden gemessen worden. Eine in der Mitte der Gruppe gelegene Distanz wurde als Normalbogen möglichst an jedem Beobachtungsabende gemessen. Sie diente indessen nicht zur Ableitung eines Reduktionselementes, sondern nur zur laufenden Kontrolle des Heliometers. Um Zeit zu sparen erfolgte die Distanzmessung in der Weise, daß mit einmaligem Durchschrauben 3 bis 5 Sterne eingestellt wurden. Der vollständige m. F. einer Schlußposition beträgt nach WIRTZ für Sterne

$$\text{bis } 7^m.9 \quad \pm 0''.218, \qquad \text{von } 8^m.0 \text{ abwärts} \quad \pm 0''.305.$$

Zu erwähnen ist noch, daß die Blendgitter in der Richtung der Schnittlinie keine feste Leiste besaßen, sondern dort einfach abgeschnitten waren und sich infolgedessen im Verlaufe der Beobachtungsreihe allmählich verbeult und verzogen hatten, sodaß sie schließlich längs der Schnittlinie einen schmalen Streifen des Objektivs unbedeckt ließen. Diese Erscheinung, die sich nach Angabe von WIRTZ erst nach der Durchmessung des Hauptnetzes bemerklich machte, ist geeignet, systematische Messungsfehler hervorzurufen, und WIRTZ schreibt ihr den Unterschied zwischen den m. F. der helleren und der schwächeren Sterne zu.

Die Epoche für die von WIRTZ gefundenen Positionen ist 1899, während das Aequinox wie bei mir 1900.0 ist. Man hat daher nur den Betrag der Eigenbewegung für ein Jahr in Rechnung zu stellen, um beide Reihen miteinander vergleichbar zu machen. Es ergibt sich dann im Sinne „PETER — WIRTZ“ als Unterschied

zwischen den Resultaten der beiden Triangulationen für die gemeinsamen Sterne:

*	α	δ	*	α	δ	*	α	δ	*	α	δ
A	−0″.01	+0″.03	f	+0″.25	0″.00	4	−0″.22	+0″.10	11	+0″.24	+0″.37
B	−0.10	+0.10	g	+0.43	+0.39	5	−0.21	−0.41	12	+0.34	+0.58
a	+0.14	+0.14	h	+0.43	+0.44	6	+0.47	+0.08	13	−0.09	+0.11
b	+0.47	+0.15	i	+1.73	−0.66	7	−0.22	−0.34	14	+0.02	+0.72
c	+0.20	+0.33	1	−0.27	+0.44	8	−0.28	+0.42	15	−0.02	−0.11
d	−0.10	+0.26	2	−0.14	+0.57	9	−1.06	+2.14	16	+0.21	+0.30
e	+0.16	−0.13	3	+0.06	−0.03	10	+0.56	+0.78			

Die unterstrichenen Sterne sind Hauptsterne der Bonner Triangulation, ihre Positionen bei WIRTZ sind identisch mit den KÜSTNERschen Meridianbestimmungen.

Die Abweichungen zwischen den beiden Systemen sind größer, als ich erwartet hätte, namentlich bei den beiden Sternen *i* und 9 überschreiten sie bei weitem die Unsicherheit der Beobachtung. Sieht man von diesen beiden Sternen zunächst ab und bildet für jede der beiden Koordinaten aus den dann noch verbleibenden 25 Sternen den konstanten Unterschied zwischen beiden Systemen, so ergibt sich dafür im Sinne „PETER — WIRTZ“

in AR. $+0''.09 \pm 0''.052$ in Dekl. $+0''.21 \pm 0''.060$.

Diese Reduktion der beiden Systeme aufeinander ist in Rechnung zu stellen und von den vorher aufgeführten Abweichungen abzuziehen. Um ein deutlicheres Bild der Beziehung zwischen den beiden Systemen zu erhalten, empfiehlt es sich aber die Abweichungen in den Koordinaten in Abweichungen im Bogen größten Kreises zu verwandeln. Man erhält dann

A	0″.20	c	0″.16	g	0″.37	2	0″.42	6	0″.39	10	0″.73	14	0″.51
B	0.21	d	0.19	h	0.40	3	0.24	7	0.63	11	0.21	15	0.34
a	0.09	e	0.35	i	1.78	4	0.32	8	0.42	12	0.44	16	0.15
b	0.37	f	0.26	1	0.42	5	0.68	9	2.23	13	0.20		

Was zunächst die Meridiankreispositionen anbelangt, so ergibt sich für diese aus den oben mitgeteilten m. F. der Koordinaten als m. F. der Lage im Bogen größten Kreises $\pm 0''.22$ (für *A* beträgt er genauer nur $\pm 0''.19$). Da der tatsächliche Fehler in der Position sehr wohl das Doppelte des rechnerisch gefundenen m. F. betragen kann, so liegt gegen keine der obigen Abweichungen zwischen Meridiankreis- und Heliometerposition ein begründetes

Bedenken vor. Bei dem am stärksten abweichenden Sterne 14 ist außerdem in Betracht zu ziehen, daß seine heliometrische Position nur auf dem Anschlusse an zwei Sterne beruht, mit denen er nur an einem einzigen Abende verbunden worden ist.

Nimmt man den m. F. der Lage eines der heliometrisch angeschlossenen Sterne für beide Triangulationen zu $\pm$ 0".25 an, so überschreiten die Abweichungen zwischen den beiden Triangulationen das Doppelte des m. F. bei den Sternen *i*, 5, 7, 9 und 10. Bei 5, 7 und 10 liegt die Abweichung aber noch unterhalb des dreifachen m. F. und muß daher in Anbetracht der Unsicherheit, welche dem konstanten Unterschiede zwischen beiden Systemen anhaftet, immer noch als zulässig erscheinen. Die Abweichungen bei *i* und 9 hingegen überschreiten bei weitem die in Anbetracht der Größe des m. F. zulässigen Grenzen für die Unsicherheit der Messungen. Daher muß bei diesen zwei Sternen noch näher auf die Ursachen eingegangen werden, welche die angeführten starken Unterschiede hervorgerufen haben können. Besonders wichtig ist eine derartige Untersuchung für den Stern *i*, da dieser für meine Triangulation ein Hauptstern ist.

Zunächst ist zu untersuchen, ob die allgemeine Ausgleichung der Distanzen zwischen den Hauptsternen durch das Mitnehmen der von *i* aus gemessenen Distanzen beeinflußt wird. Schließt man diese Distanzen aus, so ergibt die Ausgleichung der übrigen Distanzen mit der auf Seite 537 benutzten Bezeichnung

ds_1	$-2''.210$	ds_8	$-1''.956$	ds_{17}	$+1''.385$
ds_2	$+0.092$	ds_{10}	-2.086	ds_{18}	-3.209
ds_3	$+2.108$	ds_{11}	-0.395	ds_{19}	-0.664
ds_4	$+0.879$	ds_{12}	-1.040	ds_{20}	-1.448
ds_5	$+1.388$	ds_{13}	-1.203	ds_{21}	-2.617
ds_6	-0.439	ds_{14}	-1.203	ds_{23}	$+0.812$
ds_7	-0.505	ds_{16}	$+0.528$	ds_{24}	$+1.007$

Die übrig bleibenden Widersprüche werden

aA	$-0''.003$	*bB*	$0''.000$	*cd*	$-0''.013$
ab	-0.008	*bc*	-0.015	*ch*	-0.004
ac	$+0.018$	*bd*	$+0.016$	*dA*	$+0.035$
ad	-0.038	*be*	-0.083	*dg*	-0.026
ae	$+0.137$	*bf*	$+0.088$	*ef*	-0.090
af	-0.086	*bh*	$+0.006$	*gA*	-0.021
ag	$+0.035$	*cB*	$+0.006$	*hB*	-0.004

Der m. F. einer Gleichung vom Gewicht 1 beträgt $\varepsilon = \pm 0''.118$.

Die Positionen von A, B, a, b, c, d, g, h erfahren durch die neue Ausgleichung keine Änderung, welche o".01 erreicht; für e und f ergeben sich mit Berücksichtigung der Orientierung die Örter

e	64° 25′ 10".54	+ 16° 32′ 37".75
f	65 16 37.11	+ 16 48 12.75

Auch hier überschreitet die Änderung in einer Koordinate nur unwesentlich den Betrag von o".1. Das Mitnehmen des Sternes i bei der allgemeinen Ausgleichung beeinflußt diese sonach nur in geringem Grade. Gemessen sind die Entfernungen zwischen i und A, a, b, e, f. Legt man den für i aus der ersten Ausgleichung gefundenen Ort

$$65^\circ\,53'\,29''.37 \qquad +17^\circ\,19'\,29''.14$$

zugrunde, für die anderen Sterne die Positionen der zweiten Ausgleichung, so ergibt die Rechnung für die Distanzen Δ und die auf i bezogenen Positionswinkel p

	Δ	p
Ai	6772".684	122° 27'.7
ai	4975.792	167 14.9
bi	6605.320	208 38.5
ei	5796.444	241 12.1
fi	2827.272	228 30.6

Die Ausgleichung der berechneten und beobachteten Distanzen ergibt schließlich für i

$$65^\circ\,53'\,29''.44 \qquad +17^\circ\,19'\,29''.17$$

mit den Widersprüchen

Ai + o".02 ai + o".06 bi − o".21 ei + o".02 fi + o".16

Benutzt man die Distanz Ai nicht mit, wie es bei der ersten Ausgleichung der Fall war, so erhält man für i

$$65^\circ\,53'\,29''.47 \qquad +17^\circ\,19'\,29''.16,$$

und als Widersprüche bleiben übrig

ai + o".08 bi − o".21 ei o".00 fi + o".15.

Beide Male ergibt sich also die Deklination fast genau ebenso groß wie bei der ersten Gesamtausgleichung unter Mitnahme von i, und die Rektaszension höchstens um o".1 davon verschieden. Die

übrig bleibenden Widersprüche aber bieten keinen Anhalt dafür, daß einer der gemessenen Distanzen zu mißtrauen wäre.

Nimmt man für A, a, b, e, f die Positionen von Wirtz an und gleicht mit diesen die von mir gemessenen Distanzen aus, so erhält man für i

$$65^0\,53'\,29''.30 \qquad +17^0\,19'\,28''.95.$$

Die übrig bleibenden Widersprüche sind dann

Ai $+0''.01$ ai $+0''.12$ bi $-0''.27$ ei $+0''.10$ fi $+0''.10$.

Die Weglassung der Distanz Ai ändert die Lage von i nur um $0''.01$ und die verbleibenden Widersprüche sind fast genau dieselben wie bei Mitnahme von Ai.

Es bleibt nun nur noch eine Revision der von Wirtz gefundenen Werte übrig. Der Stern i ist identisch mit Nr. 44 bei Wirtz. Seine Position ist bestimmt durch Anschluß an die Hauptsterne 18, 47 und 55. Die Beobachtungen von Wirtz ergeben

44,18	$= 105^R.9540$	$= 5498''.59$
44,47	$= 95.8968$	$= 4976.38$
44,55	$= 76.9758$[1])	$= 3994.07$

Geht man für 44 von dem bei Wirtz S. 43 gegebenen Werte aus und nimmt für die Hauptsterne 18, 47, 55 die Bonner Meridianbeobachtungen an, so erhält man

	Δ	p
44,18	$5496''.07$	$269^0\,36'.3$
44,47	4977.16	$167\;13.2$
44,55	3995.26	$64\;10.5$

Hieraus folgen die Beobachtungsgleichungen

18	$+0.955\,d\alpha$	$+0.007\,d\delta$	$= +2''.52$	
47	-0.212	$+0.975$	$= -0.78$	$d\alpha = +2''.176 = +0^s.145$ $\quad d\delta = -0''.53$
55	-0.858	-0.436	$= -1.19$	

Die Position von i wird hiernach

$$4^h\,23^m\,33^s.898 \qquad = 65^0\,53'\,28''.47 \qquad +17^0\,19'\,29''.26.$$

Die Neureduktion ergibt also einen wesentlich anderen Wert als den von Wirtz gefundenen, der sich dem meinigen nunmehr bis auf etwa $1''$ nähert.

1) Bei Wirtz steht fälschlich $96^R.9758$.

Leider sind in der Publikation von WIRTZ die bei den gemessenen Distanzen übrig bleibenden Widersprüche nicht mit aufgeführt. Um sie kennen zu lernen, muß man für jeden einzelnen Fall die Distanzen einerseits aus den Schlußpositionen der Sterne, andererseits aus den nur in Schraubenrevolutionen aufgeführten Beobachtungswerten berechnen. Der von WIRTZ gefundene Wert für i läßt in den Beobachtungen die Widersprüche

18: + 1".26 47: — 0".54 55: — 0".05 $\Sigma vv = 1.8817$

übrig, während sich nunmehr ergibt

18: + 0".44 47: + 0".19 55: + 0".45 $\Sigma vv = 0.4330$.

Auch jetzt sind die Widersprüche zwischen Rechnung und Beobachtung noch auffallend groß, und alle drei Distanzen sind zu groß gemessen.

Der zweite einer näheren Untersuchung bedürftige Stern 9 ist identisch mit Nr. 54 bei WIRTZ, der an die drei Hauptsterne 30, 57 und 63 angeschlossen worden ist. Eine Nachrechnung führte genau zu dem von WIRTZ gefundenen Resultate; die übrig bleibenden Widersprüche sind hier sehr klein, nämlich:

30: — 0".03 57: — 0".01 63: — 0".04.

Zu Bedenken könnte nur der Umstand Veranlassung geben, daß die Distanz 54, 57 nur auf der Beobachtung eines Abendes beruht, und daß gerade von dieser Distanz die Deklination abhängt, die besonders stark gegen den von mir gefundenen Wert abweicht.

Bei meinen Messungen habe ich die Distanz $9A$ ausgeschlossen, da diese in der Ausgleichung einen Fehler von 0".64 übrig läßt und ein Fehler von diesem Betrage sich bei keiner weiteren Distanz der ganzen Ausgleichung zeigt; der nächst kleinere vorkommende Fehler beträgt 0".45. Durch den Ausschluß von $9A$ wird die Position von 9 nur um 0".21 und 0".16 geändert, der m. F. einer Beobachtung geht aber von $\pm$ 0".43 auf $\pm$ 0".30 herunter. Die Distanzen $9A$, $9i$ und $9g$ sind gemessen 1901 Jan. 15, die anderen Distanzen 1899 März 17. Benutzt man nur die an dem zweiten Tage gemessenen Distanzen, so findet man für Stern 9

$66^0\,32'\,14''.69$ $+\,15^0\,38'\,13''.52$ $\varepsilon_1 = \pm\,0''.334$,

und es bleiben die Widersprüche

$9a$: — 0".23 $9b$: + 0".06 $9c$: + 0".24 $9d$: — 0".33

übrig. Die beiden 1901 gemessenen Distanzen $9i$ und $9g$ allein ergeben

$$66^0\,32'\,14''.48 \qquad +15^0\,38'\,13''.85.$$

Legt man für die Hauptsterne a, b, c, d, g die Positionen von Wirtz zugrunde, so ergeben die in Leipzig gemessenen Abstände dieser Sterne von 9

$$66^0\,32'\,14''.23 \qquad +15^0\,38'\,13''.38 \qquad \varepsilon_1 = \pm 0''.288.$$

Die übrig bleibenden Widersprüche sind dann

$9a$: $-0''.04$ $9b$: $+0''.05$ $9c$: $+0''.31$ $9d$: $-0''.33$ $9g$: $+0''.20$.

Diese verschiedenen Werte für den Ort von 9 liegen alle nahe beieinander und bieten keinen Anhalt dafür, daß der Widerspruch zwischen der Leipziger und Bonner Position auf einen Fehler der ersteren zurückzuführen wäre. Es muß also vorläufig dieser Widerspruch noch als unaufgeklärt betrachtet werden.

Obgleich die Triangulation der Hyadensterne am Bonner und am Leipziger Heliometer auf völlig verschiedenem Wege durchgeführt worden ist, sind doch 42 Distanzen mit beiden Heliometern gemeinsam gemessen worden. Ich habe dieses Material benutzt, um zu untersuchen, ob sich nicht etwa gewisse systematische Differenzen zwischen den Bonner und Leipziger Distanzen feststellen lassen. Das Resultat dieser Untersuchung ist recht bemerkenswert.

Ordnet man die Distanzunterschiede im Sinne „Peter—Wirtz“ nach der Größe der Distanz und nimmt 1000″ als Einheit für die Distanz an, so erhält man die folgenden Werte:

	Δ	$P-W$		Δ	$P-W$
$a5$	0.2	$-0''.09$	$A14$	3.8	$-0''.55$
$a3$	1.4	$+0.19$	ad	3.9	-0.17
$c10$	1.5	$+0.21$	$a8$	4.2	-0.12
$a7$	1.8	$+0.46$	cd	4.2	-0.41
$a2$	1.9	$+0.19$	ab	4.4	-0.62
$a4$	1.9	$+0.20$	bc	4.5	-0.44
$a1$	2.0	$+0.49$	ch	4.5	-0.61
$a6$	2.0	$+0.27$	$c6$	4.5	$+0.10$
$d12$	2.5	$+0.02$	$c1$	4.5	$+0.02$
$A15$	2.6	$+0.55$	Ag	4.6	-0.32
$g14$	2.7	$+0.31$	$A5$	4.6	-0.39
$c11$	3.0	-0.02	$a11$	4.6	-0.06
$g12$	3.1	$+0.26$	$e4$	4.6	-0.53
$c8$	3.3	-0.17	Bh	4.7	-0.29
$A13$	3.6	$+0.32$	Aa	4.8	-0.08

	Δ	$P-W$		Δ	$P-W$
$c2$	4.8	$-0''.02$	$e2$	5.3	$-0''.29$
$e8$	4.9	-0.84	$e3$	5.3	-0.12
ai	5.0	-0.54	$e1$	5.6	-0.43
$c16$	5.0	-0.19	$a10$	5.6	-0.75
$c7$	5.0	-0.54	$a12$	5.6	-0.51
Be	5.2	-0.35	$B8$	5.7	$+0.19$

Man erkennt auf den ersten Blick aus dem Verlaufe der Werte $P-W$, daß ein ausgesprochener systematischer Unterschied zwischen den Bonner und Leipziger Distanzen vorhanden ist, und auch, daß dieser Unterschied nicht konstant, sondern eine Funktion der Distanz ist. Für kleine Distanzen ist er positiv, fällt dann mit wachsender Distanz rasch ab und wird negativ. Der vollständige Verlauf von $P-W$ läßt sich allerdings nicht mit Sicherheit erkennen, da die meisten verglichenen Distanzen in Leipzig nur an einem Abend gemessen sind, sodaß der aus ihnen gefundene Wert von $P-W$ noch stark von den zufälligen Messungsfehlern beeinflußt ist. Für eine bestimmte Stelle indessen läßt sich $P-W$ mit ziemlicher Sicherheit angeben. Die Distanzen des Hauptnetzes sind in Leipzig an 4—5 Abenden gemessen, die Bonner Distanzen beruhen auf 2 Abenden. Stellt man diese Distanzen für sich zusammen, so erhält man

ad	3.9	$-0''.17$	Bh	4.7	$-0''.29$
cd	4.2	-0.41	Aa	4.8	-0.08
ab	4.4	-0.62	ai	5.0	-0.54
bc	4.5	-0.44	$c16$	5.0	-0.19
ch	4.5	-0.61	Be	5.2	-0.35
Ag	4.6	-0.32			

Diese Distanzen erstrecken sich nur über ein Intervall von $1300''$, und man kann unbedenklich innerhalb dieses Intervalls $P-W$ als konstant ansehen. Die Mittelbildung ergibt dann

$$4600'': \quad P-W = -0''.36 \pm 0''.13.$$

Von vornherein läßt sich nicht sagen, welchem der beiden Heliometer dieser systematische Unterschied zur Last fällt. Liegt die Ursache im Leipziger Heliometer, so kann sie von einer fehlerhaften Bestimmung des Skalenwertes herrühren, der durchweg der Distanz proportional angenommen worden ist, oder auch in einer verschiedenen Auffassung des Durchschlagens der Sternbilder bei der Distanzmessung, die nach der Größe der Distanz verschieden ist. Beim Bonner Heliometer ist von vornherein keine strenge

Proportionalität zwischen Distanz und Schraubenrevolution vorausgesetzt worden, der systematische Unterschied würde hier durch eine fehlerhafte oder unsichere Bestimmung der „Schraubengestalt" zu erklären sein, sei es nun, daß die Koeffizienten in dem dafür gefundenen Ausdrucke noch kleiner Korrektionen bedürfen, sei es, daß noch weitere kleine Zusatzglieder einzuführen sind.

Im Jahre 1898 habe ich durch eine besondere Messungsreihe am Löwenbogen (Astr. Nachr. 3534) den Nachweis geführt, daß meine heliometrischen Distanzen von persönlichen, von der Größe der Distanz abhängigen systematischen Messungsfehlern frei sind. Es läßt sich aber auch hier direkt zeigen, daß zwischen 4000″ und 5000″ Distanz für mich kein systematischer Messungsfehler vorhanden ist, und daß ferner der Skalenwert für die Hyadentriangulation so sicher bestimmt ist, daß Distanzen dieser Größe durch seine Verwendung nicht um viel mehr als 0″.1 falsch sein können. Der Skalenwert ist bestimmt durch Messung der drei aneinander stoßenden Distanzen Aa, ab und bB. Diese Bögen liegen zwischen 4400″ und 5200″ und können für die vorliegende Betrachtung als gleich groß (4500″) angesehen werden. Es würde daher auch eine etwa vorhandene systematische Korrektion für alle drei Distanzen die gleiche sein. Da aber eben der Skalenwert aus Distanzen von 4500″ bestimmt ist, gilt er auf jeden Fall doch wenigstens für diese. Bei seiner Verwendung wären also keinesfalls an Distanzen von 4500″ systematische Korrektionen anzubringen. Es fragt sich nun noch, um wieviel eine Distanz von diesem Betrage bei Verwendung des gefundenen Skalenwertes infolge der Unsicherheit des letzteren falsch sein kann. Der m. F. von Aa (genauer von $Aa + ab + bB$) nach seiner Ausmessung mit dem Heliometer beträgt $\pm$ 0^p.0031. Dies ergibt für den Skalenwert einen m. F. von $\pm$ 0″.000103. 4500″ entsprechen rund 210^p, eine Unsicherheit im Skalenwerte im Betrage seines dreifachen m. F. würde also eine Distanz von 4500″ erst um $\pm$ 0″.06 unsicher machen. Der Skalenwert ist des weiteren auch abhängig von der Genauigkeit, mit der AB im Bogenmaß bekannt ist. Die Unsicherheit im Werte von AB beträgt kaum mehr als 0″.1. Wenn man aber selbst eine Unsicherheit von 0″.2 annimmt, so würde dadurch eine Distanz von 4500″, die gleich dem dritten Teile der Länge des Bogens AB ist, nur um 0″.07 beeinflußt werden. Im ungünstigsten Falle könnte also eine Distanz von 4500″

infolge der Unsicherheit des Skalenwertes um $0''.06 + 0''.07$ oder $0''.13$ beeinflußt werden. Es ist also hiernach ersichtlich, daß der bei 4600″ nachgewiesene systematische Unterschied von $-0''.36$ im Sinne $P - W$ in der Hauptsache nicht von den Messungen mit dem Leipziger Heliometer herrühren kann. Auf Grund meiner Ausmessung des Löwenbogens liegt die Annahme nahe, daß das Gleiche auch für die Unterschiede bei den anderen Distanzbeträgen gilt.

Für das Bonner Heliometer ist aus der Ausmessung von Distanzen des Hauptnetzes als Ausdruck der Schraubengestalt

$$S = 51''.86428\,s + 0''.0003011\,s^2$$
$$\text{m. F.} = \quad \pm 430 \qquad \pm 456$$

gefunden worden, wo S die wahre Distanz in Bogenmaß, s die direkt gemessene in Schraubenrevolutionen angibt. Die m. F. in diesem Ausdrucke haben solche Beträge, daß der oben gefundene Unterschied von $0''.36$ innerhalb der Unsicherheit der Koeffizienten von s und s^2 liegt und durch plausibele Änderungen derselben beseitigt werden könnte. Der Umstand aber, daß kleine Distanzen zu klein, große wahrscheinlich zu groß gemessen worden sind, erfordert auch die Einführung weiterer Korrektionsglieder. Vielleicht würde schon die Einführung eines Gliedes von der Form $-cs^3$ den gewünschten Erfolg haben. Bei dieser Sachlage empfiehlt es sich, die Widersprüche zu prüfen, welche bei der Ermittelung der Schraubengestalt übrig bleiben, wenn man die am Heliometer beobachteten Distanzen des Hauptnetzes mit den aus den Meridiankreisbestimmungen berechneten vergleicht. In der Publikation von WIRTZ sind diese Widersprüche nicht direkt angegeben. Ich habe sie daher mit Hilfe der auf S. 41 bei WIRTZ aufgeführten Größen $M - H$ ermittelt. Ordnet man diese Widersprüche (im Sinne „Meridiankreis — WIRTZ“) nach der Größe der ihnen zugehörigen Distanz Δ ($1 = 1000''$) so ergibt sich die nachstehende Reihe

Nr.	Δ	$M - W$	Nr.	Δ	$M - W$	Nr.	Δ	$M - W$
20	2.8	$+0''.09$	19	4.5	$+0''.16$	2	5.7	$+0''.14$
16	3.2	-0.28	8	4.6	-0.56	26	5.7	-0.30
18	3.2	$+0.50$	4	4.8	$+0.09$	13	5.8	$+0.08$
27	3.2	$+0.29$	29	4.8	$+0.47$	22	5.8	-0.49
9	3.3	-0.31	11	4.9	-0.52	25	5.8	-0.13
24	3.5	$+1.50$	21	4.9	-0.04	28	5.8	-0.23
1	3.6	$+1.01$	10	5.0	-0.21	5	5.9	-0.02
14	3.8	-0.12	17	5.2	-0.37	7	5.9	$+0.12$
6	3.9	$+0.04$	15	5.4	-0.19	30	5.9	$+0.35$
3	4.2	-0.41	12	5.6	-0.41	23	6.1	$+0.23$

Auch in diesen Zahlen ist ein Gang angedeutet und zwar von gleichem Sinne wie bei den oben gefundenen Unterschieden $P-W$. Keinesfalls widersprechen sie der Annahme, daß das Mitnehmen weiterer Glieder in dem Ausdrucke für die Schraubengestalt einen noch engeren Anschluß zwischen Beobachtung und Rechnung zu erzielen vermag. Es mag daher auch noch darauf hingewiesen werden, daß die Schraubengestalt aus Distanzen zwischen $60^{R}.9$ und $117^{R}.1$ hergeleitet worden ist, während die im Netz zweiter Ordnung gemessenen Distanzen bis $4^{R}.8$ herabgehen. Im ganzen enthält das Netz zweiter Ordnung unter 160 Distanzen deren 62, welche kleiner als $60^{R}.9$ sind. Sind die Distanzen eines Sternes im Netze zweiter Ordnung untereinander annähernd gleich, so ist ein Fehler in der Schraubengestalt natürlich von geringem Einfluß, sind sie aber stark voneinander verschieden, so kann ein Fehler in der Schraubengestalt auch einen erheblicheren Fehler in der abgeleiteten Position nach sich ziehen. Für einzelne der Sterne zweiter Ordnung sind bei WIRTZ die Distanzen sehr verschieden.

Zum Schlusse will ich noch die Distanzen, die mit dem Leipziger Heliometer in dem Bonner Netze erster Ordnung gemessen sind, mit den aus den Meridiankreisbestimmungen berechneten Werten vergleichen. Es ergibt sich

	Δ	$M-P$		Δ	$M-P$
$c8$	3.3	$-0''.14$	$a12$	5.6	$+0''.10$
$A14$	3.8	$+0.44$	$B8$	5.7	-0.03
$a8$	4.2	-0.29	$A12$	6.3	$+0.74$
aA	4.8	$+0.17$	ac	6.3	$+0.19$
$e8$	4.9	$+0.80$	ae	6.5	$+0.26$
$c16$	5.0	-0.02	Bc	6.8	-0.14
eB	5.2	-0.02			

Das Material ist zwar nur spärlich, die Zahlen tragen aber entschieden nur den Charakter zufälliger Abweichungen ohne eine Spur von Gang. Die Werte für $e8$ und $A12$ sind sehr erheblich, beide Distanzen sind aber nur an einem Abende gemessen; überdies werden dieselben in ihrem vollen Betrage wohl kaum der heliometrischen Messung allein zur Last fallen, sondern auch mit durch Unsicherheiten in den Meridianbestimmungen hervorgerufen sein.

Vergleichung mit den Zonenbeobachtungen.

Die sämtlichen Sterne der Triangulation sind in den Zonenbeobachtungen der Astr. Ges. enthalten. Die S. 497 mitgeteilten Ausgangspositionen sind direkt dem Leipziger und Berliner Katalog entnommen und auf das Aeq. 1900.0 reduziert. Um sie mit den Positionen der Triangulation vergleichbar zu machen, ist es aber noch erforderlich, an sie den Betrag der Eigenbewegung von der Beobachtungsepoche, die durchschnittlich bei 1870 liegt, bis 1900 anzubringen. Benutzt man hierzu die Eigenbewegungen auf S. 529, so ergeben sich schließlich im Sinne „Zonen — Triangulation" die folgenden Unterschiede:

Leipzig.

*	m	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
g	7.5	+0″.10	−0″.50
h	7.4	−0.55	−0.84
d	7.3	−0.95	−1.10
10	6.5	−0.98	−0.50
16	5.7	−1.04	−1.02
12	5.4	−0.63	−0.61
c	5.0	−0.90	−0.03
17	5.0	+0.65	+1.03
		−0.54	−0.45
		±0.21	±0.24

Berlin.

11	7.7	+0.32	+0.43
5	7.5	+0.07	0.00
g	7.5	−0.67	−0.03
i	7.3	−1.76	−0.04
f	7.2	+2.00	+0.49
b	6.8	+0.18	+0.25
3	6.5	+1.71	+0.43
9	6.5	+0.06	−1.48
15	6.5	−0.18	−0.87
e	6.0	−0.20	+1.46
6	6.0	−1.31	+0.31
7	5.5	−0.98	+0.75
14	5.3	−0.12	−1.36
13	5.3	−0.13	−1.15
8	5.0	−0.48	+0.14
4	5.0	−0.25	−0.21
a	5.0	+0.16	−0.09
2	4.0	+0.64	−0.67
1	4.0	+0.05	−0.79
		−0.05	−0.13
		±0.20	±0.17

Eine Abhängigkeit des Unterschiedes von der Sterngröße ist bei keiner der beiden Reihen ausgesprochen und nicht einmal angedeutet. Bei den Leipziger Zonen scheint aber in beiden Koordinaten ein konstanter systematischer Unterschied gegenüber den Werten der Triangulation vorhanden zu sein.

Nachtrag I.

Da es von Interesse ist, den Einfluß einer Vernachlässigung der Reduktion auf gemeinsamen Skalenwert in den Positionen der Triangulation kennen zu lernen, so habe ich die Distanzen des Hauptnetzes noch einmal ausgeglichen ohne vorher an sie diese Reduktion anzubringen. Die Bedingungsgleichungen zwischen den sechs zu einem Viereck gehörigen Distanzen bleiben natürlich ungeändert bestehen, sodaß auch die aus der Minimumsbedingung folgenden 25 Gleichungen zwischen den ds_α und den Korrelaten g_λ auf S. 539 ungeändert bleiben, abgesehen von den konstanten Gliedern, die sich jetzt um den Betrag der Reduktion auf gemeinsamen Skalenwert ändern. Dieser Betrag in Skalenteilen ist den Angaben auf S. 531 unmittelbar zu entnehmen.

Auch in den Normalgleichungen zur Bestimmung der Korrelaten g_λ, die aus den 25 Gleichungen erhalten werden, ändern sich nur die konstanten Glieder. Ihre Auflösung ergibt schließlich für die Korrelaten

$$g_1 = +0.000174, \quad g_2 = +0.003415, \quad g_3 = -0.000655,$$
$$g_4 = +0.000014, \quad g_5 = +0.003483, \quad g_6 = +0.000482,$$

und damit findet man für die Verbesserungen der zugrunde gelegten Distanzen:

$ds_1 = -2''.207$	$ds_6 = -0''.453$	$ds_{11} = -0''.409$	$ds_{16} = +0''.494$	$ds_{21} = -2''.760$
$ds_2 = +0.090$	$ds_7 = -0.545$	$ds_{12} = -1.055$	$ds_{17} = +1.373$	$ds_{22} = +0.916$
$ds_3 = +2.108$	$ds_8 = -1.938$	$ds_{13} = -1.260$	$ds_{18} = -3.283$	$ds_{23} = +0.841$
$ds_4 = +0.852$	$ds_9 = -0.036$	$ds_{14} = -1.248$	$ds_{19} = -0.686$	$ds_{24} = +0.991$
$ds_5 = +1.374$	$ds_{10} = -2.198$	$ds_{15} = +0.277$	$ds_{20} = -1.467$	$ds_{25} = +3.395$

Hieraus erhält man für die Unterschiede „Beob. — Rechn."

aA	$0''.000$	af	$-0''.080$	bd	$-0''.021$	cB	$0''.000$	ef	$-0''.090$
ab	-0.010	ag	$+0.005$	be	-0.094	cd	$+0.016$	ei	-0.009
ac	-0.024	ai	-0.057	bf	-0.020	ch	0.000	gA	-0.003
ad	$+0.013$	bB	0.000	bh	0.000	dA	$+0.006$	hB	0.000
ae	$+0.153$	bc	$+0.014$	bi	$+0.141$	dg	-0.004	if	-0.096

Die Berechnung der Winkel in den einzelnen Dreiecken und die Herleitung der Koordinaten der Hauptsterne erfolgte nicht direkt, sondern durch Anwendung von Differentialformeln auf die bereits vorliegenden Resultate. Es wurden jetzt auch nicht wieder alle Winkel berechnet, sondern nur die gerade notwendigen. Es fand sich

gAa	= 87° 7′ 19″.21	*abc*	= 91° 5′ 9″.26	*iab*	= 89° 44′ 21″.47
Aad	= 96 58 59.02	*Bbc*	= 88 43 22.20	*fab*	= 55 18 18.19
bad	= 85 17 44.15	*bBh*	= 83 13 8.30	*eab*	= 30 55 43.65

Hiermit ergibt sich weiter

AB	= 14 311″.861	*aAB*	= 1° 27′ 0″.99	*bBA*	= 0° 38′ 17″.65

Legt man wieder die Position des F.K. für *A* und den aus den Positionen des F.K. für *A* und *B* sich ergebenden Positionswinkel 257° 8′ 34″.97 von *B* gegen *A* zugrunde, so erhält man schließlich für die Positionen der Hauptsterne die Zahlen

A	67° 32′ 43″.02	+ 16° 18′ 29″.94	*e*	64° 25′ 10″.40	+ 16° 32′ 37″.72
B	63 31 31.04	+ 15 23 10.31	*f*	65 16 36.85	+ 16 48 12.69
a	66 12 31.49	+ 15 58 35.20	*g*	67 48 25.09	+ 15 3 29.15
b	64 58 40.57	+ 15 42 44.85	*h*	63 58 59.68	+ 14 10 19.83
c	65 14 19.38	+ 14 29 15.60	*i*	65 53 29.17	+ 17 19 29.11
d	66 21 38.56	+ 14 53 22.32	16	66 14 52.44	+ 13 30 25.00

Die Verbesserung der Orientierung ergibt sich auch hier in Deklination als verschwindend, in Rektaszension zu + 0″.173, sodaß auch hier für die letztere rund + 0″.15 angenommen werden kann.

Vergleicht man die Resultate, welche man mit und ohne Reduktion auf gemeinsamen Skalenwert erhält, miteinander, so ergeben sich — im Sinne „mit — ohne“ — die folgenden Unterschiede

	α	δ		α	δ
A	0″.00	0″.00	*e*	− 0″.08	− 0″.06
B	+ 0.01	+ 0.01	*f*	− 0.01	0.00
a	+ 0.01	− 0.04	*g*	+ 0.03	+ 0.04
b	+ 0.03	− 0.04	*h*	− 0.07	− 0.02
c	+ 0.02	− 0.05	*i*	+ 0.05	+ 0.03
d	+ 0.02	− 0.05	16	+ 0.03	− 0.06

Die Unterschiede zwischen den beiden Systemen sind sonach nur unbedeutend.

Nachtrag II.

Zur Aufklärung der sehr erheblichen Unterschiede, die sich für die beiden Sterne *i* und 9 zwischen der Leipziger und Bonner Triangulation ergeben, habe ich im Herbste 1905 beide Sterne an die von WIRTZ für sie benutzten Sterne des Bonner Hauptnetzes angeschlossen.

Die Beobachtungen sind für jeden der Sterne nur an einem Abende ausgeführt worden, da sich dies zur Aufklärung als hin-

reichend erwies. An jedem Abend wurde auch der Normalbogen *AabB* mit beobachtet. Die Distanzen wurden genau so und mit Zugrundelegung der gleichen Reduktionselemente reduziert wie die der Leipziger Triangulation. Mit Hilfe der Beobachtungen des Normalbogens wurden sie auch auf den gleichen Skalenwert reduziert wie diese. Die Beobachtungen selbst sind die folgenden:

1905		Θ	*Ge*	*Oks*	*P*	*Gi*	*R*	*S*	*K*	*K* − *S*	Δ_g	Σ_c
Okt. 10	54.30	$0^h 45^m.0$	*f*	9.90	II	1	3	3	+4.9	−1.5	223.2636	822
	54.57	1 20.6			II	1	3	3—2	+4.3	−2.0	184.6599	1238
	54.63	1 48.3			II	3	3—2	3—2	+4.0	−2.1	195.2434	549
	Aa	2 6.9			II	2	2—3	2—3	+3.8	−2.2	219.6284	629
	ab	2 24.3			II	1	2—3	2—3	+3.7	−2.2	200.9352	582
	bB	2 39.7			II	1	2—3	2—3	+3.6	−2.3	238.0228	569
20	44.18	0 40.6	*f*	9.90	II	2	3	2	+0.6	−2.1	252.9174	1175
	44.47	1 9.2			I	1	3	2—3	+0.1	−2.1	228.8455	1489
	44.55*a*	1 46.4			II		3	3—2	−0.6	−2.0	183.6205	486
	44.55*b*	1 50.1			II		3	3—2	−0.6	−2.0	183.7481	497
	Aa	2 19.3			II	2	3	2	−1.3	−2.3	219.6088	638
	ab	2 39.5			II	1	3	2—3	−1.8	−2.7	200.9002	583
	bB	2 59.4			II	1	3	3	−2.3	−3.2	238.0098	567

Stern 55 ist Doppelstern; ich habe seine beiden Komponenten getrennt beobachtet. Ein anderer Messungsmodus war schon wegen zu großer Unruhe der Bilder nicht angängig.

Stern 18 und 55 kommen in der Leipziger Triangulation nicht vor. Für ihre jährliche Eigenbewegung wurde angenommen

*	μ_α	μ_δ	Autorität
18	+0.0064	−0.″027	F.K.
55	+0.0028	−0.026	Berlin A.G.K.

Mit diesen und den bei der Reduktion der Leipziger Triangulation verwendeten Werten findet man dann die folgenden Korrektionen der Distanzen wegen Einfluß der Eigenbewegung pro Jahr

44.18	+0.″0527	= +0.002425	54.30	−0.″0079	= −0.000364
44.47	−0.0169	= −0.000778	54.57	+0.0259	= +0.001192
44.55	+0.0012	= +0.000055	54.63	+0.1202	= +0.005532

Nach vollständiger Reduktion ergeben sich für die Distanzen schließlich die folgenden, auf die Epoche 1900.0 bezogenen Werte

44.18	253.0720	= 5498.″85	54.30	223.3416	= 4852.″86
44.47	229.0108	= 4976.04	54.57	184.7889	= 4015.17
44.55*a*	183.6861	= 3991.21	54.63	195.3284	= 4244.18
44.55*b*	183.8148	= 3994.00			

Legt man für 44 (= *i*) und 54 (= 9) die durch die Leipziger Triangulation gefundenen Positionen zugrunde und für 18, 30, 47, 55 med., 57, 63 die KÜSTNERschen Meridiankreisbestimmungen, aber auf die Epoche 1900.0 reduziert, so erhält man für die auf 44 oder 54 bezogenen Distanzen und Positionswinkel

	Δ	p		Δ	p
44.18	5498″.90	269° 36′.7	54.30	4853″.02	259° 40′.4
44.47	4975.92	167 15.0	54.57	4015.40	153 59.2
44.55	3992.96	64 9.0	54.63	4243.56	55 9.3

Die Vergleichung dieser Werte mit den unmittelbar vorher aufgeführten beobachteten Distanzen zeigt schon, daß die durch die Leipziger Triangulation gefundenen Positionen von 44 und 54 mit keinem wesentlichen Fehler behaftet sein können. Die Ausgleichung der beobachteten und der berechneten Distanzen ergibt das nachfolgende Resultat:

Stern 44.

18	$+0.955\,d\alpha$	$+0.007\,d\delta$	$=-0''.05$	$-0''.16$	$+1.693\,d\alpha$	$+0.175\,d\delta$	$=+0''.236$
47	-0.211	$+0.975$	$=+0.12$	-0.07	$+0.175\,d\alpha$	$+1.141\,d\delta$	$=+0.274$
55	-0.858	-0.436	$=-0.36$	-0.16			

$d\alpha = +0''.12$ $d\delta = +0''.22$ $\varepsilon_1 = \pm 0''.241$

* 44 65° 53′ 29″.49 $\pm 0''.186$ $+17°\ 19'\ 29''.36$ $\pm 0''.227$

Stern 54.

30	$+0.948\,d\alpha$	$+0.179\,d\delta$	$=-0.16$	$+0.16$	$+1.700\,d\alpha$	$+0.240\,d\delta$	$=-0.544$
57	-0.423	$+0.899$	$=-0.23$	$+0.07$	$+0.240\,d\alpha$	$+1.166\,d\delta$	$=-0.589$
63	-0.789	-0.571	$=+0.62$	$+0.16$			

$d\alpha = -0''.26$ $d\delta = -0''.45$ $\varepsilon_1 = \pm 0''.237$

* 54 66° 32′ 14″.31 $\pm 0''.184$ $+15°\ 38'\ 13''.22$ $\pm 0''.223$

Es werden sonach die Positionen von *i* und 9 in der Leipziger Triangulation durch diese nachträglich ausgeführten Messungen bestätigt. Die Übereinstimmung zwischen beiden Bestimmungen ist genügend, namentlich wenn man in Betracht zieht, daß die Bestimmungen im Oktober 1905 nur auf einem einzigen Beobachtungsabende beruhen. Bei 54 wird die schon S. 560 ausgesprochene Vermutung bestätigt, daß die nur auf einem Abende beruhende Distanz 54.57 in der Bonner Triangulation fehlerhaft sei. Bei 44 wird der Unterschied zwischen beiden Triangulationen durch die in Bonn gemessene Distanz 44.55 verursacht. Nun ist 55 ein Doppelstern mit gleich hellen Komponenten von 3″ Distanz. Mit dem Leipziger Heliometer habe ich beide Komponenten getrennt gemessen, jede genau in der nämlichen Weise wie alle

übrigen Distanzen. WIRTZ gibt für die Distanz 44.55 nur einen Wert an, der sich augenscheinlich auf die Mitte zwischen beiden Komponenten bezieht; wahrscheinlich ist daher wohl auch der Abstand des Sternes 44 von der Mitte des Doppelsternes 55 direkt durch Dazwischenstellen der Bilder von 44 zwischen die beiden Komponenten von 55 gemessen worden. Es ist dies aber ein wesentlich anderes Messungsverfahren, als wie das bei der Messung der übrigen Distanzen innegehaltene, und es kann ohne nähere Untersuchung keinesfalls ohne weiteres angenommen werden, daß ein systematischer Unterschied zwischen den nach beiden Methoden gemessenen Distanzen nicht besteht. Es ist sehr wohl denkbar, daß der Unterschied zwischen dem Bonner und Leipziger Resultat auf diesen Umstand zurückzuführen ist. In diesem Falle wären dann aber auch die Positionen der Sterne 42, 53, 56, 59, 60 und 61 in der Bonner Triangulation nicht einwandfrei, da sie ebenfalls auf Anschlüssen an 55 beruhen.

Örter von 28 Sternen der Hyaden aus Beobachtungen am Leipziger Heliometer.

Mittleres Aequinoctium und Epoche 1900.0.

		A.R.	Dekl.	B.D.
B	$3^m.8$	$63^0\ 31'\ 31''.20$	$+15^0\ 23'\ 10''.32$	$+15^0$ 612
h	7.4	63 58 59.76	+14 10 19.81	+14 687
e	6.0	64 25 10.47	+16 32 37.66	+16 586
b	6.8	64 58 40.75	+15 42 44.81	+15 621
11	7.7	65 6 2.79	+15 17 48.65	+15 624
8	5.0	65 9 42.25	+15 23 28.72	+15 625
c	5.0	65 14 19.55	+14 29 15.55	+14 697
f	7.2	65 16 36.99	+16 48 12.69	+16 602
4	5.0	65 40 49.69	+16 8 9.89	+16 605
10	6.5	65 40 50.60	+14 31 6.77	+14 702
2	4.0	65 42 54.58	+15 44 24.88	+15 631
1	4.0	65 44 16.30	+15 38 56.87	+15 632
17	5.0	65 48 29.22	+12 49 31.77	+12 598
3	6.5	65 49 6.60	+15 56 16.83	+15 633
i	7.3	65 53 29.37	+17 19 29.14	+17 731
6	6.0	66 6 36.00	+15 25 10.34	+15 636
a	5.0	66 12 31.65	+15 58 35.16	+15 637
7	5.5	66 14 8.05	+15 28 28.26	+15 639
16	5.7	66 14 52.62	+13 30 24.94	+13 690
5	7.5	66 15 50.13	+15 55 53.95	+15 640
d	7.3	66 21 38.73	+14 53 22.27	+14 711
9	6.5	66 32 14.57	+15 38 13.67	+15 645
12	5.4	67 2 34.99	+14 38 3.62	+14 720
A	1.1	67 32 43.17	+16 18 29.94	+16 629

Meteorologische Angaben.

März

März

März

Nov

Nov 28.

1900

Feb. 15. [2.41] 55.5 [2.47] 96.1 [3.47] 55.5 [3.55] 95.0 [4.28] 95.9 [4.47] 55.0 **Feb. 22.** [3.08] 46.1 104.0 [3.56] 103.1 [4.08] 46.2 [4.53] 102.7 [5.41] 101.5 [6.08] 46.1 **März 2.** [3.40] 50.0 [3.59] 95.5 [4.14] 95.5 [4.40] 50.4 [4.57] 94.7 [5.38] 95.0 [6.40] 51.1 [6.56] 94.3 [7.15] 94.3 [7.40] 51.4 **Nov. 3.** [23.50] 56.6 [0.33] 101.5 [1.35] 101.4 [1.50] 56.2 **Dez. 3.** [0.49] 53.1 [1.17] 97.4 [2.18] 97.2 [2.49] 52.5 [3.50] 52.2 97.5

1901

Jan. 9. [0.14] 56.7 [0.43] 97.1 [1.14] 56.7 [1.50] 95.9 [2.33] 94.1 [3.14] 56.6 [3.37] 94.1 [5.09] 93.2 [5.14] 56.6 **Jan. 10.** [1.18] 55.3 [1.41] 95.0 [2.49] 94.1 [3.18] 55.6 [3.48] 93.3 [4.49] 92.8 [5.18] 55.8 [6.15] 92.3 [6.18] 55.8 **Jan. 11.** [0.07] 93.8 [0.22] 56.5 [1.15] 92.5 [1.22] 56.6 [2.20] 92.0 [2.39] 92.2 [3.22] 57.0 [3.54] 91.4 [5.22] 57.4 [5.23] 91.0 [6.12] 91.5 [6.22] 57.6 **Jan. 14.** [1.34] 68.6 [2.02] 91.3 [3.00] 91.0 [3.19] 91.0 [3.34] 68.7 [4.06] 90.9 [5.14] 88.8 [5.34] 68.4 [6.20] 87.4 [6.34] 68.0 **Jan. 15.** [0.38] 63.8 [0.45] 95.0 [2.03] 93.7 [2.38] 63.6 [2.59] 92.9 [3.38] 63.5 [4.12] 92.0 [5.23] 91.0 [5.38] 63.2 [6.17] 89.1 [6.38] 63.0

1902

Jan. 27. [4.24] 42.5 [4.42] 97.6 [5.46] 96.9 [6.24] 42.3 [7.10] 96.5 [8.24] 42.1 **Jan. 29** [0.32] 43.4 [2.17] 102.2 [2.32] 43.9 [3.43] 102.2 [4.32] 44.7 **Jan. 30.** [4.32] 98.4 [4.36] 62.2 [5.33] 97.9 [6.36] 63.5 [7.01] 97.8 [7.38] 97.4 [8.36] 64.7 **Feb. 4.** [0.55] 54.9 [2.18] 97.5 [2.55] 54.7 [3.30] 97.7 [4.14] 97.2 [4.55] 54.4 [5.00] 97.2 [6.55] 54.5 [7.00] 96.2 **Feb. 10.** [3.19] 43.7 [3.44] 99.0 [4.55] 98.2 [5.19] 44.0 [6.35] 97.5 [7.19] 43.7 **Feb. 23.** [2.10] 54.5 [3.51] 101.2 [4.10] 54.4 [4.53] 100.8 [6.10] 54.7 [6.22] 99.5 [7.35] 98.9 [8.10] 54.3 **Feb. 25.** [2.18] 48.6 [3.51] 99.4 [4.18] 48.9 [4.54] 98.3 [5.52] 98.0 [6.18] 49.0

1903

Okt. 29. [0.28] 44.3 [1.00] 106.3 [1.50] 106.1 [2.28] 44.9 [2.51] 107.0 [4.00] 108.6 [4.28] 45.4 **Nov. 5.** [0.45] 104.9 [0.56] 64.1 [2.13] 104.1 [2.56] 64.0 [3.31] 105.0 **Dez. 3.** [0.46] 55.5 [0.53] 95.0 [2.02] 94.5 [2.46] 54.8 [2.58] 93.8 [3.27] 93.9 [3.46] 54.5 **Dez. 4.** [0.44] 93.9 [0.50] 43.8 [2.11] 95.0 [2.50] 43.2 [3.34] 93.5 [4.50] 42.4 [5.00] 93.1 **Dez. 10.** [0.13] 43.3 [0.49] 100.3 [1.13] 43.2 [1.57] 99.5 [2.52] 99.5 [3.14] 43.2 [3.38] 99.2 [4.35] 99.1 [5.14] 42.8

1904

Jan. 27. [1.22] 57.8 [1.30] 98.1 [2.22] 57.8 [2.29] 97.0 [4.12] 94.4 [4.23] 58.1 **Feb. 7.** [2.05] 41.7 [2.06] 104.1 [3.05] 41.9 [3.20] 103.9 [4.26] 103.5 [5.06] 42.2 [5.17] 103.2

1905

Okt. 10. [23.15] 59.2 [0.28] 104.7 [1.15] 59.2 [1.34] 104.2 [2.51] 103.5 [3.15] 59.3 **Okt. 20.** [23.55] 54.6 [0.26] 99.1 [1.55] 54.2 [2.06] 97.8 [3.09] 97.5 [3.55] 53.9

		A.R.	Dekl.	B.D.
g	$7^m.5$	$67^0\ 48'\ 25''.27$	$+15^0\ 3'\ 29''.19$	$+14^0\ 726$
15	6.5	68 6 27.95	+15 49 58.37	+15 661
14	5.3	68 21 37.73	+15 36 11.08	+15 665
13	5.3	68 23 17.86	+15 43 11.91	+15 666

Meteorologische Angaben.

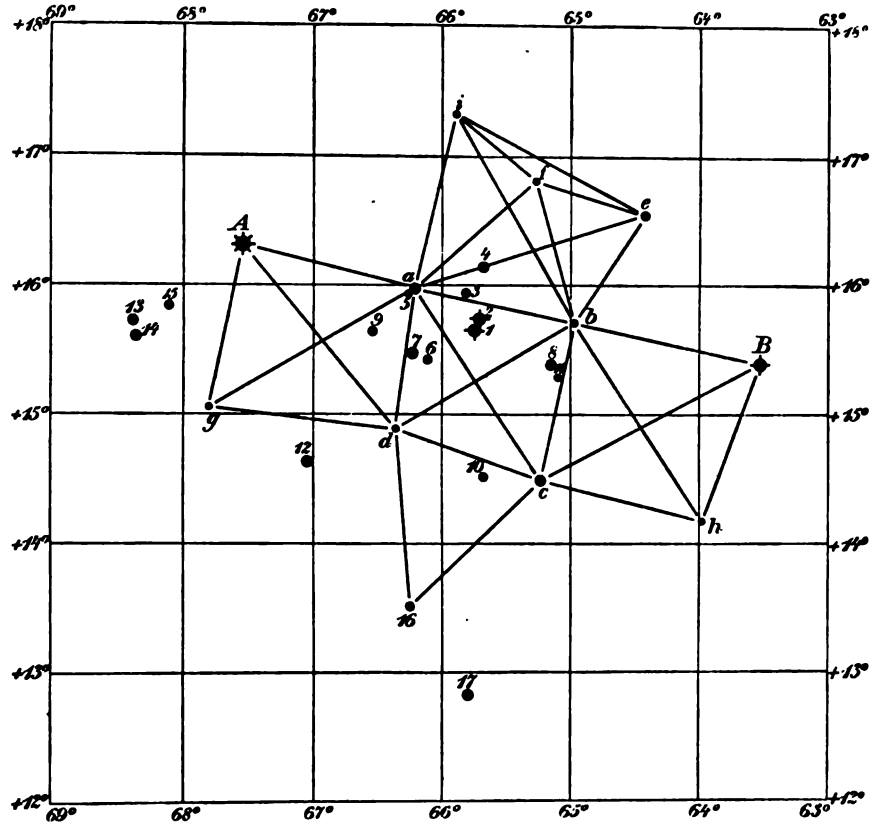
Um Raum zu sparen führe ich die meteorologischen Angaben nicht in Tabellenform, sondern in fortlaufender Zeile auf. Angegeben sind die auf 0^0 reduzierten Barometerstände in Millimetern und die Lufttemperaturen in Celsiusgraden. Um bei den Temperaturen das Zeichen zu vermeiden, sind alle Thermometerablesungen um 100^0 vermehrt, sodaß 0^0 und 100^0 identisch sind. Die Barometerstände sind um 700 mm vermindert. Die Bezeichnung mm ist fortgelassen, ebenso bei den Temperaturen das Gradzeichen. Die auf das Barometer bezüglichen Zahlen liegen unterhalb von 70, die auf das Thermometer bezüglichen oberhalb von 70; die Möglichkeit einer Verwechselung beider miteinander ist sonach ausgeschlossen. Die den meteorologischen Angaben zugehörige Sternzeit ist nach Stunden und Minuten in eckigen Klammern gegeben, sodaß z. B. [20.48] bedeutet $20^h\ 48^m$.

1899

Feb. 21. [3.46] 102.8 [4.06] 63.2 102.5 [5.04] 102.0 [5.51] 101.7 [6.06] 63.4 [6.11] 101.8 [6.55] 101.3 [7.06] 63.4 **Feb. 22.** [3.09] 59.4 [3.27] 102.8 [3.41] 102.5 [4.45] 102.1 [5.09] 59.5 **Feb. 27.** [3.25] 101.2 [3.29] 64.6 [4.29] 64.6 [4.37] 98.8 [6.04] 98.9 [6.29] 64.5 [6.48] 98.3 [8.10] 98.7 [8.29] 64.6 **März 6.** [4.36] 101.1 [4.57] 56.3 [5.24] 100.2 [6.00] 99.9 [6.57] 55.9 99.2 [7.57] 55.5 99.1 **März 11.** [5.06] 110.4 [5.17] 60.8 [5.58] 108.9 [7.06] 106.8 [7.17] 61.1 [8.06] 105.5 [8.17] 61.2 **März 13.** [5.03] 108.0 [5.24] 65.8 [6.04] 106.9 [7.14] 105.5 [7.24] 65.8 [8.14] 104.5 [8.24] 65.8 **März 14.** [5.12] 109.8 [5.28] 63.2 [6.09] 108.3 [7.18] 107.1 [7.28] 63.4 [8.18] 104.9 [8.28] 63.5 **März 17.** [4.40] 56.6 [5.02] 111.0 [5.40] 56.1 [6.11] 108.9 [7.18] 108.2 [7.40] 55.8 [8.29] 107.2 [8.40] 55.3 **März 24.** [6.08] 53.0 [6.10] 97.1 [6.55] 96.8 [8.07] 96.3 [8.08] 54.2 **Okt. 20.** [0.55] 102.9 [0.56] 62.7 [1.56] 62.7 [2.08] 102.5 [3.38] 101.5 [3.56] 62.6 **Nov. 4.** [0.52] 112.2 [0.55] 53.0 [1.41] 111.8 [2.40] 111.6 [2.56] 53.1 [3.44] 111.0 [3.59] 111.0 [4.56] 53.1 [5.29] 110.8 [5.56] 53.1 **Nov. 5.** [0.51] 109.5 [0.59] 53.0 [1.34] 109.2 [2.19] 109.2 [2.59] 53.0 [3.09] 108.2 [3.44] 108.4 [4.26] 107.7 [4.59] 53.1 [5.41] 107.7 [5.59] 53.0 **Nov. 6.** [0.51] 107.9 [1.02] 52.1 [1.59] 109.1 [3.02] 52.9 108.5 [3.36] 107.8 [4.02] 53.0 **Nov. 21.** [0.02] 59.5 [1.23] 100.0 [2.02] 59.1 [2.05] 100.2 [2.53] 100.0 [3.44] 100.8 [4.02] 58.2 **Nov. 28.** [1.30] 59.6 [2.09] 107.0 [2.30] 59.7 [3.08] 107.0 [3.30] 59.7 **Dez. 7.** [1.05] 51.7 [1.45] 96.5 [2.32] 96.2 [3.05] 51.8 [3.23] 95.6 [4.54] 95.5 [5.05] 51.8

Inhalt.

	Seite
Der Arbeitsplan	495
Die Beobachtungen	497
Der Normalbogen	506
Die Parallaxen der Sterne a, b und B	510
Die Ableitung des Skalenwertes	518
Die Ableitung der Eigenbewegungen	520
Die endgültigen Werte der Distanzen vor der Ausgleichung	530
Die Ausgleichung der Distanzen des Hauptnetzes	534
Berechnung der Koordinaten der Hauptsterne aus den ausgeglichenen Distanzen	540
Die Orientierung des Systems	544
Die Punkte zweiter Ordnung	548
Ableitung der mittleren Fehler	553
Vergleichung mit der Triangulation von WIRTZ	554
Vergleichung mit den Zonenbeobachtungen	566
Nachtrag I	567
Nachtrag II	568
Örter von 28 Sternen der Hyaden aus Beobachtungen am Leipziger Heliometer	571
Meteorologische Angaben	572



Triangulation der Hyaden.

DAS GRUPPENSCHEMA FÜR ZUFÄLLIGE EREIGNISSE

VON

HEINRICH BRUNS

DES XXIX. BANDES
DER ABHANDLUNGEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

N° VIII

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER
1906

Vorgetragen für die Abhandlungen am 25. Mai 1906.
Das Manuskript eingeliefert am 14. Juni 1906.
Der letzte Bogen druckfertig erklärt am 17. Juli 1906.

DAS GRUPPENSCHEMA FÜR ZUFÄLLIGE EREIGNISSE

VON

HEINRICH BRUNS

1. In meinem vor kurzem erschienenen Lehrbuche „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre“ habe ich dem Urnenschema, das zur Untersuchung von gruppenweise gezählten Ereignissen zu dienen hat, einen besonderen Abschnitt gewidmet und bei dieser Gelegenheit den einfachsten Fall, nämlich die zweigliedrigen Gruppen, durchgerechnet. Für die höheren Gruppen beschränkte ich mich darauf, einige allgemeine Ergebnisse auszusprechen, weil das a. a. O. benutzte Verfahren vorderhand auf weitläufige und schwerfällige Formeln führte. Bei der weiteren Verfolgung des Gegenstandes bin ich nun dahin gelangt, die gesuchte Lösung in eine hinreichend übersichtliche Gestalt zu bringen: es genügte dazu, an dem ursprünglichen Verfahren einige Kleinigkeiten abzuändern, wozu im besonderen die Einführung der zyklischen Gruppenbildung und die Aufstellung einer bestimmten Gruppenordnung zu rechnen ist.

Da die nachstehenden Entwicklungen sich dem Inhalte des genannten Buches eng anschließen, so verweise ich wegen der Namen und Zeichen auf die betreffenden Abschnitte meiner früheren Darstellung; dies gilt namentlich von der Bedeutung und dem Verhalten der $\mathfrak{D}$-Operation.

2. Als Ausgangspunkt der Untersuchung dient die übliche Vorstellung von einer Urne, die mit Kugeln verschiedener Farbe gefüllt ist. Aus der Urne wird n-mal mit jedesmaliger Zurücklegung der Kugel gezogen, so daß eine aus n Zügen zusammengesetzte „Zugreihe“ $Z(n)$ oder ein „Versuch“ $Z(n)$ entsteht. Bedeutet hierbei z_h den h-ten Zug, so läßt sich der Versuch $Z(n)$ in Gestalt der Kombination

$$Z(n) = z_1 z_2 \dots z_n \tag{1}$$

schreiben. Faßt man ferner in der vorstehenden Zugreihe die Züge mit den Nummern

$$1 \text{ bis } s, \quad 2 \text{ bis } s+1, \quad 3 \text{ bis } s+2, \quad \text{usw.}$$

zusammen, so entstehen s-gliedrige „Gruppen", für die wir zur Abkürzung das Zeichen $G(s)$ benutzen wollen.

Denkt man sich die n Züge, wie es gewöhnlich geschieht, der Reihe nach auf einer Zeile hingeschrieben, so lassen sich im ganzen $n - s + 1$ Gruppen $G(s)$ abteilen. Demnach muß bei einer derartigen Gruppenbildung die Zahl n mindestens gleich s sein, da man andernfalls überhaupt keine Gruppe $G(s)$ erhält. Man kann aber auch die Züge auf einem Kreise eintragen, und zwar derart, daß sich beim Durchlaufen des Kreises in der Richtung $z_1 z_2$ an den letzten Zug z_n wieder die Züge z_1, z_2, ... anschließen. In diesem Falle läßt sich offenbar das Abteilen von Gruppen $G(s)$ unbeschränkt nach vorwärts und ebenso auch nach rückwärts fortsetzen, nur daß sich dann die einzelnen Gruppen nach jedem auf dem Kreise vollführten Umlaufe periodisch wiederholen.

Wenn die Züge auf einem Kreise eingetragen werden, so empfiehlt es sich, die Numerierung der Züge nach vorwärts über n hinaus und ebenso nach rückwärts über 0, -1, ... hinaus unbeschränkt fortzusetzen, mit der Maßgabe, daß zwei Züge z_h und z_k identisch sind, wenn ihre Nummerndifferenz $h - k$ durch n teilbar ist. Man erhält hierbei zu einem Zuge z_k, dessen Nummer k außerhalb des Intervalls 1 bis n liegt, die eigentliche Zugnummer h, wenn man zu k den modulo n genommenen Rest h aufsucht und hierbei vorschreibt, daß dieser Rest h der Reihe der Zahlen 1 bis n angehören soll. Faßt man dann die Züge mit den Nummern

$$(2) \qquad 1 \text{ bis } s, \quad 2 \text{ bis } s+1, \ldots, \quad n \text{ bis } n+s-1$$

zusammen, so entstehen n voneinander verschiedene Gruppen $G(s)$. Dieselbe Gruppenreihe, wenn auch mit zyklischer Verschiebung der einzelnen Glieder, wird erhalten, wenn man bei dem Abteilen der Gruppen nicht wie in (2) mit dem Zuge z_1, sondern mit irgend einem andern Zuge z_h beginnt und auf dem Kreise einmal vollständig herumgeht. Zugleich erkennt man, daß n jetzt auch kleiner als s sein darf. So liefert z. B. selbst für $n = 1$ der Ansatz (2) verbunden mit der Regel von der Bedeutung der oberhalb n gelegenen Nummern eine Gruppe $G(s)$, die offenbar durch das n-malige Setzen des Zuges z_1 entsteht.

3. Die beiden vorstehend beschriebenen Arten der Gruppenbildung — auf der Zeile und auf dem Kreise — kann man als die „lineare" und die „zyklische" unterscheiden. Handelt es sich

um Auszählungen, die innerhalb beobachteter Zugreihen an den Gruppen vorgenommen werden, so werden die beiden Bildungsweisen in ihren numerischen Ergebnissen um so weniger voneinander abweichen, je größer n gegen s ist. Da nun die zyklische Gruppenbildung, wie sich später zeigen wird, die einfacheren Formeln liefert, so empfiehlt es sich, die zyklische Rechnung überall da zu bevorzugen, wo nicht triftige Gründe das Gegenteil fordern.

4. Von den in der betrachteten Urne enthaltenen Kugeln wollen wir voraussetzen, daß sie sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Im ganzen mögen F verschiedene Farben vorhanden sein, die wir uns auf irgend eine Weise geordnet und durch laufende Nummern unterschieden denken. Die relative Häufigkeit, mit der die Kugeln der f-ten Farbe an der Urnenfüllung beteiligt sind, bezeichnen wir mit p_f, so daß p_f nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der das Ziehen der f-ten Farbe zu erwarten ist. Der Kürze halber werden wir das Symbol p_f auch zur Bezeichnung der dazu gehörigen Farbe benutzen.

5. Nach diesen Festsetzungen entsteht aus (1) der Ausdruck für ein bestimmtes beobachtetes $Z(n)$, wenn man in (1) jedes z_k durch das p-Zeichen derjenigen Farbe ersetzt, die bei dem Zuge z_k herausgekommen ist. Jedes beobachtete $Z(n)$ erscheint also als eine Kombination von n Elementen, die der Reihe der F Größen p_f entnommen sind. Ebenso erscheinen die Gruppen $G(s)$, die sich aus dem betrachteten $Z(n)$ bilden lassen, als Kombinationen von je s Elementen aus der Reihe der p_f.

Je nach der Art, wie die Elemente p_f in eine Gruppe $G(s)$ eingehen, nimmt diese Gruppe andre und andre Formen an. So können z. B. für drei Farben bei den Gruppen $G(2)$ die neun Formen

$$(3) \quad p_1p_1,\ p_1p_2,\ p_1p_3,\ p_2p_1,\ p_2p_2,\ p_2p_3,\ p_3p_1,\ p_3p_2,\ p_3p_3$$

auftreten. Allgemein gesprochen ist die Anzahl der möglichen Formen von $G(s)$ bei F Farben durch die Potenz F^s gegeben, da jede Farbe unabhängig von der andern als erstes, zweites usw. Element in die Gruppe $G(s)$ eingehen kann.

6. Bei der Formulierung der zu lösenden Aufgabe möge für den Augenblick der einfachste Fall vorangestellt werden. Wenn

der Urnenversuch $Z(n)$ m-mal ausgeführt wird, so entsteht dadurch eine Kollektivreihe von dem Umfange m, deren Glieder die m beobachteten $Z(n)$ bilden. Als Argument dieser Kollektivreihe soll zunächst die Häufigkeit x gelten, mit der eine vorgeschriebene Form der Gruppe $G(s)$ in jedem $Z(n)$ auftritt. Sind beispielsweise drei Zugreihen von der Gestalt $Z(7)$, nämlich die Reihen

$$(4) \qquad p_1p_2p_1p_2p_2p_2p_1, \quad p_1p_2p_1p_1p_2p_1p_1, \quad p_1p_1p_1p_2p_1p_1p_1$$

beobachtet worden, so tritt darin bei linearer Zählung von den Gruppen $G(2)$ die Form p_1p_1 mit den Häufigkeiten

$$x = 0, \quad x = 2, \quad x = 4$$

auf, während bei den Gruppen $G(3)$ zu der Form $p_1p_2p_1$ die Häufigkeiten

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 1$$

gehören. Bei zyklischer Zählung erhielte man dagegen zu p_1p_1 die Argumentwerte 1, 3, 5 und zu $p_1p_2p_1$ wieder die früheren Werte 1, 2, 1.

Allgemein wird, wenn es sich um die Gruppen $G(s)$ handelt, das Argument x — je nach der Art der Zählung — der Reihe der Zahlen 0 bis $n-s+1$ oder 0 bis n angehören, da ja einerseits die vorgeschriebene Gruppenform in einem $Z(n)$ ganz ausfallen kann, und da andrerseits jedes $Z(n)$ nicht mehr als $n-s+1$ oder n verschiedene Gruppen $G(s)$ liefern kann.

Die betrachtete Kollektivreihe liefert des weitern eine bestimmte beobachtete Verteilung $U(x)$, wobei $U(x)$ die relative Häufigkeit ausdrückt, mit welcher der Argumentwert x in der Kollektivreihe auftritt. Gesucht wird dann zur Vergleichung mit dem beobachteten Verlaufe von $U(x)$ die entsprechende theoretische Verteilung $\mathfrak{U}(x)$, d. h. diejenige Verteilung, die man beobachten würde, wenn bei unbegrenzter Wiederholung der Versuche $Z(n)$ eine vollständige Ausgleichung des den Urnenzügen anhaftenden Zufalls eintritt. Die Wertreihe der $\mathfrak{U}(x)$ läßt sich mit Hilfe der $\mathfrak{D}$-Operation übersichtlich in den Ausdruck

$$(5) \qquad \mathfrak{D}(u^x) = \mathfrak{U}(0) + \mathfrak{U}(1)u + \mathfrak{U}(2)u^2 + \cdots$$

zusammenfassen, worin u einen willkürlichen Parameter bedeutet, und $\mathfrak{D}(u^x)$ den nach der Verteilung $\mathfrak{U}(x)$ genommenen Durchschnitt der Werte von u^x bezeichnet.

Statt der vorstehend gebrauchten Zeichen werden wir im folgenden auch die Symbole $\mathfrak{D}(u^r,n)$ und $\mathfrak{U}(x,n)$ benutzen, wenn die Anzahl der Züge in den zur Auszählung vorgelegten Zugreihen $Z(n)$ besonders ersichtlich gemacht werden soll.

7. Die angegebene Aufgabe läßt sich nun nach verschiedenen Richtungen hin erweitern. Zunächst kann man bei der Auszählung, die für jedes $Z(n)$ den zugehörigen Wert von x liefert, statt einer einzigen Gruppenform mehrere Formen gleichzeitig berücksichtigen. So erhält man in dem Beispiel (4), wenn man die Formen p_1p_1 und p_2p_2 vereint zählt, bei der linearen Gruppenbildung die Argumentwerte

$$x = 2, \quad x = 2, \quad x = 4.$$

Berücksichtigt man dagegen gleichzeitig die Formen p_1p_2, p_2p_1 und $p_1p_2p_2$, so wird

$$x = 5, \quad x = 4, \quad x = 2.$$

Man kann die Gruppenformen, die bei der Auszählung berücksichtigt werden, kurz als die „zählenden" Formen bezeichnen, im Gegensatze zu den übrigen „nichtzählenden".

Die Scheidung in zählende und nichtzählende Formen läßt sich noch etwas anders einkleiden. Man denke sich die Formen, die bei den betrachteten Gruppen überhaupt auftreten können, irgendwie geordnet und der Reihe nach mit G_1, G_2, ... bezeichnet. Ferner ordne man jeder Form G_h als „Gewicht" eine bestimmte Zahl a_h zu und bezeichne mit x_h die Häufigkeit, mit der die Form G_h in der vorgelegten Zugreihe auftritt. Endlich wähle man als Argument x den Ausdruck

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots, \tag{6}$$

den wir als die „mit den Gewichten a_h gebildete Formenmenge" bezeichnen wollen. Dann erhält man offenbar wieder den vorhin betrachteten Fall, wenn man vorschreibt, daß als Gewichte nur die Zahlen Eins und Null Verwendung finden sollen, wobei den zählenden Formen das Gewicht Eins, den nichtzählenden das Gewicht Null zu geben ist. Zugleich erkennt man aber auch, daß kein Hindernis besteht, die Aufgabe in der durch (6) ausgedrückten allgemeineren Gestalt aufzustellen, also für die Gewichte irgendwelche positive oder negative Zahlen anzusetzen.

8. Eine andere Erweiterung der zuerst gestellten Aufgabe entsteht, wenn man bei der Auszählung die gezählten Form-

nicht zusammenfaßt, sondern innerhalb jeder Zugreihe ganz oder teilweise getrennt hält. Bezeichnet man z. B. in der Reihe (4) mit x die Häufigkeit der Form p_1p_1, mit y die Häufigkeit der Form p_2p_2, endlich mit z die Häufigkeit der vereint gezählten Formen p_1p_2 und p_2p_1, so erhält man für diese Argumente bei linearer Gruppenbildung aus den drei Zugreihen die drei Wertsysteme

$$x = 0,\ y = 2,\ z = 4;\quad x = 2,\ y = 0,\ z = 4;\quad x = 4,\ y = 0,\ z = 2.$$

Durch eine solche Zählungsweise gelangt man offenbar zu Kollektivreihen, die von mehreren Argumenten abhängen.

Die verschiedenen Gestalten der getrennten Zählung lassen sich auf folgende Art einheitlich zusammenfassen. Man denke sich wieder wie vorhin die Formenreihe $G_1, G_2, \ldots$ aufgestellt und zunächst mit den Gewichten $a_1, a_2, \ldots$ nach (6) für jede Zugreihe die Formenmenge

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots$$

berechnet. Darauf wiederhole man diese Operation mit den neuen Gewichten $b_1, b_2, \ldots$, so daß zu jeder Zugreihe die Formenmenge

$$y = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots$$

entsteht. In dieser Weise fahre man fort, bis die verschiedenen Gewichtssysteme, die man benutzen will, erschöpft sind. Dann liefern die vorgelegten Zugreihen eine Kollektivreihe, deren Glieder von den Argumenten $x, y, \ldots$ abhängen. Man kann diese Behandlung der Zugreihen als „wiederholte Zählung mit abgeänderten Gewichten" bezeichnen. Sie schließt, wie man ohne weiteres erkennt, die getrennte Zählung einzelner Formen als Sonderfall in sich.

9. Der in (6) aufgestellte Ausdruck der Formenmenge verlangt, daß die vorhandenen Gruppenformen in eine bestimmte Ordnung gebracht worden seien. Um eine für unseren Zweck geeignete Reihenfolge herzustellen, benutzen wir die folgende Bemerkung.

Wenn in dem dekadischen Zahlensystem beispielsweise alle vierziffrigen Zahlen aufgestellt werden sollen, die sich mit den sechs Ziffern 2, 4, 5, 7, 8, 9 bilden lassen, so gibt es eine bekannte einfache Regel, mit der man die verlangten Zahlen, und zwar sogleich nach ihrer Größe geordnet, unmittelbar hinschreiben

kann. Diese Regel kommt darauf hinaus, daß man, von der niedrigsten Zahl 2222 ausgehend, zunächst die letzte Ziffer bis zu dem größten zulässigen Werte aufsteigen läßt. Darauf erhöht man die vorhergehende Ziffer und läßt wiederum die letzte Ziffer die zulässigen Werte durchlaufen, und so fort, bis die Gesamtheit der verlangten Zahlen hergestellt ist.

Um die vorstehende Regel auf unsern Fall anzuwenden, betrachten wir die F Farbengrößen $p_1, \ldots p_F$ als ebensoviele, ihrer Größe nach geordnete Ziffern eines Q-adischen Zahlensystems, wobei Q eine Zahl oberhalb F bedeutet. Darauf setzt man, wenn es sich um das Ordnen der Gruppenformen $G(s)$ handelt, alle s-ziffrigen Zahlen des Q-adischen Systems an, die sich mit den genannten F Ziffern bilden lassen. Hierbei erhält man, wenn man die genannte Regel beachtet, die einzelnen Zahlen nach ihrer Größe geordnet und gewinnt zugleich die gesuchte Formenordnung, da ja jeder Zahl eine Form und jeder Form eine Zahl entspricht. Ein einfaches Beispiel hierzu ist die in (3) aufgestellte Formenreihe der Gruppen $G(2)$ für drei Farben.

Wenn die zu $G(s)$ gehörige Formenreihe — in der angegebenen Weise geordnet — vorliegt, so ist damit auch ihre laufende Numerierung von 1 bis F^s gegeben. Es findet dann ein wechselweise eindeutiges Entsprechen zwischen den Formen von $G(s)$, den aus den p-Größen gebildeten s-ziffrigen Zahlen des Q-adischen Systems und den laufenden Formennummern statt.

10. Um die vorbereitenden Bemerkungen abzuschließen, ist noch an die Bedeutung der $\mathfrak{D}$-Operation zu erinnern. In der Zugreihe

$$Z(n) = z_1 z_2 \ldots z_n$$

spielen die Bestandteile z_i die Rolle von unabhängigen Veränderlichen, deren Wertvorrat durch die p-Größen gegeben ist. Wird die Reihe der Versuche unbegrenzt fortgesetzt, so tritt jedes z_i mit einer bestimmten Verteilung auf, deren Verlauf, entsprechend den möglichen Werten von z_i, durch die Gleichungen

$$\mathfrak{U}(p_1) = p_1, \quad \mathfrak{U}(p_2) = p_2, \quad \ldots \quad \mathfrak{U}(p_F) = p_F$$

bestimmt ist. Bedeutet ferner $A(z_i)$ irgend
genden Ausdruck, so erscheint der Durch
nach der Verteilung von z_i, in der G

$$\mathfrak{D}(A) = \sum_a \mathfrak{U}(a) A(
$$

worin der Buchstabe a bei der Summation die Reihe der p-Größen zu durchlaufen hat. In ähnlicher Weise nimmt für einen von mehreren Zügen abhängenden Ausdruck $A(z_i,z_k,...)$ der nach sämtlichen darin vorkommenden Zügen genommene Durchschnitt die Gestalt

$$\mathfrak{D}(A) = \sum_a \sum_b .. ab .. A(a,b,..)$$

an, worin bei der Summation die $a, b, \ldots$ unabhängig voneinander die Reihe der p-Größen zu durchlaufen haben.

Da wir es im folgenden fortwährend mit solchen Summen zu tun haben, so soll der Kürze halber das Summenzeichen nur einfach und ohne angehängte Indizes geschrieben werden, wenn die Summation über alle hinter dem Summenzeichen stehenden beweglichen Nummern auszudehnen ist. Ferner kann auch die Angabe der Summengrenzen fortbleiben, denn die Summationen gehen, von besonderen Fällen abgesehen, stets über denselben Bereich, nämlich bei den p-Größen von p_1 bis p_F, bei den Zugnummern von 1 bis n oder auch — bei zyklischer Rechnung — über den ganzen Kreisumfang, endlich bei den Formennummern der Gruppen $G(s)$ von 1 bis F^s.

II. Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns nunmehr zu der Untersuchung der zyklisch gebildeten Gruppen $G(s)$, wobei wir sogleich nach der in (6) enthaltenen Vorschrift die mit den Gewichten $e_1, e_2, \ldots$ angesetzte Formenmenge

$$x = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \cdots$$

zugrunde legen. Dieser Ansatz ist hinreichend allgemein, denn das Zusammenfassen von Formen ungleicher Gliederzahl würde, wie sich am raschesten an einem einfachen Falle zeigen läßt, nichts wesentlich neues liefern. Wenn z. B. die Urnenfüllung aus den drei Farben p, q, r besteht, und wenn ferner die Formen pp, ppr und pqr mit den Gewichten a, b, c gezählt werden sollen, während alle übrigen Gewichte null sind, so kann man zunächst die Zählung von pp durch die Zählung der drei Formen ppp. ppq und ppr ersetzen, da ja, wie unmittelbar ersichtlich, das Vorkommen dieser drei Formen bei der zyklischen Rechnung mit dem Vorkommen der Form pp äquivalent ist. Man hätte also statt der angegebenen zwei- und dreigliedrigen Formen die vier durchweg dreigliedrigen Formen

$$ppp,\ ppq,\ ppr,\ pqr$$

mit den Gewichten

$$a,\ a,\ a+b,\ c$$

zu zählen. Ebenso könnte man die Zählung von pp auch durch die Zählung der Formen ppp, qpp, rpp ersetzen, so daß man auf die fünf Formen

$$ppp,\ qpp,\ rpp,\ ppr,\ pqr$$

mit den Gewichten

$$a, \quad a, \quad a, \quad b, \quad c$$

geführt wird.

Das angeführte Beispiel läßt erkennen, wie man bei der zyklischen Gruppenbildung die Zählung von Formen ungleicher Gliederzahl durch angemessene Erweiterung der niedrigeren Formen und durch entsprechende Änderung der Gewichtszahlen auf den Fall reduzieren kann, wo sämtliche Formen dieselbe Gliederzahl besitzen.

12. Bei der Behandlung der gestellten Aufgabe wollen wir in $G(s)$ die Gliederzahl s als fest ansehen, dagegen bei der Zahl n in $Z(n)$ sogleich die Gesamtheit der für n zulässigen Werte ins Auge fassen. Hierbei ist zu beachten, daß für $n < s$ die aus $Z(n)$ zu bildenden Gruppen $G(s)$ nicht die sämtlichen Formen liefern, die an und für sich bei den Gruppen $G(s)$ möglich sind. So erhält man z. B. für $n = 1, 2, 3$ als Gruppen $G(4)$ die nachstehenden viergliedrigen Zugreihen:

$$\begin{aligned} n &= 1, \quad z_1 z_1 z_1 z_1, \\ n &= 2, \quad z_1 z_2 z_1 z_2,\ z_2 z_1 z_2 z_1, \\ n &= 3, \quad z_1 z_2 z_3 z_1,\ z_2 z_3 z_1 z_2,\ z_3 z_1 z_2 z_3, \end{aligned}$$

und man erkennt sofort, daß aus diesen Gruppen niemals eine Form wie etwa $p_1 p_1 p_2 p_2$ entspringen kann.

13. Die bei den Gruppen $G(s)$ möglichen Formen denken wir uns, wie früher angegeben, als s-ziffrige Q-adische Zahlen geordnet und zugleich mit den von 1 bis $M = F'$ laufenden Nummern versehen. Zu jeder Form G_h gehört dann eine bestimmte s-ziffrige Q-adische Zahl, die wir ebenfalls kurz mit G_h bezeichnen können, ferner die laufende Nummer h, sowie ein Gewicht e_h, das vorläufig ganz beliebig angesetzt werden mag. Weiter führen wir ein Gewichtssymbol E ein, das von den s Zügen einer Gruppe $G(s)$ abhängt, und das wir je nach Umständen in einer der beiden Gestalten

$$E(z_{i+1} z_{i+2} \dots z_{i+s}) \quad \text{oder} \quad E(i+1, i+s) \tag{7}$$

schreiben wollen. Dieses Symbol soll den Wert e_h annehmen, sobald die hinter dem E-Zeichen stehende Gruppe $G(s)$ in die Form G_h übergeht.

Mit den Symbolen E bilden wir nun den Ausdruck

$$x = E(z_1 \,..\, z_s) + E(z_2 \,..\, z_{s+1}) + \cdots + E(z_n \,..\, z_{n+s-1}), \tag{8}$$

wobei die oberhalb n gelegenen Indizes in der früher angegebenen Weise durch ihren modulo n genommenen Rest zu ersetzen sind. Für einen bestimmten ausgeführten Versuch $Z(n)$ ist dann in (8) jeder Zug z_i durch die Farbe p_h zu ersetzen, die bei dem Zuge z_i zum Vorschein gekommen ist. Tritt hierbei in (8) eine Gruppenform G_h mit der Häufigkeit x_h auf, so entspringt daraus der Beitrag $x_h e_h$, d. h. der Ausdruck x ist nichts anderes, als die mit den Gewichten e_h gezählte Formenmenge des betrachteten Versuches, die zugleich das Argument der zu untersuchenden Verteilung liefert.

Weiter führen wir die Veränderlichen $u = \exp U$ nebst dem Symbol

$$C(z_{i+1} z_{i+2} \,..\, z_{i+s}) = \exp[UE(z_{i+1} z_{i+2} \,..\, z_{i+s})] \tag{9}$$

ein. Daraus folgt der Reihe nach

$$u^x = \exp[UE(z_1 \,..\, z_s) + \cdots + UE(z_n \,..\, z_{n+s-1})],$$

$$u^x = C(z_1 \,..\, z_s) C(z_2 \,..\, z_{s+1}) \ldots C(z_n \,..\, z_{n+s-1}).$$

Nimmt man hiermit die $\mathfrak{D}$-Operation vor, die sich rechts auf die Verteilung der z_i und links auf die daraus entspringende Verteilung des Arguments x bezieht, so entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{D}(u^x, n) = \mathfrak{D}[C(z_1 \,..\, z_s) \ldots C(z_n \,..\, z_{n+s-1})]. \tag{10}$$

Ersetzt man dann noch, wo nötig, die Indizes durch ihre modulo n genommenen Reste und führt auf der rechten Seite die $\mathfrak{D}$-Operation nach der in Artikel 10 entwickelten Vorschrift durch, so entsteht der Ausdruck

$$\Sigma a_1 a_2 \,..\, a_n C(a_1 a_2 \,..\, a_s) C(a_2 a_3 \,..\, a_{s+1}) \ldots C(a_n a_1 \,..\, a_{s-1}), \tag{11}$$

worin bei der Summation die Nummern a_i — jede für sich — die Reihe der Farbengrößen p_1 bis p_F zu durchlaufen haben.

14. Die Gleichungen (10) und (11), sowie die weiterhin daraus abzuleitenden Folgerungen, bleiben ihrem Wesen nach bestehen, wenn statt der einmaligen Zählung der Formenmenge eine mehrmalige Zählung mit abgeänderten Gewichten vorliegt. Es wird

genügen, dies für den Fall nachzuweisen, wo es sich um zwei Argumente handelt.

Wenn sich an die erste, mit den Gewichten e_h ausgeführte Zählung eine zweite mit den Gewichten f_h anschließt, so führt man neben den E-Symbolen, die für die Gewichte e_h gelten, in ähnlicher Weise noch die Symbole

$$F(z_{i+1}z_{i+2}\,..\,z_{i+s})$$

ein, die den Wert f_h annehmen, wenn die hinter dem F-Zeichen stehende Gruppe $G(s)$ in die Form G_h übergeht. Ferner setzt man mit den Veränderlichen

$$u = \exp U, \quad v = \exp V$$

den Ausdruck

$$C(z_{i+1}\,..\,z_{i+s}) = \exp\left[UE(z_{i+1}\,..\,z_{i+s}) + VF(z_{i+1}\,..\,z_{i+s})\right]$$

nebst den Argumenten

$$x = E(z_1\,..\,z_s) + E(z_2\,..\,z_{s+1}) + \cdots + E(z_n\,..\,z_{n+s-1}),$$
$$y = F(z_1\,..\,z_s) + F(z_2\,..\,z_{s+1}) + \cdots + F(z_n\,..\,z_{n+s-1})$$

an. Dann erhält man statt (10) die Gleichung

$$\mathfrak{D}(u^x v^y, n) = \mathfrak{D}\left[C(z_1\,..\,z_s)\,C(z_2\,..\,z_{s+1})\,\ldots\,C(z_n\,..\,z_{n+s-1})\right],$$

worin der Durchschnitt rechterhand nach der Verteilung der Züge z_i, linkerhand nach der Verteilung der Argumentpaare x, y zu nehmen ist.

Es bedarf keiner besonderen Darlegung, wie sich die angegebene Beziehung gestaltet, wenn mehr als zwei Argumente in Betracht kommen.

15. Um den Ausdruck (11) umzugestalten ziehen wir jetzt noch die Gruppen $G(s-1)$ heran. Die dazu gehörigen Formen denken wir uns Q-adisch als $(s-1)$-ziffrige Zahlen geordnet und mit den von 1 bis $N = F^{s-1}$ laufenden Nummern versehen. Ferner führen wir das Zeichen $\mathfrak{e}(a,b)$ ein, das den Wert Eins oder Null besitzen soll, je nachdem a und b gleich oder ungleich sind. Sodann greifen wir aus den Nummern des Formensystems $G(s-1)$ irgend zwei beliebig heraus und bezeichnen sie mit h_i und h_{i+1}, während die Ziffern der dazu gehörigen $(s-1)$-ziffrigen Zahlen von links nach rechts durch die Zeichen

$$1_i,\ 2_i,\ \ldots (s-1)_i \quad \text{und} \quad 1_{i+1},\ 2_{i+1},\ \ldots (s-1)_{i+1}$$

folgen. Infolgedessen liefert die rechte Seite von (12) unter Fortlassung der Nullglieder die Produktsumme

$$\Sigma \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 .. \mathfrak{I}_n C(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 .. \mathfrak{I}_s) C(\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_3 .. \mathfrak{I}_{s+1}) \dots C(\mathfrak{I}_n \mathfrak{I}_1 .. \mathfrak{I}_{s-1}).$$

Dieser Ausdruck ist aber, wenn man die verschiedene Bezeichnung der p-Größen berücksichtigt, nichts andres, als die in (11) angesetzte Summe, stimmt also auch mit der rechten Seite von (10) überein. Folglich wird

$$\mathfrak{D}(u^x, n) = \Sigma[h_1,h_2][h_2,h_3] \dots [h_{n-1},h_n][h_n,h_1], \tag{16}$$

woraus im besonderen noch

$$\mathfrak{D}(u^x, 1) = \Sigma[h_1,h_1],$$
$$\mathfrak{D}(u^x, 2) = \Sigma[h_1,h_2][h_2,h_1],$$
$$\mathfrak{D}(u^x, 3) = \Sigma[h_1,h_2][h_2,h_3][h_3,h_1],$$
usw.

folgt. Wenn es sich um mehrere Argumente x, y, ... handelt, so ist auf der linken Seite von (16) die Potenz u^x durch das Produkt $u^x v^y$ .. zu ersetzen.

18. Die Gleichung (16) ist jetzt weiter umzuformen. Der hierzu dienende Determinantensatz ist, wie ich aus einer freundlichen Mitteilung von Herrn FROBENIUS erfahren habe, bereits von C. W. BORCHARDT auf einem einfachen Wege abgeleitet worden, und zwar in der Abhandlung „Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hilfe man die sekulären Störungen der Planeten bestimmt", (Crelles Journal Band 30). Hier will ich eine andere Herleitung geben, die ebenfalls hinreichend einfach ist.

Es mögen, indem wir für den Augenblick von der Entstehungsweise der Größen $[h,k]$ ganz absehen, die Buchstaben h, k, ... Nummern bedeuten, die von 1 bis zu der beliebig gewählten festen Nummer N zu laufen haben. Ferner setze man in ganz beliebiger Weise die von dem Nummernpaar h, k abhängenden $N \cdot N$ Größen $[h,k]$ an und bilde daraus die zyklischen Produktsummen

$$S(n) = \Sigma[h_1,h_2][h_2,h_3] \dots [h_{n-1},h_n][h_n,h_1], \tag{17}$$

in denen jedes h_i für sich von 1 bis N läuft. Die Nummer h_n tritt in (17) zweimal auf, nämlich einmal als hintere Nummer in $[h_{n-1},h_n]$ und dann als vordere Nummer in $[h_n,h_1]$. Ersetzt

man nun das vordere und das hintere h_n durch die vorläufig als fest gedachten Nummern f und g, so entsteht ein Ausdruck, den wir in der Gestalt

$$S(f,g,n) = \Sigma[h_1,h_2]\ldots[h_{n-1},g][f,h_1] \tag{18}$$

schreiben wollen, wobei die Summation nur noch nach den übrig gebliebenen h-Nummern auszuführen ist. Ferner ist für $n = 1$

$$S(f,g,1) = [f,g]. \tag{19}$$

Will man aus (18) wieder $S(n)$ erhalten, so hat man f für g zu schreiben und rechterhand auch noch nach f zu summieren, d. h. es ist

$$S(n) = \sum_f S(f,f,n). \tag{20}$$

Führt man ferner in (18) die Summation nach h_{n-1} explizite durch und schreibt hierbei für h_{n-1} kurz h, so wird mit der in (18) eingeführten Bezeichnung

$$S(f,g,n) = \sum_h [h,g]S(f,h,n-1). \tag{21}$$

Diese Gleichung gilt für $n = 2, 3, \ldots$ Multipliziert man sie mit t^n und summiert darauf nach n von $n = 2$ an, so entsteht mit der Abkürzung

$$S(f,g) = S(f,g,1)t + S(f,g,2)t^2 + \cdots \tag{22}$$

die Gleichung

$$S(f,g) - tS(f,g,1) = \sum_h [h,g]tS(f,h),$$

woraus mit der weiteren Abkürzung

$$H(h,g) = \mathfrak{e}(h,g) - [h,g]t \tag{23}$$

wegen (19) die Gleichung

$$\sum_h H(h,g)S(f,h) = [f,g]t \tag{24}$$

entspringt. Bildet man nun aus den $N \cdot N$ Elementen $H(h,g)$ die Determinante H nebst den Unterdeterminanten

$$G(f,g) = \partial H : \partial H(f,g)$$

und multipliziert (24) mit $G(f,g)$, so entsteht daraus durch Summation nach g die Gleichung

$$HS(f,f) = \sum_g G(f,g)[f,g]t$$

und weiter durch Summation nach f

$$H\sum_f S(f,f) = \sum_f \sum_g G(f,g)[f,g]t.$$

Andrerseits erhält man, wenn man H nach t differentiiert, die Gleichung

$$dH : dt = -\sum_f \sum_g G(f,g)[f,g],$$

die mit der vorhergehenden verbunden die Beziehung

$$H\sum_f S(f,f) = -dH : d\log t \tag{25}$$

liefert. Ersetzt man endlich noch in (22) die Nummer g durch f und summiert nach f, so entsteht unter Berücksichtigung von (20) der Ausdruck

$$S = \sum_f S(f,f) = S(1)t + S(2)t^2 + \cdots,$$

woraus dann wegen (25) die Darstellung

$$S = \sum_n S(n)t^n = -d\log H : d\log t$$

hervorgeht.

Für $t = 0$ gehen die Elemente $H(h,g)$ in $e(h,g)$ über, d. h. die Elemente der Determinante H werden außerhalb der Diagonale null und nehmen auf der Diagonale den Wert Eins an, so daß $H = 1$ wird. Da nun H, als Funktion von t betrachtet, ein Polynom N-ten Grades ist, so kann man die Zerlegung

$$H = (1 - X_1 t)(1 - X_2 t) \ldots (1 - X_N t)$$

ansetzen, aus der

$$\sum_n S(n)t^n = -d\log H : d\log t = \sum_m [X_m t : (1 - X_m t)]$$

folgt. Entwickelt man jetzt die Brüche rechterhand nach t und spaltet darauf die Gleichung nach den Potenzen von t, so erhält man wegen der in (17) angegebenen Bedeutung von $S(n)$

$$S(n) = \sum [h_1,h_2] \ldots [h_{n-1},h_n][h_n,h_1] = \sum_m X_m^n.$$

Mit den vorstehenden Formeln ist das, was wir zur Umformung von (16) brauchen, bereit gestellt.

19. Kehrt man zu der in (12) angegebenen Bedeutung der Größen $[h,k]$ zurück, so läßt sich die Lösung unserer Aufgabe folgendermaßen fassen. Als Ausgangspunkt dient die mit F Farben gefüllte Urne, ferner die Zugreihe $Z(n)$ nebst der Reihe der innerhalb $Z(n)$ zyklisch gebildeten Gruppen $G(s)$. Zu dem Zeichen $G(s)$

gehören $M = F^s$ Q-adisch geordnete Gruppenformen, denen die Nummern 1 bis M und die Gewichte e_1 bis e_M beigelegt werden. Die mit den e-Gewichten gebildete Formenmenge x besitzt eine gewisse Verteilung $\mathfrak{U}(x,n)$ nebst der Durchschnittsgleichung

$$\mathfrak{D}(u^x,n) = \sum_x \mathfrak{U}(x,n)u^x,$$

worin die Summation über alle zulässigen Werte von x auszudehnen ist. Die vorstehenden Größen lassen sich vermittelst der Gleichung

$$(26) \qquad \sum_n \mathfrak{D}(u^x,n)t^n = \sum_n \sum_x \mathfrak{U}(x,n)u^x t^n = -d\log H : d\log t$$

aus einer erzeugenden Funktion H herleiten. Um H zu bilden setzt man das System der C-Größen an, deren Anzahl M ist, ferner stellt man die Reihe der $(s-1)$-ziffrigen Q-adischen Zahlen nebst ihren von 1 bis $N = F^{s-1}$ laufenden Nummern auf und erhält damit nach der Vorschrift von (12) die $N \cdot N$ Ausdrücke $[h,k]$ nebst den $N \cdot N$ Verbindungen

$$(27) \qquad H(h,k) = \mathfrak{e}(h,k) - [h,k]t,$$

in denen t einen willkürlichen Parameter bedeutet. Die aus den Elementen $H(h,k)$ zusammengesetzte Determinante ist das gesuchte H. Außerdem liefern die in der Zerlegung

$$(28) \qquad H = (1 - X_1 t)(1 - X_2 t)\dots(1 - X_N t)$$

auftretenden Wurzelgrößen X_m den Ausdruck

$$(29) \qquad \mathfrak{D}(u^x,n) = X_1^n + X_2^n + \cdots + X_N^n.$$

Damit sind die Grundformeln der Lösung gegeben.

Wenn es sich um eine mehrmalige Auszählung der Zugreihen $Z(n)$ mit den Argumenten $x, y, \dots$ handelt, so treten die Verteilungszahlen $\mathfrak{U}(x,y,\dots,n)$ nebst dem Durchschnitt

$$\mathfrak{D}(u^x v^y \dots, n) = \sum \mathfrak{U}(x,y,\dots,n)u^x v^y \dots$$

auf. Ferner ändert sich in der früher angegebenen Weise die Zusammensetzung der C-Größen, dagegen bleibt die Bildungsweise der $[h,k]$ nebst dem System der Grundgleichungen (26) bis (29) ungeändert.

Am Schlusse der Rechnung sind die C-Größen durch Ausdrücke von der Gestalt u^e oder $u^e v^f \dots$ zu ersetzen, worin die Exponenten die den C-Größen entsprechenden Gewichte bedeuten.

20. Um die Gestalt der Lösung noch deutlicher zu machen, mögen die Bestimmungsstücke von H für die einfachsten Fälle zusammengestellt werden. Hierbei genügt es, nur die Größen $[h,k]$ und zwar nach Art einer Determinante geordnet herzusetzen, weil man damit sofort den Ausdruck für H hinschreiben kann. Ferner soll zur Abkürzung statt der Farbe p_h einfach die Nummer h, und statt der C-Größe, die zu der Form G_h gehört, einfach (h) geschrieben werden. Man erhält dann die nachstehenden, unmittelbar verständlichen Tabellen.

Formen von $G(2)$ für $F = 2$

11, 12, 21, 22

Formen von $G(3)$ für $F = 2$

111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222

Formen von $G(4)$ für $F = 2$

1111, 1112, 1121, 1122, 1211, 1212, 1221, 1222
2111, 2112, 2121, 2122, 2211, 2212, 2221, 2222

Formen von $G(2)$ für $F = 3$

11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33

Formen von $G(3)$ für $F = 3$

111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133
211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233
311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333

Aus diesen Formenreihen läßt sich die zu jeder Form gehörige Nummer sofort entnehmen. Die entsprechenden Systeme der $[h,k]$ nehmen dann folgende Gestalt an.

$F = 2$ und $G(2)$

$$\begin{matrix} 1(1) & 1(2) \\ 2(3) & 2(4) \end{matrix}$$

$F = 2$ und $G(3)$

$$\begin{matrix} 1(1) & 1(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1(3) & 1(4) \\ 2(5) & 2(6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(7) & 2(8) \end{matrix}$$

$F = 2$ und $G(4)$

1(1)	1(2)	0	0	0	0	0	0
0	0	1(3)	1(4)	0	0	0	0
0	0	0	0	1(5)	1(6)	0	0
0	0	0	0	0	0	1(7)	1(8)
2(9)	2(10)	0	0	0	0	0	0
0	0	2(11)	2(12)	0	0	0	0
0	0	0	0	2(13)	2(14)	0	0
0	0	0	0	0	0	2(15)	2(16)

$F = 3$ und $G(2)$

1(1)	1(2)	1(3)
2(4)	2(5)	2(6)
3(7)	3(8)	3(9)

$F = 3$ und $G(3)$

1(1)	1(2)	1(3)	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1(4)	1(5)	1(6)	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1(7)	1(8)	1(9)
2(10)	2(11)	2(12)	0	0	0	0	0	0
0	0	0	2(13)	2(14)	2(15)	0	0	0
0	0	0	0	0	0	2(16)	2(17)	2(18)
3(19)	3(20)	3(21)	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3(22)	3(23)	3(24)	0	0	0
0	0	0	0	0	0	3(25)	3(26)	3(27)

Multipliziert man in diesen Größensystemen jedes Glied mit $-t$ und fügt dann in den Diagonalgliedern $+1$ hinzu, so entstehen die Determinanten H.

21. Die vorstehend aufgeführten Sonderfälle lassen die Bildungsweise von H bereits deutlich erkennen, und man übersieht ohne weiteres, wie sich die p_a nebst den C-Größen und den Nullwerten der $[h,k]$ innerhalb der Determinante H gruppieren. Hat man es mit niedrigen Gruppen und kleinen Werten von F und n zu tun, so bietet es keine besondere Schwierigkeit, H auszurechnen und die in (26) geforderte Entwickelung von $\log H$ nach t auszuführen. In den übrigen Fällen wird dagegen die direkte Berechnung von H umständlich, so daß es sich empfiehlt, noch andere Beziehungen aufzusuchen, die für die numerische Rechnung herangezogen werden können. Hierbei liegt eine gewisse Erleichterung in dem Umstande, daß es für gewöhnlich gar nicht

auf die Größen $\mathfrak{U}(x,n)$, sondern nur auf die niedrigsten numerischen Elemente der betrachteten Verteilung ankommt. Letztere lassen sich aber, wie wir sehen werden, ermitteln, ohne daß man den vollständigen Ausdruck von H kennt.

Für $t = 0$ nimmt H, wie sich in Artikel 16 ergab, den Wert Eins an. Daher liefert (26), wenn man von $t = 0$ an integriert, die Gleichung

$$\sum_n n^{-1}\mathfrak{D}(u^x,n)t^n = -\log H. \tag{30}$$

Setzt man hierin $u = 1$, so gehen die $\mathfrak{D}$-Größen sämtlich in den Wert Eins über, und man erhält linkerhand die Reihe für $-\log(1-t)$, so daß darnach H für $u = 1$ den Wert $1 - t$ besitzt. Soll dieser Wert nun auch in (28) zum Vorschein kommen, so müssen für $u = 1$ die Größen X_m bis auf eine, die den Wert Eins annimmt, sämtlich verschwinden. Dieses für $u = 1$ eintretende Verhalten soll jetzt näher untersucht werden.

22. Der Ausdruck H ist eine Determinante von der Ordnung $N = F^{s-1}$ und liefert deshalb ein Polynom von t, dessen Grad im allgemeinen ebenfalls gleich N ist. Da jedoch dieser Grad unter Umständen nicht erreicht wird, so wollen wir den wirklichen Grad von H mit q bezeichnen und demgemäß statt (28) die Gleichung

$$H = (1 - X_1 t)\dots(1 - X_q t) \tag{31}$$

und entsprechend statt (29) die Gleichung

$$\mathfrak{D}(u^x,n) = X_1^n + \cdots + X_q^n \tag{32}$$

hinschreiben. Dieser Ansatz kommt darauf hinaus, daß in (28) und (29) unter den Größen X_m solche vorkommen können, die identisch verschwinden und deshalb von vornherein beiseite bleiben dürfen.

Beschränkt man sich, was hier ausreicht, auf den Fall einer einmaligen Auszählung mit den Gewichten e_h, so tritt in H außer t auch noch der Parameter u auf, weil ja jede C-Größe, der ein Gewicht e zukommt, schließlich durch die Potenz u^e zu ersetzen ist. Setzt man nun $u = 1 + w$ und entwickelt H nach Potenzen von w, so erhält man eine Darstellung von der Form

$$H = H_0 + H_1 w + H_2 w^2 + \cdots, \tag{33}$$

worin der Koeffizient H_0 die Gestalt $1 - t$ besitzt, weil für $w = 0$ oder $u = 1$ der Ausdruck H, wie wir gesehen haben, den Wert

$1 - t$ annimmt. Die übrigen Koeffizienten sind Polynome von t, deren Grad nicht über q hinausgeht und diesen Wert mindestens bei einem Gliede von (33) wirklich erreicht, da andernfalls H nicht vom q-ten Grade nach t sein würde. Ferner sind die Koeffizienten $H_1, H_2, \ldots$ durch t teilbar, weil für $t = 0$ die Determinante H, wie wir wissen, den Wert Eins annimmt. Im übrigen liefert die Entwickelung nach w eine endliche oder unendliche Reihe, je nachdem die Gewichte durchweg positive ganze Zahlen sind oder nicht.

23. Ersetzt man in (31) und (33) den Parameter t durch $1 : X$ und multipliziert darauf mit X^q, so entsteht ein Polynom von X, das wir in der Gestalt

$$\begin{aligned} K(X) &= (X - X_1)(X - X_2)\ldots(X - X_q) \\ &= K_0 + K_1 w + K_2 w^2 + \cdots \end{aligned} \tag{34}$$

schreiben wollen. Hierin erscheinen die X_m als die Wurzeln von $K(X)$; ferner wird

$$K_0 = X^{q-1}(X - 1), \tag{35}$$

während die übrigen Koeffizienten Polynome von X darstellen, die höchstens vom Grade $q - 1$ sind, und von denen mindestens eines für $X = 0$ nicht verschwindet. Für $w = 0$ wird

$$K(X) = K_0 = X^{q-1}(X - 1),$$

d. h. für $w = 0$ wird eine der Wurzeln — wir wollen sagen die Wurzel X_1 — gleich Eins, während die andern unter sich und mit dem Werte Null zusammenfallen.

Für die Darstellung der Wurzeln entnimmt man aus der Theorie der algebraischen Funktionen zunächst den Satz, daß die Wurzel X_1, weil sie für $w = 0$ nur einfach auftritt, für ein hinreichend kleines w in eine Potenzreihe von der Gestalt

$$X_1 = 1 + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots \tag{36}$$

entwickelt werden kann. Bei den übrigen Wurzeln hingegen kommt man im allgemeinen auf Reihen, die nach gebrochenen Potenzen von w fortschreiten und in der Gestalt

$$X_m = a_1 W + a_2 W^2 + \cdots \tag{37}$$

geschrieben werden können, wobei $W^c = w$ und c eine gewisse ganze positive Zahl ist. Bei der vorliegenden Frage kommt es

nun wesentlich auf das Glied an, mit dem die Reihe (37) wirklich beginnt, und das auf folgende Art gefunden wird.

24. Macht man die für unseren Zweck ausreichende Voraussetzung, daß w unendlich kleine Werte besitzt, so darf man die Reihe (37) auf ihr niedrigstes Glied beschränken und demgemäß X_m in der Gestalt Rw^r ansetzen, wo r wesentlich positiv, R hingegen endlich und von Null verschieden ist. Besitzt ferner in (34) die niedrigste Potenz von X, die in dem Koeffizienten K_h auftritt, den Exponenten k_h, so werden, wenn man für X den Ausdruck Rw^r einsetzt, die einzelnen Terme von (34) in bezug auf w von der Ordnung

$$0 + rk_0, \quad 1 + rk_1, \quad 2 + rk_2, \quad 3 + rk_3, \ldots.$$

Von diesen Ordnungszahlen müssen nun mindestens zwei für die betrachtete Wurzel zusammenfallen, da andernfalls die Bedingung $K = 0$ das Verschwinden von R nach sich ziehen würde, d. h. der Exponent r muß einer Gleichung von der Form

$$h + rk_h = i + rk_i \quad \text{oder} \quad h - i = r(k_i - k_h)$$

genügen. Hierbei sind aber die Zahlenwerte von $h - i$ mindestens gleich Eins, andrerseits die Zahlenwerte von $k_i - k_h$ höchstens gleich $q - 1$. Folglich liegt r sicher nicht unterhalb des reziproken Wertes von $q - 1$. Oder anders ausgedrückt: jede durch (37) ausgedrückte Wurzel ist nach w von einer bestimmten Größenordnung r, und es liegt der niedrigste hierbei vorkommende Wert von r, der mit a bezeichnet werden möge, nicht unterhalb des Bruches $1 : (q - 1)$.

Nach diesen Bemerkungen läßt sich der in (32) angesetzte Ausdruck von $\mathfrak{D}(u^x, n)$ in zwei Bestandteile I und II spalten, die nach w von verschiedener Ordnung sind, nämlich in

$$\mathrm{I} = X_1^n, \quad \text{und} \quad \mathrm{II} = X_2^n + \cdots + X_q^n.$$

Von diesen beiden Bestandteilen ist I eine gewöhnliche Potenzreihe von w mit dem Anfangsgliede 1, während der Bestandteil II, der sich im allgemeinen aus Reihen mit gebrochenen Potenzen von w zusammensetzt, nach w mindestens von der Ordnung na wird. Ist na ein wirklicher Bruch, so liegt die Ordnung von II tatsächlich oberhalb na, denn die gebrochenen Potenzen in II müssen sich bei gehöriger Reduktion herausheben, weil in

$$\mathfrak{D}(u^x, n) = \mathrm{I} + \mathrm{II} \tag{38}$$

die linke Seite und ebenso das Glied I nur ganze Potenzen von w enthält. Hieraus ergibt sich dann weiter, daß man bei der Berechnung von $\mathfrak{D}(u^x,n)$ den Ausdruck

$$\mathfrak{D}(u^x,n) = \mathrm{I} = X_1^n \tag{39}$$

zugrunde legen darf, sobald in der $\mathfrak{D}$-Größe nur die Glieder gebraucht werden, die nach w unterhalb der Ordnung na bleiben. Ein solcher Fall tritt nun aber ein, wenn für größere Werte von n die numerischen Elemente der betrachteten Verteilung in dem gewöhnlich vorkommenden Umfange aufgesucht werden sollen. Entwickelt man nämlich auf Grund der Gleichungen

$$w = u - 1 = \exp U - 1$$

die rechten Seiten von (38) und (39) nach U, so ist zunächst der Bestandteil II nach U mindestens von der Ordnung na. Differentiiert man ferner m-mal nach U und setzt darauf $U = 0$, so erhält man linkerhand den Ausdruck $\mathfrak{D}(x^m,n)$, der für $m = 1, 2, \ldots$ die Grundlage zur Berechnung der numerischen Elemente bildet. Rechterhand liefert, solange $m < na$ ist, der Bestandteil II sicher den Beitrag Null, d. h. die abgekürzte Formel (39) genügt sicher zur Berechnung der numerischen Elemente bis zur Ordnung m hin, wenn n so groß ist, daß na oberhalb m liegt. Die hierzu nötigen Formeln lassen sich folgendermaßen einrichten.

25. Wir wollen annehmen, daß man für H oder $K(X)$ auf irgend eine Weise die Entwicklung nach w bis zur Ordnung m hin hergestellt habe. Dann läßt sich daraus für die Wurzel X_1 die Darstellung

$$X_1 = 1 + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots$$

ebenfalls bis zur Ordnung m hin herleiten. Hiermit sei dann die Reihe

$$\log X_1 = B_1 w + B_2 w^2 + \cdots$$

nebst den Koeffizienten

$$B_1 = A_1,$$

$$B_2 = A_2 - \tfrac{1}{2} A_1^2,$$

$$B_3 = A_3 - A_1 A_2 + \tfrac{1}{3} A_1^3,$$

$$B_4 = A_4 - A_1 A_3 - \tfrac{1}{2} A_2^2 + A_1^2 A_2 - \tfrac{1}{4} A_1^4,$$

usw.

abgeleitet worden. Daraus erhält man weiter mit $w = \exp U - 1$ die Entwicklung

$$\log X_1 = C_1 U + C_2 U^2 + \cdots,$$

worin

$$\begin{aligned} C_1 &= B_1, \\ 2C_2 &= B_1 + 2B_2, \\ 6C_3 &= B_1 + 6B_2 + 6B_3, \\ 24C_4 &= B_1 + 14B_2 + 36B_3 + 24B_4, \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

oder nach Elimination der B-Größen

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1, \\ 2C_2 &= A_1(1 - A_1) + 2A_2, \\ 6C_3 &= A_1(1 - A_1)(1 - 2A_1) + 6A_2(1 - A_1) + 6A_3, \\ 24C_4 &= A_1(1 - A_1)(1 - 6A_1 + 6A_1^2) + A_2(14 - 36A_1 + 24A_1^2) \\ &\quad + A_3(36 - 24A_1) + 24A_4 - 12A_2^2, \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

wird. Weiter möge statt der Formenmenge x als Argument die Größe $z = x : n$ eingeführt werden, die man gegenüber der für die ganze Zugreihe $Z(n)$ geltenden „absoluten" Menge x als die „relative", d. h. für die einzelne Gruppe $G(s)$ geltende, Menge ansehen kann. Dann läßt sich die Gleichung (39) unter Fortlassung des für den Augenblick entbehrlichen Index n logarithmisch in der Gestalt

$$\log \mathfrak{D}[\exp(nzU)] = n \log X_1 = nC_1 U + nC_2 U^2 + \cdots$$

schreiben. Daraus entsteht, wenn die Glieder mit U und U^2 nach links genommen werden, die Gleichung

$$\log \mathfrak{D}[\exp(nzU - nC_1 U - nC_2 U^2)] = nC_3 U^3 + nC_4 U^4 + \cdots.$$

Geht man vom Logarithmus wieder zum Numerus über und führt hierbei die Parameter c und h nebst der Veränderlichen V durch die Gleichungen

$$c = C_1, \quad 4h^2 C_2 = n, \quad nU = -2hV, \quad nC_2 U^2 = V^2$$

ein, so wird

$$\mathfrak{D}[\exp(-2h(z - c)V - V^2)] = 1 + nC_3 U^3 + nC_4 U^4 + nC_5 U^5 + \left(nC_6 + \tfrac{1}{2} n^2 C_3^2\right) U^6 + \cdots.$$

Führt man endlich noch die für die numerischen Elemente nötigen $\mathfrak{R}$-Polynome auf Grund der Entwicklung

$$\exp(-2yV - V^2) = \mathfrak{R}(y)_0 + \mathfrak{R}(y)_1(2V) + \mathfrak{R}(y)_2(2V)^2 + \cdots$$

ein, so erhält man mit $y = h(z - c)$ die Ausdrücke

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_0) = 1, \quad \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1) = 0, \quad \mathfrak{D}(\mathfrak{R}_2) = 0,$$

$$(40)\quad n^3\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_3) = -C_3h^3, \quad n^3\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_4) = C_4h^4, \quad n^4\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_5) = -C_5h^5,$$

$$(41)\quad n^5\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_6) = \left(C_6 + \tfrac{1}{2}nC_3^2\right)h^6, \quad \text{usw.}$$

Da die Durchschnitte $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_1)$ und $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_2)$ verschwinden, so gehören die Werte c und h der Normalform an, und man erhält für die beiden niedrigsten Elemente die Ausdrücke

$$(42)\quad \mathfrak{D}(z) = c = C_1 = A_1, \quad n\,\mathrm{str}(z)^2 = 2C_2 = A_1(1 - A_1) + 2A_2.$$

Nach Ausweis dieser Formeln gehen die numerischen Elemente, mit Ausnahme von $\mathfrak{D}(z)$, gegen Null, wenn man n unbegrenzt wachsen läßt.

26. Die Ähnlichkeit der vorstehenden Entwicklung mit dem BERNOULLISCHEN Urnenschema ist in die Augen springend. Setzt man das BERNOULLISCHE Schema mit den beiden Farben p und q und für n Züge an, so gilt für die Verteilung der Züge mit der Farbe p die Grundgleichung

$$\mathfrak{D}(u^x, n) = (pu + q)^n = (1 + pw)^n.$$

Sucht man hieraus nach der Gleichung

$$\sum_n \mathfrak{D}(u^x, n)t^n = -d\log H : d\log t$$

den Ausdruck für H auf, so wird

$$H = 1 - (pu + q)t = 1 - t - pwt.$$

Es tritt also nur eine einzige Wurzel X_m auf, nämlich

$$X_1 = pu + q = 1 + pw,$$

die für $u = 1$, wie es sein muß, den Wert Eins annimmt. Ferner gelten für die relative Häufigkeit $z = x : n$ die Ausdrücke

$$(43)\qquad \mathfrak{D}(z) = p, \quad n\,\mathrm{str}(z)^2 = p(1 - p).$$

Sind die Gewichte für die Auszählung der Gruppen so gewählt worden, daß in (42) die Größe A_1 als eine Wahrscheinlichkeit gedeutet werden darf, so kann man der Gruppenverteilung die

Verteilung des BERNOULLIschen Schemas als eine Art Vergleichsnorm gegenüberstellen, wobei dann für p der Wert A_1 anzusetzen ist. In diesem Falle gibt offenbar der Bestandteil $2A_2$ in (42) an, wie groß bei dem Werte von $n\,\mathrm{str}(z)^2$ die Abweichung von der durch (43) ausgedrückten Norm ist.

Wenn bei der Auszählung der Gruppen $G(s)$ in der Zugreihe $Z(n)$ als Gewiehte nur die Zahlen Null und Eins benutzt werden, so bedeuten x und z die absolute und die relative Häufigkeit der günstigen Fälle, d. h. der zählenden Formen. Man darf also bei derartigen Auszählungen die Größen z und A_1 stets als Wahrscheinlichkeiten auffassen.

27. Zur Erläuterung des Bisherigen soll ein Beispiel benutzt werden, das sich nicht erheblich von einer Aufgabe unterscheidet, die Herr VON SEELIGER in der Abhandlung „Über die Verteilung der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler" (Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. bayr. Akademie d. W. 1889) behandelt hat.

Die n Züge z_k mögen ebensoviele Beobachtungsfehler bedeuten, die nach einem gewissen Beobachtungsmodus und unabhängig voneinander zustande gekommen sind. Trägt man diese Fehler nach der zeitlichen Folge der Beobachtungen auf dem Kreise ein, so kann man die Gruppierung der Vorzeichen innerhalb der Reihe zum Gegenstande der Untersuchung machen und im besonderen nach der Verteilung der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen fragen. Berücksichtigt man hierbei auch den gelegentlich auftretenden Fehlerwert Null, so hat man es bei der paarweisen Zusammenfassung der Züge mit den neun Fällen

$$++,\quad +-,\quad +0,\quad -+,\quad --,\quad -0,\quad 0+,\quad 0-,\quad 00$$

zu tun. Man wird also auf das Schema $G(2)$ und auf drei Farben p_1, p_2, p_3 geführt, die den drei Zeichen Plus, Minus und Null entsprechen. Beschränkt man sich bei der Ansetzung der Gewichte auf die Werte Eins und Null, so hat für zwei beliebig gewählte Farben a und b das Zeichen $E(ab)$ je nach den Umständen den Wert Eins oder Null anzunehmen. Entsprechend besitzt das Zeichen $C(ab)$ den Wert u oder 1, wenn man sich mit der einmaligen Auszählung der Zugreihen begnügt. Man darf infolgedessen

$$C(ab) = 1 + (u - 1)E(ab) = 1 + wE(ab)$$

setzen. Schreibt man der Kürze halber einstweilen $E(hk)$ statt

$E(p_h p_k)$, so erscheinen die Größen $H(h,k)$, aus denen sich die Determinante H zusammensetzt, in der Gestalt

$$H(h,k) = \mathfrak{e}(h,k) - tp_h C(p_h p_k) = \mathfrak{e}(h,k) - tp_h - twp_h E(hk),$$

liefern also für H das Elementensystem

$$\begin{array}{lll} 1 - tp_1 - twp_1 E(11), & -tp_1 - twp_1 E(12), & -tp_1 - twp_1 E(13) \\ -tp_2 - twp_2 E(21), & 1 - tp_2 - twp_2 E(22), & -tp_2 - twp_2 E(23) \\ -tp_3 - twp_3 E(31), & -tp_3 - twp_3 E(32), & 1 - tp_3 - twp_3 E(33). \end{array}$$

Um die hieraus gebildete Determinante zu entwickeln, denken wir uns mit den Elementen $E(hk)$ die Determinante E nebst den Unterdeterminanten

$$e(hk) = \partial E : \partial E(hk)$$

hergestellt und bezeichnen für den Augenblick durch das Summenzeichen eine zyklisch über die drei Farben p_1, p_2, p_3 ausgeführte Summation. Dann wird unter Berücksichtigung der Relation $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$$(44) \qquad H = 1 - t - (A + A't)tw - (B + B't)t^2 w^2 - Ct^3 w^3,$$

worin

$$\begin{aligned} A &= \Sigma p_1 E(11), \\ A' &= -\Sigma p_1(p_2 + p_3)E(11) + \Sigma p_2 p_3 E(23) + \Sigma p_2 p_3 E(32), \\ B &= -\Sigma p_2 p_3 e(11), \\ B' &= p_1 p_2 p_3 \Sigma e(11) + p_1 p_2 p_3 \Sigma e(23) + p_1 p_2 p_3 \Sigma e(32), \\ C &= p_1 p_2 p_3 E \end{aligned}$$

ist. Führt man nun in der Bedingung $H = 0$ statt t die Unbekannte $t = 1 : X$ ein, so liefert die Bedingung $HX = 0$ die Gleichung

$$X - 1 = (A + A'X^{-1})w + (BX^{-1} + B'X^{-2})w^2 + CX^{-2}w^3.$$

Hierzu ist die in Artikel 25 gebrauchte Wurzel

$$X_1 = 1 + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots$$

zu suchen, wobei man die Lagrangesche Reihe oder die Methode der unbestimmten Koeffizienten oder irgend ein andres geeignetes Verfahren anwenden kann. Man erhält dann für die beiden gewöhnlich ausreichenden Glieder

$$(45) \qquad \begin{aligned} A_1 &= A + A' = \Sigma p_1 p_1 E(11) + \Sigma p_2 p_3 E(23) + \Sigma p_2 p_3 E(32), \\ A_2 &= B + B' - A'(A + A') = B + B' - A'A_1. \end{aligned}$$

Da H nach t höchstens vom dritten Grade wird, so ist für $n > 4$ die Anwendung der Formeln (42) sicher statthaft. Ist B' und C null, so wird H vom zweiten Grade. In diesem Falle genügt es zur Gültigkeit von (42), daß $n > 2$ ist.

28. Da man für jedes der neun Gewichte $E(hk)$ nach Belieben den Wert Null oder Eins ansetzen kann, so gehören zu der Formel (44) im ganzen 2^9 oder 512 einzelne Fälle, deren Anzahl sich allerdings durch gewisse Überlegungen stark reduzieren läßt. Zunächst können nämlich die beiden Fälle beiseite bleiben, in denen die Gewichte sämtlich gleich Null oder sämtlich gleich Eins sind, da ja hierbei die Formenmenge beständig den Wert Null oder n annimmt. Wenn ferner zwei Gewichtssysteme $E(hk)$ und $F(hk)$ so beschaffen sind, daß durchweg

$$E(hk) + F(hk) = 1$$

wird, so genügen die zugehörigen Formenmengen von x und y innerhalb jeder Zugreihe der Gleichung $x + y = n$. Man kann daher nach den Sätzen über die Transformation der Argumente die Verteilung von y sofort angeben, wenn man die von x kennt, und umgekehrt. Infolgedessen ist es z. B. bei der vorliegenden Aufgabe gleichgültig, ob man von den neun Formen sämtliche Farbenwechsel oder sämtliche Farbenfolgen zählt. Daraus ergibt sich dann weiter, daß man mit der Anzahl der von Null verschiedenen Gewichte nicht über die halbe Formenanzahl, d. h. also hier nicht über 4 hinauszugehen braucht.

29. Eine andere Reduktion erhält man aus folgendem Umstande. Wenn zwei Gewichtssysteme so beschaffen sind, daß sie durch eine mit den Farben vorgenommene Vertauschung ineinander übergehen, so gehen durch dieselbe Vertauschung auch die zugehörigen Ausdrücke von H nebst den daraus folgenden Formeln ineinander über. Setzt man z. B. alle Gewichte bis auf $E(11)$ gleich Null, so wird in (44)

$$A = p_1, \quad A' = p_1(p_1 - 1), \quad B = B' = C = 0.$$

Daraus ergeben sich sofort die entsprechenden Formeln für die Zählung von p_2p_2 oder p_3p_3, wenn man p_1 mit p_2 oder p_3 vertauscht.

Eine dritte Reduktion ergibt sich, wenn man die Wirkung beachtet, welche die Umkehrung der Zugreihen ausübt. Man denke sich sämtliche Formen hingeschrieben, welche die Zugreihe

$Z(n)$ mit den gegebenen Farben annehmen kann, und ordne jedem Gliede Z dieser Formenreihe eine Zugreihe Z' zu, die aus Z dadurch entsteht, daß man die Züge von Z in umgekehrter Reihenfolge, also in der Ordnung z_n bis z_1 statt z_1 bis z_n hinschreibt. Dann stimmen diese beiden Formenreihen, von der Anordnung der Glieder abgesehen, überein, denn es liefert auch jedes Glied Z' durch Umkehrung seiner Zugfolge wieder ein Glied Z. Dieselbe Bemerkung gilt von den Gruppen $G(s)$, die sich innerhalb der einzelnen Zugreihen bilden lassen. Enthält nämlich das Glied Z eine bestimmte Gruppe G, so enthält das zugehörige Z' die Gruppe G', die durch Umkehrung von G entsteht. Da ferner die relative Häufigkeit, mit der die einzelnen Formen von $Z(n)$ und $G(s)$ in den theoretischen Verteilungen auftreten, jedesmal durch das Produkt der darin vorkommenden p-Größen gegeben ist, und da überdies der Wert dieses Produktes durch die Zugumkehrung nicht geändert wird, so folgt, daß je zwei Gruppen oder auch je zwei Gruppenkombinationen dieselbe Verteilung besitzen, wenn sie durch die betrachtete Umkehrung ineinander übergeführt werden können. So ist es z. B. bei der vorliegenden Aufgabe gleichgültig, ob man die Formen

$$p_1p_1,\quad p_2p_2,\quad p_1p_3 \quad \text{oder} \quad p_1p_1,\quad p_2p_2,\quad p_3p_1$$

vereint zählt, da die beiden Fälle durch Umkehrung der Zugfolge ineinander übergehen.

Durch die angegebenen Kunstgriffe läßt sich in (44), wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll, die ursprüngliche Anzahl von 512 Fällen auf 36 herunterbringen. Ich will die verbleibenden Fälle nicht weiter verfolgen, sondern nur noch den Grenzfall betrachten, der für $p_3 = 0$ eintritt.

30. Es handelt sich jetzt, wenn die dritte Farbe fortfällt, um die Gruppen $G(2)$ für zwei Farben, die der Einfachheit halber nunmehr mit p und q bezeichnet werden mögen. Die Formenreihe setzt sich dann aus den vier Gruppen

$$pp,\quad pq,\quad qp,\quad qq$$

zusammen, die nach Belieben einzeln oder vereint zu zählen sind. Durch Anwendung der vorhin beschriebenen Reduktionen gelangt man zunächst dahin, daß von den 16 Fällen, die ursprünglich auftreten, nur die vier Fälle

$$pp,\quad pq,\quad pp \text{ und } pq,\quad pp \text{ und } qq$$

zu berücksichtigen sind. Hiervon läßt sich aber auch noch der dritte Fall streichen, denn die vereinte Zählung von pp und pq ist gleichbedeutend mit der Zählung von p allein, führt also auf das BERNOULLIsche Schema, das von vornherein beiseite bleiben darf. Die Determinante H setzt sich aus den Elementen

$$1 - tp - twpE(pp), \quad -tp - twpE(pq)$$
$$-tq - twqE(qp), \quad 1 - tq - twqE(qq)$$

zusammen, so daß

$$H = 1 - t - (A + A't)tw - Bt^2w^2,$$
$$A = pE(pp) + qE(qq),$$
$$A' = -pq[E(pp) - E(pq) - E(qp) + E(qq)],$$
$$B = -pq[E(pp)Eqq) - E(pq)E(qp)]$$

wird. Da ferner H nach t vom zweiten Grade ist, so besteht die Zerlegung

$$H = (1 - X_1t)(1 - X_2t),$$

aus der

$$X_1 + X_2 = 1 + Aw, \quad X_1X_2 = -A'w - Bw^2$$

folgt. Hiermit erhält man für die drei übrig gebliebenen Fälle die nachstehende unmittelbar verständliche Tabelle.

Fall	I	II	III
Formen	pp	pq	pp und qq
Gewichte	1, 0, 0, 0	0, 1, 0, 0	1, 0, 0, 1
A	p	0	1
A'	$-pq$	pq	$-2pq$
B	0	0	$-pq$
$X_1 + X_2$	$1 + pw$	1	$1 + w$
X_1X_2	pqw	$-pqw$	$2pqw + pqw^2$

Diese drei Fälle sollen jetzt einzeln durchgerechnet werden.

31. Wenn bei einer Verteilung die möglichen Argumentwerte auf endliche ganze Zahlen beschränkt sind, so läßt sich die Verteilung ihrer äußeren Form nach stets auf das POISSONsche Schema reduzieren. Diese Umwandlung kann an der Hand der Grundgleichung

(46) $$\mathfrak{D}(u^x, n) = X_1^n + X_2^n$$

bei der vorliegenden Aufgabe unschwer durchgeführt werden. Schreibt man zur Abkürzung

$$h = \pi : 2n, \quad h_s = (2s - 1)h$$

und läßt für den Augenblick den Index n fort, so erhält man aus (46), je nachdem n von der Gestalt $2r$ oder $2r + 1$ ist, durch eine bekannte Zerlegung die Darstellungen

$$\mathfrak{D}(u^x) = \prod_s [(X_1 + X_2)^2 - 4 X_1 X_2 \cos h_s^2]$$

$$\mathfrak{D}(u^x) = (X_1 + X_2) \prod_s [(X_1 + X_2)^2 - 4 X_1 X_2 \cos h_s^2],$$

wo die Nummer s in den Produkten rechterhand jedesmal von 1 bis r zu laufen hat.

In dem Falle III ergeben sich hieraus nach der vorhin aufgestellten Tabelle die beiden Darstellungen

$$\mathfrak{D}(u^x) = \Pi [u^2 - 4pq(u^2 - 1) \cos h_s^2],$$

$$\mathfrak{D}(u^x) = u \Pi [u^2 - 4pq(u^2 - 1) \cos h_s^2],$$

die mit den Abkürzungen

$$p_s = 1 - 4pq \cos h_s^2, \qquad q_s = 4pq \cos h_s^2$$

in

$$\mathfrak{D}(u^x) = \Pi (p_s u^2 + q_s), \qquad \mathfrak{D}(u^x) = u \Pi (p_s u^2 + q_s)$$

übergehen. Hiernach treten von den Zahlen 0 bis n, die bei einem Versuche $Z(n)$ für gewöhnlich als Werte des Arguments x möglich sind, in Wirklichkeit nur die geraden (ungeraden) auf, wenn n gerade (ungerade) ist. Setzt man nun für $n = 2r$

$$x = 2rz, \quad u^2 = v,$$

so wird

$$\mathfrak{D}(v^{rz}) = (p_1 v + q_1) \ldots (p_r v + q_r).$$

Dies ist aber die Grundformel für ein POISSONsches Schema mit r Zügen, da die Größen p_s und q_s reelle positive echte Brüche sind. Ebenso erhält man für $n = 2r + 1$ mit

$$x = 1 + 2rz, \quad u^2 = v$$

die Darstellung

$$\mathfrak{D}(v^{rz}) = (p_1 v + q_1) \ldots (p_r v + q_r),$$

also wiederum ein POISSONsches Schema mit r Zügen.

In dem Falle II entsteht auf ähnliche Weise, für $n = 2r$ und $n = 2r + 1$ gemeinsam, die Darstellung

$$\mathfrak{D}(u^x) = \Pi [1 + 4pq(u - 1) \cos h_s^2],$$

die mit den Abkürzungen

$$p_r = 4pq\cos h_r^2, \quad q_r = 1 - 4pq\cos h_r^2$$

für $x = rz$ in

$$\mathfrak{D}(u^{rz}) = (p_1 u + q_1)\ldots(p_r u + q_r)$$

übergeht, also ein POISSONsches Schema von r Zügen liefert.

In dem Falle I erhält man trinomische Faktoren von der Gestalt

$$(pu + q)^2 - 4pq(u - 1)\cos h_r^2.$$

Zerlegt man diese in lineare Faktoren von der Form $au + b$, so wird der Quotient $a : b$ imaginär. Infolgedessen hat die Reduktion auf das POISSONsche Schema nur eine rein formale Bedeutung.

Es ist vielleicht nicht überflüssig darauf hinzuweisen, daß in dem Falle III die ursprüngliche Verteilung in dem Intervall von $x = 0$ bis $x = n$ abwechselnd volle und leere Argumente aufweist, und daß bei dem Übergange auf das POISSONsche Schema die leeren Argumente unterdrückt werden.

32. Man könnte die gefundene Zerlegung von $\mathfrak{D}(u^z, n)$ dazu benutzen, um die numerischen Elemente nach den Formeln des gewöhnlichen Urnenschemas zu berechnen. Es ist jedoch bequemer, mit den in Artikel 25 entwickelten Formeln zu arbeiten.

Wird zur Abkürzung

$$r = p - q = 2p - 1 = 1 - 2q, \quad s = pq$$

gesetzt, so ist im Falle I

$$X_1 + X_2 = 1 + pw, \quad X_1 X_2 = sw,$$
$$2X_1 = 1 + pw + \sqrt{(1 + 2prw + p^2w^2)}.$$

Daraus folgt mit Unterdrückung der Zwischenrechnung für die in Artikel 25 eingeführten Größen

$$A_1 = p^2, \quad A_2 = p^2 s, \quad A_3 = -p^3 sr, \quad A_4 = p^4 s(1 - 5s),$$
$$C_1 = p^2, \quad 2C_2 = ps(1 + 3p),$$
$$6C_3 = ps(1 + 7p + 4p^2 - 20p^3),$$
$$24C_4 = ps(1 + 15p + 30p^2 - 90p^3 - 150p^4 + 210p^5).$$

In dem Falle II erhält man

$$X_1 + X_2 = 1, \quad X_1 X_2 = -sw, \quad 2X_1 = 1 + \sqrt{(1 + 4sw)},$$
$$A_1 = s, \quad A_2 = -s^2, \quad A_3 = 2s^3, \quad A_4 = -5s^4,$$
$$C_1 = s, \quad 2C_2 = s(1 - 3s), \quad 6C_3 = s(1 - 4s)(1 - 5s),$$
$$24C_4 = s(1 - 21s + 120s^2 - 210s^3).$$

Endlich liefert der Fall III

$$X_1 + X_2 = 1 + w, \quad X_1 X_2 = s(2w + w^2),$$
$$2X_1 = 1 + w + \sqrt{(1 + 2r^2 w + r^2 w^2)},$$
$$2A_1 = 1 + r^2, \quad 4A_2 = r^2 - r^4, \quad 4A_4 = -r^4 + r^6,$$
$$16A_4 = -r^4 + 6r^6 - 5r^8,$$
$$2C_1 = 1 + r^2, \quad 8C_2 = 1 + 2r^2 - 3r^4, \quad 12C_3 = r^2 - 6r^4 + 5r^6,$$
$$192C_4 = -1 + 4r^2 - 78r^4 + 180r^6 - 105r^8.$$

Wegen $r^2 + 4s = 1$ kann man hierfür auch schreiben

$$C_1 = 1 - 2s, \quad C_2 = 2s(1 - 3s), \quad 3C_3 = -4s(1 - 4s)(1 - 5s),$$
$$3C_4 = 2s(1 - 21s + 120s^2 - 210s^3).$$

Hiernach besitzt der durch den Ausdruck $2A_2$ gegebene Überschuß der Streuung über die Norm des BERNOULLIschen Schemas für die drei Fälle die Beträge

	I	II	III
$2A_2 =$	$+ 2p^3q$	$- 2p^2q^2$	$+ 2pq(1 - 4pq)$

Die Streuung ist also bei I und III übernormal, bei II hingegen unternormal. Diese Bemerkung enthält für den Fall III anscheinend einen Widerspruch gegen die Tatsache, daß sich der Fall III auf das POISSONsche Schema reduzieren läßt, und daß ferner bei dem POISSONschen Schema die Streuung im allgemeinen unternormal, aber niemals übernormal ausfällt. Der Widerspruch ist jedoch nur scheinbar, weil das POISSONsche Schema, wie bereits erwähnt wurde, die leeren Argumente der zum Falle III gehörigen Gruppenverteilung unberücksichtigt läßt.

33. Bei dem bisher benutzten Rechnungsgange wurden die numerischen Elemente der vorgelegten Verteilung aus dem nach w entwickelten Ausdruck von H hergeleitet. Dieser Zusammenhang läßt sich nun umkehren und liefert dann neue Beziehungen, die man sich je nach Umständen zunutze machen kann.

Die Formen, die für F Farben bei den Gruppen $G(s)$ auftreten können, denken wir uns wieder Q-adisch in die Reihenfolge $G_1, G_2, \ldots$ gebracht. Die zugehörigen Gewichte $e_1, e_2, \ldots$ sollen nur die Werte Eins oder Null annehmen, so daß für die C-Größen nur die Werte u oder 1 in Betracht kommen. Infolgedessen darf man, wenn C_h die zur Form G_h gehörige C-Größe bedeutet, die Gleichung

$$C_h = 1 + (u - 1)e_h = 1 + we_h$$

ansetzen. Da unter den Elementen der Determinante H jedes C_h nur einmal auftritt, so gilt das Gleiche von den Größen we_h, d. h. H stellt sich als ein Polynom der Größen we_h dar, das nach jedem we_h vom ersten Grade ist. Da ferner für $w = 0$ die Determinante H den Wert $1 - t$ annimmt, so darf man schreiben:

$$H = (1 - t)(1 - Aw - Bw^2 - Cw^3 - \cdots).$$

Hierin sind die Größen $(1 - t)A$, $(1 - t)B$, ... zunächst Polynome von t, deren Grad nicht über die Ordnung der Determinante H, d. h. nicht über F^{r-1} hinausgeht. Ferner faßt das Glied $(1 - t)Aw$ die Bestandteile von H zusammen, die nach der Gesamtheit der we_h von der ersten Dimension sind, d. h. man darf ansetzen:

$$A = \Sigma a_h e_h, \tag{47}$$

worin die Koeffizienten a von t und den p-Größen abhängen. Ebenso faßt das Glied $(1 - t)Bw$ die Bestandteile zusammen, die nach den we_h von der zweiten Dimension sind, so daß

$$B = \Sigma a_{hi} e_h e_i \tag{48}$$

gesetzt werden darf, wobei die Koeffizienten a_{hh} durchweg verschwinden müssen, da B nach jedem e_h nur vom ersten Grade ist. Desgleichen wird

$$C = \Sigma a_{hik} e_h e_i e_k, \tag{49}$$

mit dem Hinzufügen, daß a_{hik} Null wird, wenn von den Nummern h, i, k zwei zusammenfallen. Entsprechendes gilt von den höheren Gliedern.

Aus (30) erhält man mit $x = nz$

$$\sum_n n^{-1}\mathfrak{D}(u^{n z}, n)t^n = -\log H \tag{50}$$
$$= -\log(1 - t) - \log(1 - Aw - Bw^2 - \cdots).$$

Entwickelt man rechts nach w, so entsteht

$$\sum_n n^{-1}\mathfrak{D}(u^{n z}, n)t^n = -\log(1 - t) + Aw + \left(\tfrac{1}{2}A^2 + B\right)w^2 + \left(\tfrac{1}{3}A^3 + AB + C\right)w^3 + \cdots$$

Differentiiert man wiederholt nach $\log u$ und setzt darauf $u = 1$ oder $w = 0$, so wird

$$\Sigma\mathfrak{D}(z, n)t^n = A, \tag{51}$$

$$\Sigma n\mathfrak{D}(z^2, n) = A + A^2 + 2B, \tag{52}$$

$$\Sigma n^2\mathfrak{D}(z^3, n)t^n = A + 3A^2 + 2A^3 + 6B + 6AB + 6C, \tag{53}$$

usw.

Diese Gleichungen lehren, daß man den Ausdruck von H wenigstens bis zu der Potenz w^m bilden kann, sobald man die Größen $\mathfrak{D}(z,n)$ bis $\mathfrak{D}(z^m,n)$ kennt. Ferner ist die Kenntnis dieser $\mathfrak{D}$-Größen zur vollständigen Bestimmung von H ausreichend, sobald nicht mehr als m Formen gezählt werden, denn da in diesem Falle nur m von den C-Größen den Wert u annehmen, so kann der Grad von H nach u oder w nicht über m hinausgehen. Wir wollen diese Bemerkungen für den Fall $m = 2$ noch etwas weiter verfolgen und zu dem Ende noch eine kleine Umformung mit H vornehmen.

34. Setzt man zur Abkürzung $T = 1 : (1 - t)$, so kann man mit Rücksicht auf (47) flg. schreiben:

$$TH = 1 - \Sigma a_h e_h w - \Sigma a_{hi} e_h e_i w^2 - \Sigma a_{hik} e_h e_i e_k w^3 - \cdots.$$

Zieht man hiervon das Produkt

$$(1 - a_1 e_1 w)(1 - a_2 e_2 w) \ldots$$

ab, so fallen die ersten Potenzen von w heraus, und man kann infolgedessen TH in der Gestalt

$$(54)\quad TH = (1 - a_1 e_1 w)(1 - a_2 e_2 w) \cdots - \Sigma b_{hi} e_h e_i w^2 - \Sigma c_{hik} e_h e_i e_k w^3 - \cdots$$

ansetzen, worin die Koeffizienten $b, c, \ldots$ verschwinden, wenn von den Nummern $h, i, \ldots$ zwei einander gleich werden. Geht man mit dem vorstehenden Ausdruck in die Gleichung (50) ein und rechnet wieder wie vorhin, so erhält man

$$(55)\quad \Sigma \mathfrak{D}(z,n) t^n = \Sigma a_h e_h,$$

$$(56)\quad \Sigma n \mathfrak{D}(z^2,n) t^n = \Sigma a_h e_h + \Sigma (a_h e_h)^2 + 2 \Sigma b_{hi} e_h e_i.$$

In der letzten Gleichung treten, wie man sieht, die Quadrate und Produkte der Gewichte getrennt auf.

35. Schreibt man das E-Symbol für die von z_f bis z_g reichende Zugreihe kurz in der Gestalt $E(f,g)$, so ist die Formenmenge für die betrachteten Gruppen $G(s)$ durch

$$x = nz = E(1,s) + E(2,s+1) + \cdots + E(n,n+s-1)$$

gegeben, wobei die oberhalb n gelegenen Zugnummern wie immer durch ihre modulo n genommenen Reste ersetzt zu denken sind. Die $\mathfrak{D}$-Operation liefert

$$n \mathfrak{D}(z,n) = \Sigma \mathfrak{D}[E(h,h+s-1)],$$

worin die Zugnummer h den Kreis von einer beliebigen Stelle aus einmal zu durchlaufen hat. Hierin liefern rechterhand die

einzelnen $\mathfrak{D}(E)$ jedesmal denselben Beitrag zu der Summe, da ja jeder Zug z_h unabhängig von den übrigen die Reihe der p-Größen zu durchlaufen hat. Demgemäß genügt es, nur das erste $\mathfrak{D}(E)$ beizubehalten und dafür den Faktor n anzufügen, so daß

$$\mathfrak{D}(z,n) = \mathfrak{D}[E(1,s)] \tag{57}$$

wird. Bei der Berechnung von $\mathfrak{D}(E)$ ist nun nach Artikel 10 jeder in dem E-Zeichen auftretende Zug z_h durch ein p_f zu ersetzen und gleichzeitig dieses p_f als Faktor vor das E-Zeichen zu nehmen; sodann ist für jedes E das Gewicht zu schreiben, das der in dem E stehenden Gruppenform zukommen soll; endlich ist die Gesamtheit der so erhaltenen Ausdrücke zu summieren. Demnach erscheint $\mathfrak{D}(z,n)$ in der Gestalt

$$\mathfrak{D}(z,n) = \sum_h P(h,n)e_h, \tag{58}$$

worin die Koeffizienten $P(h,n)$, soweit sie nicht etwa verschwinden, gewisse Produkte aus den p-Größen bedeuten. Hierbei ergibt sich der zu einer bestimmten Formennummer h gehörige P-Koeffizient auf folgende Weise.

36. Die in $E(1,s)$ enthaltene Gruppe $G(s)$ umfaßt die Züge z_1 bis z_s. Soll hieraus bei der Substitution der p-Größen eine bestimmte, mit den Q-adischen Ziffern $h_1, h_2, \ldots h_s$ gebildete Form G_h hervorgehen, so muß zunächst

$$z_1 = h_1, \quad z_2 = h_2, \quad \ldots \; z_s = h_s \tag{59}$$

sein. Ist nun $n < s$, so ist bereits mit den Zügen z_1 bis z_n die Zugreihe $Z(n)$ erschöpft, da ja die Züge $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots$ auf dieselben Stellen des Kreises führen, wie die Züge $z_1, z_2, \ldots$, die den Anfang der Reihe bilden. Infolgedessen müssen wegen (59) auch die Ziffern $h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots$ eine Wiederholung des Gruppenanfangs $h_1, h_2, \ldots$ darstellen, wenn anders bei dem gegebenen Werte von n mit den n Zügen die betrachtete Form G_h herstellbar sein soll. Man erhält also, je nachdem diese Bedingung von den Ziffern h erfüllt wird oder nicht, in (58) den zu G_h gehörigen Beitrag

$$P(h,n)e_h = h_1 h_2 \ldots h_n e_h \quad \text{oder} \quad P(h,n)e_h = 0.$$

Beide Fälle werden zu einer einzigen Gleichung vereinigt, wenn man schreibt:

$$P(h,n) = z_1 z_2 \ldots z_n \mathfrak{e}(z_1,h_1)\mathfrak{e}(z_2,h_2)\ldots\mathfrak{e}(z_s,h_s), \tag{60}$$

oder etwas kürzer

$$P(h,n) = h_1 h_2 \dots h_n \mathfrak{e}(h_1, h_{n+1}) \mathfrak{e}(h_2, h_{n+2}) \dots \mathfrak{e}(h_{s-n}, h_s).$$

Ist $n > s-1$, so lassen sich die Bedingungen (59) ohne weiteres für jede Form G_h erfüllen; auch ist hierbei der Wert von n gleichgültig, solange er nur oberhalb $s-1$ liegt. Man erhält dann

$$P(h,n) = P(h,s) = h_1 h_2 \dots h_s. \tag{61}$$

Die Gleichungen (60) und (61) lassen sich zusammenfassen, wenn man ein Zeichen $\{a,b\}$ einführt, das den Wert Eins oder Null bedeutet, je nachdem a größer als b ist oder nicht. Man erhält dann

$$\mathfrak{D}(z,n) = \{s,n\} \sum_h P(h,n) e_h + \{n, s-1\} \sum_h P(h,s) e_h.$$

Multipliziert man mit t^n und summiert darauf nach n von $n = 1$ an, so wird

$$\sum_n \mathfrak{D}(z,n) t^n = \sum_n \sum_h \{s,n\} P(h,n) e_h t^n + \sum_h P(h,s) e_h t^s (1 + t + t^2 + \cdots),$$

woraus durch Vergleichung mit (55)

$$a_h = P(h,1)t + P(h,2)t^2 + \cdots + P(h,s-1)t^{s-1} + P(h,s)t^s T \tag{62}$$

folgt. Handelt es sich beispielsweise um eine Gruppe $G(s)$, die s-mal dieselbe Farbe p enthält, oder — kürzer ausgedrückt — um die Sequenz p^s, so nehmen die $P(h,n)$ von $n = 1$ bis $n = s$ die Gestalt p^n an, und man erhält den Ausdruck

$$a_h = pt + (pt)^2 + \cdots + (pt)^{s-1} + (pt)^s T, \tag{63}$$

der weiterhin zu einer kleinen Rechnung benutzt werden soll.

37. Der Ausdruck für $\mathfrak{D}(z^2,n)$ läßt sich in ähnlicher Weise bearbeiten. Wir setzen für die Formenmenge die beiden Gleichungen

$$nz = \sum_h E(h+1, h+s), \quad nz = \sum_i E(i+1, i+s)$$

an, bilden daraus erst das Produkt und dann den Durchschnitt, so daß die Gleichung

$$n^2 \mathfrak{D}(z^2,n) = \sum \mathfrak{D}[E(h+1, h+s) E(i+1, i+s)]$$

entsteht. Hierin haben die Nummern h und i, jede für sich von einer beliebigen Kreisstelle aus, den Kreis einmal zu durchlaufen. Man darf daher auch $i = h + f$ setzen und hierbei vorschreiben, daß f von 0 bis $n-1$ laufen soll. Daraus fließt

$$n^2 \mathfrak{D}(z^2,n) = \sum \mathfrak{D}[E(h+1, h+s) E(h+f+1, h+f+s)].$$

Die in den beiden E-Faktoren enthaltenen Gruppen wandern, wenn man f festhält und nur h wachsen läßt, gleichzeitig auf dem Kreise vorwärts, ohne ihre gegenseitige Lage zu ändern. Infolgedessen liefern die Größen $\mathfrak{D}(E.E)$ bei festgehaltenem f denselben Wert, so daß man unter Zusammenziehung der übereinstimmenden Summenglieder den Ausdruck

$$(64) \qquad n\mathfrak{D}(z^2,n) = \sum_f \mathfrak{D}[E(c+1, c+s)E(c+f+1, c+f+s)]$$

ansetzen kann, worin c eine willkürlich gewählte feste Nummer bedeutet, und von den beiden E-Faktoren nur der zweite beweglich geblieben ist.

Die in $E(c+1, c+s)$ und $E(c+f+1, c+f+s)$ enthaltenen Gruppen mögen im folgenden kurz mit I und II bezeichnet werden. Substituiert man nun eine bestimmte Zugreihe, so liefern I und II zwei Formen G_h und G_i mit den Q-adischen Ziffern h_1 bis h_s und i_1 bis i_s, wobei G_h und G_i je nach Umständen voneinander verschieden sind oder übereinstimmen. Daraus entspringt dann in (64) ein Beitrag von der Gestalt Pe_he_i, worin P das Produkt derjenigen p-Größen bedeutet, welche bei der substituierten Zugreihe zu den von I und II besetzten Stellen des Kreises gehören. Man kann daher (64) in der Gestalt

$$(65) \qquad n\mathfrak{D}(z^2,n) = \sum_h \sum_i \sum_f P(h,i,f,n)e_he_i$$

ansetzen, worin die Nummern h, i, f alle zulässigen Werte zu durchlaufen haben, mit der Maßgabe, daß der Koeffizient $P(h,i,f,n)$ gleich Null zu nehmen ist, wenn für den betreffenden Wert von f und n die Gruppen I und II das Formenpaar G_h, G_i nicht erzeugen können. Multipliziert man (65) mit t^n und summiert nach n, so entsteht die Darstellung

$$(66) \qquad \sum n\mathfrak{D}(z^2,n)t^n = \sum P(h,i,f,n)e_he_it^n.$$

Vergleicht man diese mit (56), so ergibt sich, daß die zu $i = h$ gehörigen Koeffizienten $P(h,h,f,n)$ bereits durch die Größen a_h bestimmt sind, daß also die P-Koeffizienten nur noch für ungleiche Werte von h und i aufzusuchen sind. Infolgedessen darf der Wert $f = 0$ beiseite bleiben, da für $f = 0$ die Gruppen I und II jedesmal zusammenfallen. Ebenso darf der Wert $n = 1$ beiseite bleiben, weil zu $n = 1$ als einziger zulässiger Wert von f der Wert $f = 0$ gehört.

38. Zur Ermittelung der noch ausstehenden Koeffizienten greifen wir die ungleichen Formen

$$G_h = h_1 h_2 .. h_s \quad \text{und} \quad G_i = i_1 i_2 .. i_s$$

heraus und suchen die Zugreihen $Z(n)$ auf, die für ein vorgeschriebenes f das Gruppenpaar I, II in die Formenpaare $G_h G_i$ und $G_i G_h$ überführen und dadurch in (65) und (66) die mit $e_h e_i$ behafteten Terme erzeugen. Die hierfür hinreichenden und notwendigen Bedingungen sind bei dem Formenpaare $G_h G_i$

(67) $z_{c+1} = h_1, \ldots, z_{c+s} = h_s \quad \text{und} \quad z_{c+f+1} = i_1, \ldots, z_{c+f+s} = i_s,$

bei dem Paare $G_i G_h$ hingegen

(68) $z_{c+1} = i_1, \ldots, z_{c+s} = i_s \quad \text{und} \quad z_{c+f+1} = h_1, \ldots, z_{c+f+s} = h_s.$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so entspringen daraus in (65) die Bestandteile

$$P(h,i,f,n)e_h e_i \quad \text{und} \quad P(i,h,f,n)e_h e_i,$$

andernfalls sind die vorstehenden P-Koeffizienten gleich Null zu setzen.

Da der Wert von c gleichgültig ist, so wollen wir in (67) $c = 0$ und in (68) $c = n - f$ setzen. Damit erhält man statt (67) das System

(69) $$z_1 = h_1, \ldots, z_s = h_s, \quad z_{f+1} = i_1, \ldots, z_{f+s} = i_s,$$

ferner statt (68) das System

$$z_{n-f+1} = i_1, \ldots, z_{n-f+s} = i_s, \quad z_1 = h_1, \ldots, z_s = h_s,$$

wobei in der zweiten Hälfte des letzten Systems die Nummern der z um n vermindert worden sind. Da hiernach die beiden Systeme ineinander übergehen, wenn man f mit $n - f$ vertauscht, so ist

(70) $$P(h,i,f,n) = P(i,h,n-f,n).$$

Des weitern bilden wir den Ausdruck

$$P(h,i,n) = \sum_f P(h,i,f,n),$$

worin bei der Summation f nur von 1 bis $n - 1$ zu laufen hat, da die $P(h,i,f,n)$ bei ungleichen Werten von h und i für $f = 0$ beständig Null sind. Demnach wird, wenn man (70) nach f von 1 bis $n - 1$ summiert,

$$P(h,i,n) = P(i,h,n).$$

Es genügt also im folgenden nur die Bedingungen (69), die zu dem Formenpaare $G_h G_i$ gehören, zu berücksichtigen, und nachher die Größe $P(h,i,n)$, die hierbei entsteht, mit dem Faktor 2 zu versehen.

Bei der weiteren Behandlung von (69) ist zu unterscheiden, ob die Gruppen I und II zusammenhängen, d. h. einen Zug gemeinsam haben, oder aber ganz auseinander fallen. Der zweite Fall tritt, wie man leicht erkennt, nur dann ein, wenn $n > 2s - 1$ und überdies die Nummer f der Reihe

$$(71) \qquad s,\ s+1,\ s+2,\ \ldots\ n-s$$

angehört. Für alle übrigen Wertepaare von n und f findet ein Zusammenhängen oder ein Übergreifen von I auf II statt.

Um die beiden Fälle bequemer auseinander halten zu können, schreiben wir die P-Größen in der Gestalt

$$P(h,i,f,n) = Q(h,i,f,n) + R(h,i,f,n)$$

und verstehen unter $Q(h,i,f,n)$ den Bestandteil, der durch ein Zusammenhängen von I und II erzeugt wird. In derselben Weise bezeichnet die R-Größe den Bestandteil, der von dem Auseinanderfallen der Gruppen I und II herrührt. Hierbei ist selbstverständlich von den beiden Größen Q und R stets eine gleich Null, da ja für ein gegebenes Wertepaar von n und f immer nur der eine der beiden genannten Fälle stattfinden kann. Entsprechend setzen wir dann noch die Ausdrücke

$$(72) \qquad \begin{gathered} Q(h,i,n) = \sum_f Q(h,i,f,n), \quad R(h,i,n) = \sum_f R(h,i,f,n) \\ P(h,i,n) = Q(h,i,n) + R(h,i,n) \end{gathered}$$

an. Im übrigen ist zu beachten, daß die R-Größen nur dann von Null verschieden sein können, wenn $n > 2s - 1$ und f der Reihe (71) angehört.

39. Um zunächst $Q(h,i,f,n)$ zu ermitteln, hat man für die angegebenen Nummern h,i,f,n das System (69) anzusetzen, wobei man sich von vornherein für jedes n auf diejenigen Werte von f beschränken wird, die einen Zusammenhang von I und II bewirken. Hierbei kommen bis $n = 2s - 1$ hin als Werte von f die Nummern 1 bis $n - 1$ in Betracht, von $n = 2s$ ab hingegen die Nummern von 1 bis $n - 1$ unter Ausschluß der Reihe (71).

Setzt man für $n = 2s - 1$ die Reihe der zulässigen f zunächst mit den beiden Hälften

$$f = 1, 2, \ldots s - 1 \quad \text{und} \quad f = s, s + 1, \ldots 2s - 2$$

an und subtrahiert, was erlaubt ist, von den Gliedern der zweiten Hälfte die Zahl $n = 2s - 1$, so entsteht die Reihe

$$f = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm (s - 1). \tag{73}$$

Verfährt man in ähnlicher Weise mit den für $n > 2s - 1$ zu benutzenden Reihenhälften

$$f = 1, 2, \ldots s - 1 \quad \text{und} \quad f = n - s + 1, n - s + 2, \ldots n - 1,$$

so erhält man, wenn von der zweiten Hälfte n subtrahiert wird, wiederum die Reihe (73). Demnach besitzen von $n = 2s - 1$ ab die zur Berechnung der Q-Größen nötigen Systeme (69) eine Gestalt, die nicht von n abhängt, d. h. es wird

$$Q(h,i,f,2s-1) = Q(h,i,f,2s) = Q(h,i,f,2s+1) = \text{usw.}$$

Das Gleiche gilt für die Größen $Q(h,i,n)$, so daß man bei dem Aufsuchen der Q-Größen die Systeme (69) nur bis $n = 2s - 1$ hin anzusetzen hat.

Beschränkt man sich der vorstehenden Bemerkung gemäß auf die Werte $n < 2s$ und reduziert in (69) die Nummern der z auf ihren modulo n genommenen Rest, so enthalten die $2s$ Gleichungen, die nach (69) für das einzelne f anzusetzen sind, wegen des Zusammenhängens von I und II höchstens $2s - 1$ verschiedene Züge z_ϱ. Daher liefert die Elimination der z_ϱ mindestens eine von den z_ϱ freie Gleichung zwischen den Ziffern h und i. Sind nun die so entstehenden Gleichungen für die gegebenen Ziffern h und i nicht sämtlich erfüllt, so ist das zugehörige $Q(h,i,f,n)$ gleich Null zu setzen, da ja in diesem Falle keine Zugreihe $Z(n)$ angegeben werden kann, die aus den Gruppen I und II das Formenpaar $G_h G_i$ zu erzeugen vermag. Sind dagegen die Ziffern h und i so beschaffen, daß sie die Eliminationsgleichungen sämtlich erfüllen, so ist ein Teil der Gleichungen (69) zur Bestimmung der z_ϱ entbehrlich, und man erhält die wirklich nötigen Gleichungen, wenn man in (69) von rückwärts her jede Gleichung streicht, die als eine Folge der vorhergehenden erscheint, also entbehrt werden kann. Das übrig bleibende reduzierte System gibt dann durch die darin enthaltenen z_ϱ die voneinander verschiedenen Kreisstellen

an, die von den Gruppen I und II bedeckt werden; ferner geben die in dem reduzierten System enthaltenen Ziffern h und i die p-Größen an, die zur Erzeugung des Paares $G_h G_i$ für die einzelnen z_g zu substituieren sind. Daraus folgt dann endlich, daß das gesuchte $Q(h,i,f,n)$ gleich dem Produkt der in dem reduzierten System auftretenden Ziffern h und i ist.

40. Die hier entwickelte Vorschrift ist, wenn es sich um konkrete Fälle handelt, hinreichend bequem und gewährt bei geeigneter Anordnung des Rechenschemas tatsächlich die kürzeste Rechnung, sobald s nicht zu groß ist und nur wenige Formen gezählt werden. Für allgemeine Untersuchungen, bei denen die Zahlen h,i,f,n unbestimmt gelassen werden, hätte man, wenn die Q-Größen unmittelbar als Funktionen der Zahlen h,i,f,n ausgedrückt werden sollen, zunächst die Formeln aufzusuchen, die für die Gleichung

$$G_h = h_1 h_2 \ldots h_s$$

den Zusammenhang zwischen der Formennummer h, der Ziffer h_g, ihrer Stellennummer g und der Gliederzahl s darstellen. Ich habe diese Aufgabe bis jetzt nicht weiter verfolgt, weil sie für die Anwendungen des Gruppenschemas vorderhand von untergeordneter Bedeutung ist.

Das System der Q-Größen wird besonders einfach, wenn es sich bei den Formen G_h und G_i um die zu den beiden Farben p und q gehörigen Sequenzen $G_h = p^s$ und $G_i = q^s$ handelt. Wenn nämlich eine Zugreihe $Z(n)$ die Gruppen I und II in Sequenzen verwandelt, so enthalten im Falle des Zusammenhängens die Sequenzen I und II wegen der ihnen gemeinsamen Züge notwendig dieselbe Farbe, führen also auf eine und dieselbe Form. Daraus folgt, daß das zusammenhängende Gruppenpaar I, II niemals das verlangte Sequenzenpaar $G_h G_i$ erzeugen kann, daß also die Q-Größen für diesen Fall sämtlich verschwinden.

41. Um nunmehr noch die R-Größen zu ermitteln gehen wir auf die Gleichung (64) zurück und schreiben mit $c = 0$

$$n\mathfrak{D}(z^s,n) = \sum_f \mathfrak{D}[E(1,s)E(f+1,f+s)].$$

Wenn die Gruppen I und II, wie jetzt vorausgesetzt wird, auseinander fallen, also keinen Zug gemeinsam haben, so ist nach den Regeln für die $\mathfrak{D}$-Operation

$$\mathfrak{D}[E(1,s)E(f+1,f+s)] = \mathfrak{D}[E(1,s)] \cdot \mathfrak{D}[E(f+1,f+s)].$$

Beschränkt man sich auf die mit dem Faktor $e_h e_i$ behafteten Glieder und setzt demgemäß alle Gewichte außer e_h und e_i gleich Null, so wird für die Zugreihe, die auf das Paar $G_h G_i$ führt, nach (61)

$$\mathfrak{D}[E(1,s)] = P(h,s)e_h, \quad \mathfrak{D}[E[f+1,f+s)] = P(i,s)e_i,$$

woraus sofort

$$R(h,i,f,n) = P(h,s)P(i,s)$$

folgt. Summiert man diesen Ausdruck, der selbstverständlich nur für die in (71) enthaltenen Werte von f gilt, nach f, so wird

$$R(h,i,n) = (n - 2s + 1)P(h,s)P(i,s),$$

wofür wir

$$R(h,i,n) = \{n, 2s-1\}(n - 2s + 1)P(h,s)P(i,s) \tag{74}$$

schreiben wollen, um ersichtlich zu machen, daß die R-Größen für $n < 2s$ durchweg verschwinden. Der hierzu gehörige Bestandteil in (66) wird erhalten, wenn man in (74) wegen des Paares $G_i G_h$ noch den Faktor 2 hinzufügt, sodann mit t^n multipliziert und nach n summiert. Dies liefert zu (66) den Beitrag

$$2P(h,s)P(i,s)e_h e_i t^{2s}(1 + 2t + 3t^2 + \cdots)$$

oder

$$2P(h,s)P(i,s)e_h e_i t^{2s}T^2.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (56) und zieht außerdem die Q-Größen heran, so entsteht die Gleichung

$$b_{hi} + b_{ih} = \sum_n Q(h,i,n)t^n + P(h,s)P(i,s)t^{2s}T^2. \tag{75}$$

Zur Erläuterung mögen wieder die beiden vorhin betrachteten Sequenzen p^s und q^s dienen. Da für diese die Q-Größen verschwinden und

$$P(h,s) = p^s, \quad P(i,s) = q^s$$

wird, so liefert die Gleichung (54) unter Berücksichtigung von (63) für H die Darstellung

$$TH = (1 - a_h w)(1 - a_i w) - (pt \cdot qt)^s (wT)^2, \tag{76}$$

$$a_h = pt + \cdots (pt)^{s-1} + (pt)^s T, \quad a_i = qt + \cdots (qt)^{s-1} + (qt)^s T.$$

Da die Verteilung solcher Sequenzen für den Fall $p = q$ vor einiger Zeit Gegenstand der Erörterung gewesen ist, so mögen noch einige darauf bezügliche Folgerungen aus (76) Platz finden.

42. Für $q = p$ wird zunächst

$$TH = (1 - a_k w)^2 - (p^s t^s w T)^2.$$

Zerlegt man rechterhand die Differenz der Quadrate in bekannter Weise, so kann man schreiben

$$H = LM,$$
$$L = 1 - w[pt + \cdots + (pt)^{s-1}],$$
$$M = 1 - t - w(1-t)[pt + \cdots + (pt)^{s-1}] - 2w(pt)^s.$$

Hieraus suchen wir jetzt nach Artikel 25 die Wurzel

$$X_1 = 1 + A_1 w + A_2 w^2 + \cdots \tag{77}$$

auf, die für $w = 0$ den Wert Eins annimmt. Diese Wurzel gehört dem Teiler M an, weil für $w = 0$ der Teiler L den Wert Eins annimmt. Setzt man nun $t = X^{-1}$, so geht die Bedingung $M = 0$ durch Multiplikation mit X nach einer kleinen Umformung in die Gleichung

$$X = 1 + w(X - p)^{-1}[-p + pX + p^s X^{2-s} + p^s(1 - 2p)X^{1-s}]$$

über. Die Auflösung liefert mit Unterdrückung der Zwischenrechnung für die niedrigsten Glieder von (77) die Ausdrücke

$$A_1 = 2p^s,$$
$$A_2 = 2(p^{s+1} - p^{2s})(1-p)^{-1} - 4(s-1)p^{2s}. \tag{78}$$

Hieraus folgen dann weiter die Gleichungen

$$\mathfrak{D}(z,n) = 2p^s,$$
$$n \operatorname{str}(z,n)^2 = 2p^s(1 - 2p^s) + 4(p^{s+1} - p^{2s})(1-p)^{-1} - 8(s-1)p^{2s}. \tag{79}$$

Diese Gleichungen sind, da der Grad von M nach t nicht über s hinausgeht, sicher so lange richtig, als n oberhalb $2s - 2$ bleibt.

Die Größe A_2 gibt durch ihr positives oder negatives Vorzeichen an, ob die Streuung übernormal oder unternormal ist. Um das Verhalten von A_2 bequemer zu übersehen, setzen wir

$$p = 1 : (1 + y),$$

wobei zu beachten ist, daß bei der vorliegenden Aufgabe für p nur die Werte von $p = 0$ bis $p = 0.5$, also für y nur die Werte oberhalb $y = 1$ in Betracht kommen. Man erhält dann aus (78) zunächst

$$y(1 + y)^{2s} A_2 = 2(1 + y)^s - (4s - 2)y - 2.$$

Entwickelt man auf der rechten Seite nach y, so wird nach der nötigen Reduktion

$$A_2(1+y)^{2s} : 2(s-1) = -1 + \frac{sy}{2} + \frac{s(s-2)y^2}{2\cdot 3} + \frac{s(s-2)(s-3)y^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

Dieser Ausdruck nimmt beständig zu, wenn y von $y = 1$ an wächst; ebenso nimmt er zu, wenn s die Zahlenreihe $2, 3, \ldots$ durchläuft. Das hier in Betracht kommende Minimum findet also für $y = 1$ und $s = 2$ statt und besitzt den Wert Null, so daß A_2 niemals negativ und die Streuung niemals unternormal wird.

43. Die betrachteten Sequenzen sind bei einer beobachteten Reihe um so seltener zu erwarten, je größer s ist. Man kann daher fragen, wie man das Fehlen der höheren Sequenzen zu beurteilen habe. Zu dem Ende führen wir das Verhältnis zwischen Streuung und Argumentdurchschnitt ein und setzen

$$\mathrm{str}(z,n) = a\mathfrak{D}(z,n).$$

Hiermit verwandelt sich (79) nach gehöriger Reduktion in die Gleichung

$$2na^2 + 4s - 1 = [(1+p)(p^{-s} - 1)] : (1-p), \tag{80}$$

deren Verwendung sich am raschesten durch Beispiele deutlich machen läßt.

Handelt es sich, wie wir zunächst annehmen wollen, um die mit einer Münze ausgeführten Würfe „Bild oder Schrift", so ist $p = 0.5$, und man erhält aus (80)

$$na^2 = 3 \times 2^{s-1} - 1 - 2s.$$

Daraus läßt sich dann ein Täfelchen wie das folgende berechnen:

$s =$	6	7	8	9
$na^2 =$	83	177	367	749.

Hiernach ist bei 400 Würfen für $s = 8$ der Wert von a sehr nahe gleich Eins. Daher würde das Ausbleiben der Sequenzen $G(8)$ besagen, daß der beobachtete Wert $z = 0$ von dem Argumentdurchschnitt um den Betrag der Streuung abweicht. Eine solche Abweichung hat aber erfahrungsgemäß nichts auffallendes an sich und gestattet darum auch keine weitergehenden Schlüsse.

Rechnet man mit dem Werte $p = 18 : 37$, der für das Roulettespiel gilt, so läßt sich nach (88) das Täfelchen

$s =$	10	11	12	13	14	15
$na^2 =$	1928	3984	8211	16903	34772	71504

aufstellen. Hiernach würde bei einem Versuche von 80000 Spielen das Ausbleiben der Sequenzen $G(13)$ besagen, daß der beobachtete Wert $z = 0$ von dem Argumentdurchschnitt um das $2 \cdot 18$-fache der Streuung abweicht. Es bedarf keiner besonderen Bemerkung, daß man eine solche Abweichung auf sich beruhen lassen muß, wenn sie bei einer ganz isolierten Beobachtungsreihe vorgekommen ist.

44. Mit den vorstehenden Entwicklungen will ich die Untersuchung der zyklischen Gruppen abbrechen und noch kurz auf die linearen Gruppen eingehen. Hierbei wird es genügen, eine bestimmte Gliederzahl und zwar die Gruppen $G(4)$ zugrunde zu legen, da das Ergebnis sofort erkennen läßt, wie sich die Rechnung für die übrigen Gruppen gestaltet.

Wie früher führen wir die Veränderlichen $u = \exp U$, sowie die Zeichen

$$E(z_i z_{i+1} z_{i+2} z_{i+3}) \quad \text{und} \quad C(z_i z_{i+1} z_{i+2} z_{i+3}) = \exp[UE(z_i z_{i+1} z_{i+2} z_{i+3})]$$

nebst der linear gebildeten Formenmenge

$$x = E(z_1 z_2 z_3 z_4) + \cdots + E(z_{n-3} z_{n-2} z_{n-1} z_n)$$

ein. Ferner bilden wir das Produkt aus den C-Größen und daraus den Durchschnitt

$$(81) \qquad \mathfrak{D}[C(z_1 z_2 z_3 z_4) \ldots C(z_{n-3} z_{n-2} z_{n-1} z_n)] = \mathfrak{D}[\exp(Ux)] = \mathfrak{D}(u^x, n).$$

Hierin denken wir uns die drei letzten Züge durch die vorläufig als fest gedachten Größen a, b, c ersetzt und stellen dadurch den Ausdruck

$$(82) \qquad A(abc,n) = \mathfrak{D}[C(z_1 z_2 z_3 z_4) \ldots C(z_{n-3} abc)]$$

her, worin die $\mathfrak{D}$-Operation nur über die Züge z_1 bis z_{n-3} auszudehnen ist. Will man daraus wieder $\mathfrak{D}(u^x, n)$ herleiten, so hat man die $\mathfrak{D}$-Operation für die drei letzten Züge nachzuholen und erhält auf diese Weise die Darstellung

$$(83) \qquad \mathfrak{D}(u^x, n) = \Sigma abc A(abc,n).$$

Führt man in (82) die $\mathfrak{D}$-Operation zunächst nur nach z_{n-3} explizite aus, so entsteht die Gleichung

$$A(abc,n) = \sum_e e\mathfrak{D}[C(z_1 z_2 z_3 z_4) \ldots C(z_{n-4} eab) C(eabc)],$$

worin die $\mathfrak{D}$-Operation nur noch über die Veränderlichen z_1 bis z_{n-4} zu gehen hat. Hierbei läßt sich der Faktor $C(eabc)$ vor das

$\mathfrak{D}$-Zeichen ziehen, und man erhält mit der in (82) eingeführten Bezeichnung

$$A(abc,n) = \sum_e eC(eabc)A(eab,n-1). \tag{84}$$

Da das Zeichen $A(abc,3)$ vorderhand keinen Sinn hat, so gilt die Beziehung (84) vorläufig nur von $n = 5$ ab. Man kann jedoch jenes Zeichen so festsetzen, daß die Gleichung (84) auch noch für $n = 4$ gilt. Nach (82) ist nämlich

$$A(abc,4) = \mathfrak{D}[C(z_1 abc)].$$

Führt man nun hierin die noch ausstehende $\mathfrak{D}$-Operation nach z_1 aus, so entsteht

$$A(abc,n) = \sum_e eC(eabc).$$

Hält man hiermit die Gleichung (84) zusammen, so erkennt man, daß diese Gleichung auch noch für $n = 4$ gilt, wenn man, wie es jetzt geschehen soll,

$$A(abc,3) = 1 \tag{85}$$

setzt. Daraus folgt nach (83) noch die Gleichung

$$\mathfrak{D}(u^x,3) = \Sigma abc = (\Sigma a)(\Sigma b)(\Sigma c) = 1,$$

da ja von den Summen über die a,b,c jede nichts andres als die Summe der Farbengrößen p_h ist, also den Wert Eins besitzt.

45. Um die Gleichung (84) weiter umzuformen führen wir die Q-adischen Zahlen $G(3)$ nebst den dazu gehörigen Ordnungsnummern ein und setzen, wenn die Nummern h und k zu den Zifferntripeln abc und efg gehören, wie früher den Ausdruck

$$[k,h] = [efg,abc] = eC(eabc)\mathfrak{e}(f,a)\mathfrak{e}(g,b)$$

an. Bildet man damit den Ausdruck

$$\sum_k [k,h]A(efg,n-1) = \sum_k eC(eabc)\mathfrak{e}(f,a)\mathfrak{e}(g,b)A(efg,n-1),$$

worin die Summe über alle Nummern k und folgeweise über alle Ziffern e,f,g auszudehnen ist, so entsteht rechterhand wegen der $\mathfrak{e}$-Faktoren die rechte Seite von (84). Demnach ist

$$A(abc,n) = \sum_k [k,h]A(efg,n-1)$$

oder, kürzer geschrieben,

$$A(h,n) = \sum_k [k,h]A(k,n-1). \tag{86}$$

Hierzu sind dann noch die Anfangsbedingungen

$$A(h,3) = A(k,3) = 1 \tag{87}$$

hinzuzufügen. Um nun die Gleichungen (86) zusammenzufassen bilden wir die von $n = 3$ an laufenden Summen

$$A(h) = \sum_n A(h,n)t^n,$$

multiplizieren darauf (86) mit t^n und summieren von $n = 4$ an. Daraus entsteht unter Berücksichtigung von (87)

$$A(h) - t^3 = \sum_k [k,h]tA(k),$$

so daß man mit der Abkürzung

$$H(k,h) = e(k,h) - [k,h]t$$

das System

$$t^3 = \sum_k H(k,h)A(k) \tag{88}$$

erhält. Aus den $H(k,h)$ bilden wir nunmehr die Determinante H nebst den Unterdeterminanten

$$G(i,h) = \partial H : \partial H(i,h),$$

multiplizieren sodann (88) mit $G(i,h)$ und summieren nach h. Dadurch entsteht

$$t^3 \sum_h G(i,h) = HA(i) = H \sum_n A(i,n)t^n$$

oder, wenn statt der Ordnungsnummern h und i wieder die Tripel efg und abc eingeführt werden,

$$t^3 \sum_e \sum_f \sum_g G(abc,efg) = H \sum_n A(abc,n)t^n.$$

Multipliziert man mit dem Produkt $a \,.\, b \,.\, c$ und summiert nach den a, b, c, so entsteht mit der Abkürzung

$$J = t^3 \Sigma a \,.\, b \,.\, c \,.\, G(abc,efg) \tag{89}$$

unter Berücksichtigung von (83) die Grundformel

$$\sum_n \mathfrak{D}(u^x,n)t^n = J : H. \tag{90}$$

Die Ähnlichkeit dieser Formel mit der Grundgleichung der zyklischen Gruppen ist unmittelbar zu erkennen. Der Nenner auf der rechten Seite von (90) ist identisch mit der früher eingeführten Determinante H. Ferner tritt im Zähler an die Stelle des Polynoms $-dH : d \log t$ jetzt das in ähnlicher Weise gebildete Polynom J.

Führt man wieder die Darstellung

$$H = (1 - X_1 t)(1 - X_2 t) \dots (1 - X_N t)$$

ein, so läßt sich der Quotient $J : H$ auf bekannte Weise in Partialbrüche mit den Nennern $1 - X_\nu t$ zerlegen. Entwickelt man diese Partialbrüche nach Potenzen von t und spaltet darauf die Gleichung (90) nach diesen Potenzen, so entsteht eine Gleichung von der Gestalt

$$\mathfrak{D}(u^x, n) = L_1 X_1^n + L_2 X_2^n + \cdots + L_N X_N^n, \tag{91}$$

worin der Koeffizient L_h den Wert bezeichnet, den eine gewisse rationale Funktion $M(X)$ für $X = X_h$ annimmt.

Die Gleichung (91) läßt erkennen, warum die linearen Gruppen unbequemer zu benutzen sind, als die zyklischen. Denn bei den letzteren tritt an die Stelle der Koeffizienten L durchweg der Wert Eins. Im übrigen lassen sich die früheren Entwicklungen auch auf die linearen Gruppen übertragen, nur daß alle Formeln — von dem Ausdruck für $\mathfrak{D}(x,n)$ abgesehen — verwickelter ausfallen. Aus diesem Grunde will ich das Schema der linearen Gruppen hier nicht weiter verfolgen.

46. Zum Schlusse dieser Untersuchung möge noch eine Bemerkung allgemeiner Art Platz finden. Die Züge z_g sind die Repräsentanten von irgendwelchen „Ereignissen", denen ein und derselbe Entstehungsmodus zugrunde liegt. Ferner soll die Vergleichung der beobachteten Gruppenverteilung mit der aus dem Schema berechneten die Frage entscheiden, ob zwischen den einzelnen Zügen der Zugreihen eine Sukzessionsabhängigkeit, d. h. eine Verbundenheit vorhanden ist oder nicht. Nun ist aber die Konstanz des Entstehungsmodus, d. h. der Urnenfüllung, eine Voraussetzung, deren Zulässigkeit bei beobachteten Reihen nicht selten zweifelhaft ist. Daher wäre bei der weiteren Verfolgung des Gegenstandes zunächst die Annahme ins Auge zu fassen, daß jeder Zug aus einer besonderen Urne erfolgt, daß also die für einen Zug z_g zu substituierende p-Größe nicht nur von der gezogenen Farbe, sondern auch von der Zugnummer g abhängt.

Eine andre Erweiterung der Fragestellung geht davon aus, daß die Anwendung des hier betrachteten Schemas nicht mehr als eine Entscheidung zwischen „verbunden" und „unverbunden" liefern kann und die Frage nach der Beschaffenheit einer als vorhanden nachgewiesenen Verbundenheit unbeantwortet läßt.

Damit gelangt man zu einer Verteilungsaufgabe, die bisher meines Wissens nicht einmal für die einzelnen Züge, geschweige denn für die Zuggruppen, ernstlich in Angriff genommen worden ist. Gegeben ist eine Reihe von Urnen $U(1), U(2), \ldots$, deren Füllung die F Farben p_1 bis p_F aufweist. Der erste Zug erfolgt aus einer willkürlich herausgegriffenen Urne $U(A)$ und liefert die Farbe p_a. Diese Farbe p_a bestimmt die Urne $U(B)$, aus der der zweite Zug zu erfolgen hat. Sodann bestimmt die Farbe p_b des zweiten Zuges die Urne $U(C)$ für den dritten Zug, und so fort, bis man alle Züge beisammen hat; gesucht wird die Verteilung der verschiedenen Gruppenformen.

Die gestellte Aufgabe dürfte, soweit sich das nach dem ersten Anblick beurteilen läßt, ziemliche Schwierigkeiten bieten. Sie ist jedoch für die allgemeine Kollektivmaßlehre von erheblicher Wichtigkeit, denn die Fälle, wo zwischen den Gliedern einer Reihe von Ereignissen eine vom Zufall beeinflußte Verbundenheit besteht, sind recht häufig; Beispiele hierfür sind die meteorologischen Aufzeichnungen, die täglichen Gänge einer Uhr und noch manches andre.

Inhaltsübersicht.

		Seite
1—8.	Die verschiedenen Gestalten der Aufgabe	579
9.	Die Q-adische Ordnung der Gruppenformen	584
10.	Regel für die Durchschnitte	585
11—14.	Ansatz für die zyklischen Gruppen	586
15—17.	Die Ausdrücke $\|k,h\|$	589
18.	Hilfssatz aus der Determinantentheorie	592
19.	Die erzeugende Funktion H	594
20.	Beispiel	596
21—26.	Berechnung der numerischen Elemente	597
27—32.	Beispiele	604
33—41.	Umkehrung der Rechnung	611
42—43.	Anwendung auf die Sequenzen	622
44—45.	Lineare Gruppen	624
46.	Schlußbemerkung	627